

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДВНЗ "Ужгородський національний університет"
Факультет інформаційних технологій
Кафедра інформаційних управляючих систем та технологій

В. М. Коцовський

Дискретна математика та теорія алгоритмів. Частина I

Конспект лекцій

Ужгород – 2024

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
1. ТЕОРІЯ МНОЖИН	4
1.1. Поняття множини	4
1.2. Способи задання множин	4
1.3. Основні числові множини. Метод математичної індукції	5
1.4. Підмножини	6
1.5. Операції над множинами	7
1.6. Алгебра множин	12
1.7. Потужність множини	15
1.8. Задачі до розділу	17
1.8.1. Множини. Операції над множинами	17
1.8.2. Потужність множини	18
1.8.3. Метод математичної індукції	19
1.9. Додаткові задачі	20
2. БІНАРНІ ВІДНОШЕННЯ	22
2.1. Декартів добуток множин	22
2.2. Поняття відношення. Задання бінарних відношень	22
2.3. Операції над бінарними відношеннями	25
2.4. Властивості однорідних бінарних відношень	27
2.5. Відношення еквівалентності та толерантності	31
2.6. Відношення порядку	35
2.7. Функціональні відношення	39
2.7.1. Основні означення	39
2.7.2. Види функцій	40
2.8. Задачі до розділу	41
2.8.1. Операції над відношеннями	41
2.8.2. Властивості бінарних відношень	42
2.8.3. Бінарні відношення еквівалентності	43
2.8.4. Відношення порядку	44
2.8.5. Функціональні відношення	47
2.9. Додаткові задачі	48
3. ЛОГІКА ВИСЛОВЛЮВАНЬ	50
3.1. Основні поняття логіки висловлювань	50
3.1.1. Логічні операції	50
3.1.2. Формули логіки висловлювань	51
3.2. Рівносильні перетворення формул	55
3.3. Логічне слідування. Аналіз міркувань	57
3.4. Задачі до розділу	60
3.4.1. Формули логіки висловлювань	60
3.4.2. Рівносильні перетворення формул алгебри висловлювань	61
3.4.3. Логічне слідування	62
3.5. Додаткові задачі	63
4. ЛОГІКА ПРЕДИКАТІВ	64
4.1. Недостатність засобів логіки висловлювань	64
4.2. Поняття предиката. Основні означення	64

	2
4.3. Квантори	68
4.4. Властивості операцій квантифікації:	70
4.5. Використання логіки предикатів.....	71
4.6. Задачі до розділу	77
4.6.1. Предикати. Операції над предикатами.....	77
4.6.2. Аналіз міркувань засобами логіки предикатів	79
4.7. Додаткові задачі	80
5. КОМБІНАТОРИКА	81
5.1. Основні правила комбінаторики	81
5.2. Розміщення, сполучення та перестановки	81
5.3. Властивості біноміальних коефіцієнтів. Біном Ньютона та поліноміальна формула	85
5.4. Деякі комбінаторні задачі	87
5.4.1. Задача про цілочислові розв'язки.....	87
5.4.2. Принцип Діріхле.....	88
5.4.3. Принцип включення-виключення.....	88
5.4.3. Задачі про розподіл предметів за ящиками	89
5.5. Задача про розбиття множини на непорожні частини	90
5.6. Числа Каталана	92
5.7. Задачі до розділу	94
5.8. Додаткові задачі	97
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА.....	100

ВСТУП

Навчальна дисципліна "Дискретна математика та теорія алгоритмів" вивчається студентами факультету інформаційних технологій протягом перших двох семестрів. Актуальність вивчення основних понять та засад дискретної математики майбутніми спеціалістами в галузі інформаційних технологій зумовлена тим фактом, що основні способи подання та обробки інформації в інформаційних системах є дискретними за своєю природою [1–3]. Тому важливою складовою процесу підготовки фахівців ІТ-сфери є вироблення знань та навичок, які стосуються розуміння та використання сучасних моделей та методів обробки, аналізу та перетворення дискретної інформації.

Слід зазначити також велике методологічне значення вивчення дисципліни "Дискретна математика та теорія алгоритмів". Воно, зокрема, полягає у тому, що переважна більшість навчальних дисциплін, які входять до складу галузі знань 12— "Інформаційні технології", широко використовують позначення, поняття та моделі дискретної математики. У якості прикладу можна навести такі дисципліни, як "Алгоритми та структури даних", "Об'єктно-орієнтоване програмування", "Бази даних та знань", "Системи штучного інтелекту", "Математичне моделювання" тощо.

У конспекті лекцій розглянуто навчальний матеріал, який входить до першої частини курсу "Дискретна математика та теорія алгоритмів". Наведено відомості з теорії множин, теорії бінарних відношень, математичної логіки (якій присвячено третій та четвертий розділи) та комбінаторики. На початку кожного розділу наведено основні позначення та означення, знання яких є обов'язковим для успішного засвоєння навчальної дисципліни. Важливі поняття та терміни, які уперше зустрічаються у тексті, виділено курсивом. Переважну більшість понять проілюстровано на змістовних прикладах.

Виклад матеріалу є надзвичайно стислим. Додаткові теоретичні відомості, обґрунтування тверджень, а також більш детальний розгляд відповідних розділів дискретної математики читач може знайти у підручниках [1–10], які наведені у переліку рекомендованої літератури. Кожний розділ містить підрозділ "задачі до розділу", у якому наведено задачі, які можуть бути використанні для підготовки до практичних занять із дисципліни. У кінці кожного розділу є також підрозділ "Додаткові задачі", у якому наведено задачі підвищеної складності, призначені для тих студентів, які бажають поглибити свої знання з дискретної математики. Велика кількість додаткових задач різної складності наведена у [11–16].

1. ТЕОРІЯ МНОЖИН

1.1. Поняття множини

Поняття множини належить до основних понять математики. Воно не має точного визначення і належить до так званих аксіоматичних понять.

Часто використовують інтуїтивне поняття множини, яке дав основоположник теорії множини Г. Кантор:

"Довільна сукупність об'єктів нашої інтуїції чи інтелекту, які можна відрізнити один від іншого і які складають єдине ціле, називається *множиною*. Об'єкти, які входять до складу множини, називаються її *елементами*".

Той факт, що елемент x *належить* множині A , позначається як $x \in A$. Запис $x \notin A$ означає, що елемент x *не належить* множині A .

Розглядається також множина, яка не містить жодного елемента. Ця множина називається *порожньою* і позначається $\emptyset$.

Відповідно до *інтуїтивного принципу об'ємності* дві множини є *рівними* тоді і тільки тоді, коли вони складаються із однакових елементів. Рівність двох множин A та B будемо позначати як $A = B$.

Властивості відношення рівності множин:

- 1) $A = A$;
- 2) якщо $A = B$, то $B = A$;
- 3) якщо $A = B$ і $B = C$, то $A = C$.

Множина, яка утворена елементами $a_1, a_2, \dots, a_n$, позначається $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Приклад 1.1. $\{a\}$ — одноелементна множина, єдиним елементом якої є елемент a .

Множини $\{1, 2, 3, 4\}$ та $\{3, 2, 4, 1\}$ є рівними, оскільки вони складаються із тих самих елементів. Множини $\{1, 2, 3, 4\}$ та $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ не є рівними, оскільки перша складається з чотирьох елементів, а друга — з двох.

1.2. Способи задання множин

Розглянемо три основні способи задання множин.

1. Задання множини переліком її елементів

Усі елементи множини записуються у фігурних дужках.

Приклад 1.2. $A = \{4, 11, 20, 25, 31\}$.

Цей спосіб на практиці використовується для задання скінченних множин, які містять відносно невелику кількість елементів. Він є непридатним для задання нескінченних множин, а також для задання скінченних множин, елементи яких важко перелічити (прикладом може бути множина собак міста Ужгорода).

2. Задання множини вказівкою властивостей її елементів (предикативний)

Під властивістю $P(x)$ об'єкта x будемо розуміти розповідне речення, в якому щось стверджується про об'єкт x і яке може бути або істинним, або хибним.

Множина A усіх об'єктів x , які мають властивість $P(x)$, позначається $A = \{x | P(x)\}$.

Приклад 1.3. Нехай $A = \{x | x \in \mathbb{R}, x^2 - 7x + 10 = 0\}$. Для знаходження елементів множини A потрібно розв'язати квадратне рівняння $x^2 - 7x + 10 = 0$. Його коренями є числа $x_1 = 2, x_2 = 5$. Тому $A = \{2, 5\}$.

3. Задання множини за допомогою процедури породження елементів.

Приклад 1.4. Множина чисел Фібоначчі визначається наступним чином:

$$f_1 = 1, f_2 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, n = 2, 3, \dots$$

Вкажемо перші десять чисел Фібоначчі:

$$f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8, f_7 = 13, f_8 = 21, f_9 = 34, f_{10} = 55.$$

Із заданням множин пов'язаний цілий ряд парадоксів. Розглянемо

Парадокс перукаря. Єдиний перукар у місті N визначає множину A мешканців, яких він повинен голити, як сукупність всіх тих мешканців N , які не голяться самі. Але тоді для самого перукаря виходить протиріччя і при включенні його до множини A , і при віднесенні його до мешканців, які голяться самі.

Парадокс Рассела. Нехай A — множина усіх множин, які не є власними елементами. Тоді обидва можливі твердження про множину A є суперечливими:

- 1) A є елементом множини A ;
- 2) A не є елементом множини A .

1.3. Основні числові множини. Метод математичної індукції

До основних числових множин, які розглядаються у математиці, відносяться:

- 1) Множина натуральних чисел $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

- 2) Множина цілих чисел $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

- 3) Множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}.$$

- 4) Множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ (множина усіх чисел числової прямої).

Метод математичної індукції

Метод математичної індукції заснований на принципі математичної індукції, який полягає у наступному: *твердження справедливе для всіх натуральних n , якщо:*

- 1) *твердження справджується у випадку $n = 1$ (база індукції);*
- 2) *із виконання твердження для довільного натурального $n = k$ (припущення індукції) випливає його справедливість для $n = k + 1$ (індуктивний перехід).*

Приклад 1.5. Довести, що сума квадратів n перших натуральних чисел рівна $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Розв'язання. Нехай $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

1) База індукції. Нехай $n=1$. Тоді $S_2(1) = 1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$

2) Припустимо, що при $n=k$ твердження виконується, тобто $S_2(k) =$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \text{ і нехай } n=k+1. \text{ Тоді}$$

$$\begin{aligned} S_2(n) &= S_2(k+1) = 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \\ &= \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

1.4. Підмножини

Множина A називається *підмножиною* множини B , якщо кожний елемент множини A є елементом множини B . Це позначають як $A \subseteq B$. Символ « $\subseteq$ » називається символом операції *включення* множин.

Наприклад, $\{2, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Множини A та $\emptyset$ вважаються *тривіальними* підмножинами множини A . Усі інші її підмножини називаються *нетривіальними*.

Множина A називається *власною підмножиною* множини B , якщо $A \subseteq B$ і $A \neq B$. Символ « $\subset$ » називається символом операції *строого включення* множин. Наприклад, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Властивості операції включення:

- 1) $A \subseteq A$;
- 2) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$, то $A = B$;
- 3) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$;
- 4) для довільної множини A : $\emptyset \subseteq A$.

Властивості операції строгого включення:

- 1) $A \not\subset A$;
- 2) якщо $A \subset B$, то $B \not\subset A$;
- 3) якщо $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$;

Множина усіх підмножин множини A називається *булеаном* множини A і позначається $\mathcal{P}(A)$ (або $\mathcal{B}(A)$, або 2^A). Наприклад, якщо $A = \{1, 2, 3\}$, то

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Теорема 1.1. Якщо непорожня скінченна множина містить n елементів, то її булеан містить 2^n елементів.

Доведення. Використаємо індукцію за числом n .

1) База індукції. Нехай $n = 1$. Тоді $\mathcal{P}(\{a_1\}) = \{\emptyset, \{a_1\}\}$. Тому у випадку $n = 1$ твердження теореми справджується.

2) Припустимо, що при $n = k$ твердження виконується, тобто у випадку k -елементної множини A кількість елементів булеана $\mathcal{P}(A)$ рівна 2^k . Розглянемо випадок $n = k + 1$. Нехай $A = \{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}\}$. Розіб'ємо елементи булеана $\mathcal{P}(A)$ на дві групи. До першої групи віднесемо усі підмножини множини A , які не містять елемента a_{k+1} , до другої — усі інші підмножини. Перша група складається із усіх підмножин k -елементної множини $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ і тому згідно з припущенням індукції містить 2^k елементів. Кількість елементів другої групи також рівна 2^k , оскільки відкинувши елемент a_{k+1} з довільної підмножини, яка входить до другої групи, отримаємо деяку підмножину, яка входить до першої групи. Тому загальна кількість елементів булеана $\mathcal{P}(A)$ рівна $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1} = 2^n$, що й треба було довести. Теорема доведена.

1.5. Операції над множинами

До основних операцій над множинами відносяться *доповнення*, *перетин*, *об'єднання*, *різниця*, та *симетрична різниця*, для позначення яких використовуються відповідно символи $\bar{}$, $\cap$, $\cup$, $\setminus$, Δ :

$\bar{A} = \{x | x \in U, x \notin A\}$ — *доповнення множини A до універсальної множини U* (інші позначення: A^c або A').

$A \cap B = \{x | x \in A, x \in B\}$ — *перетин множин A та B* .

$A \cup B = \{x | x \in A \text{ або } x \in B\}$ — *об'єднання множин A та B* .

$A \setminus B = \{x | x \in A, x \notin B\}$ — *різниця множин A та B* .

$A \overset{\text{def}}{\Delta} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ — *симетрична різниця множин A та B* (позначення $\overset{\text{def}}{=} \text{читається як "рівне за визначенням"}).$

Приклад 1.6. Нехай $U = \{5, 6, \dots, 30\}$ — універсальна множина,

$$A = \{6, 8, 9, 10, 12, 14, 20, 21, 22, 27\},$$

$$B = \{3x - 6 | x - \text{непарне}, x \in \mathbb{N}\},$$

$$C = \{x \mid x + 4 - \text{просте число}\}.$$

Вказати перелік елементів множини $D = B \setminus (A \Delta \bar{C})$.

Розв'язання.

1) Задамо множини B та C переліком їх елементів:

$$B = \{9, 15, 21, 27\}, \quad C = \{7, 9, 13, 15, 19, 25, 27\}.$$

2) Послідовно виконаємо операції над множинами:

а) $\bar{C} = \{5, 6, 8, 10, 11, 12, 14, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 29, 30\}.$

б) Знайдемо симетричну різницю множини A та $\bar{C}$ за формулою:

$$A \Delta \bar{C} = (A \setminus \bar{C}) \cup (\bar{C} \setminus A).$$

Оскільки $A \setminus \bar{C} = \{9, 27\}$, $\bar{C} \setminus A = \{5, 11, 16, 17, 18, 23, 24, 26, 28, 29, 30\}$, то

$$A \Delta \bar{C} = \{5, 9, 11, 16, 17, 18, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30\}.$$

в) Знайдемо різницю множин B та $A \Delta \bar{C}$:

$$B \setminus (A \Delta \bar{C}) = \{15, 21\}.$$

Відповідь: $D = \{15, 21\}.$

Часто для ілюстрації операцій над множинами використовують *діаграми Венна*. При цьому універсальну множину позначають прямокутником, усі інші множини — овалами (або іншими фігурами) у ньому. Результат операції виділяється кольором або штрихуванням, як це показано на рис. 1.1.

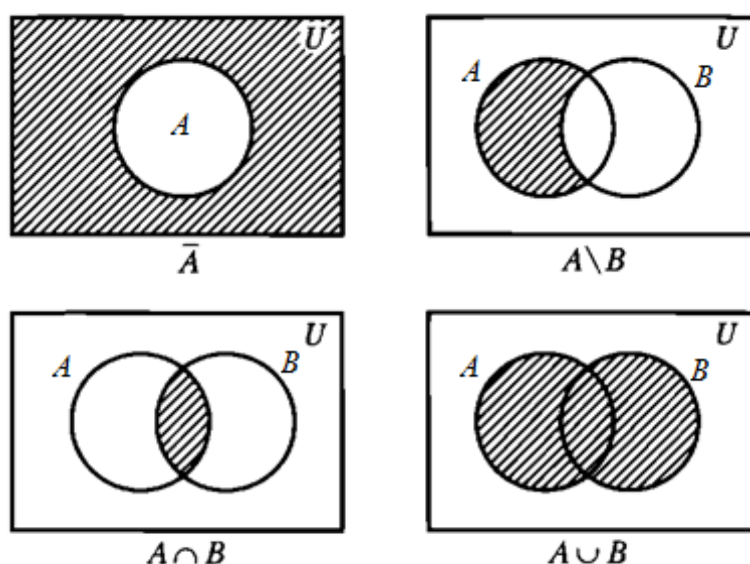


Рис. 1.1. Діаграми Венна основних операцій над множинами

Приклад 1.7. На *діаграмі Венна* зобразити множину $C \setminus \overline{A \cup B}$.

Розв'язання.

Зобразимо діаграми Венна для всіх операцій алгебри множин, які входять у формулу $C \setminus \overline{A \cup B}$, у порядку їх виконання (див. рис. 1.2). На правій діаграмі на рис. 1.3. зображена шукана множина.

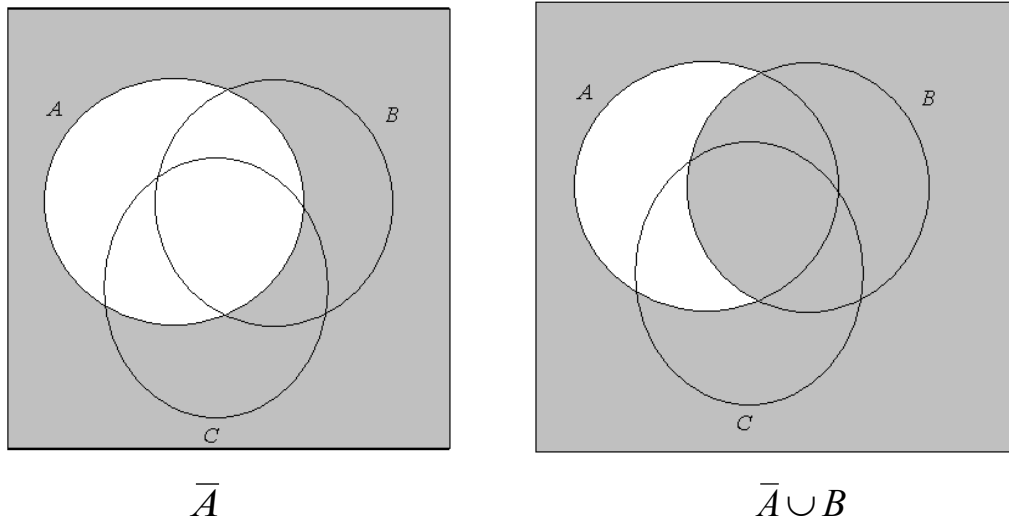


Рис. 1.2.

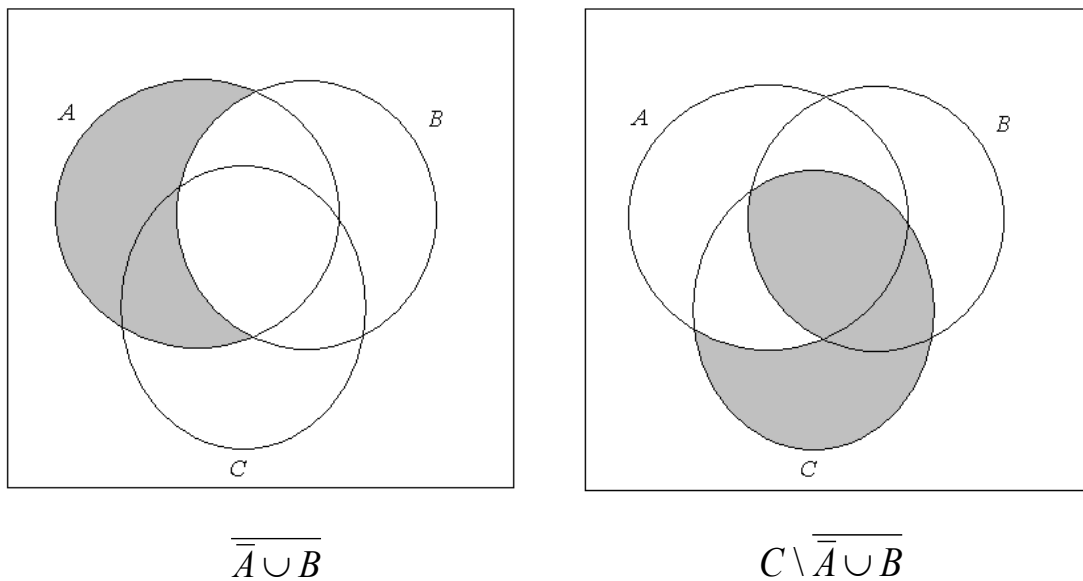


Рис. 1.3.

Приклад 1.8. Довести, що для довільних множин A , B та C справджується рівність $C \setminus \overline{A \cup B} = (B \cap C) \cup (C \setminus A)$.

Розв'язання.

Перший спосіб. Скористаємося діаграмами Ейлера-Венна. Для множини у лівій частині рівності відповідна їй діаграма зображена справа на рис. 1.3. Побудуємо діаграму для множини $B \cap C \cup (C \setminus A)$, як це показано на рис. 1.4–1.5.

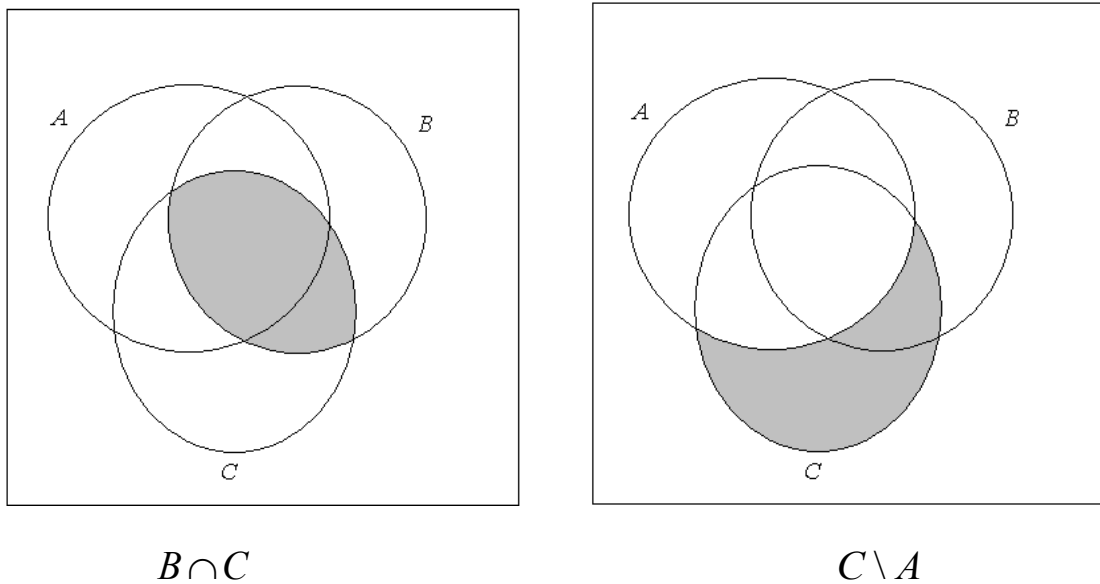
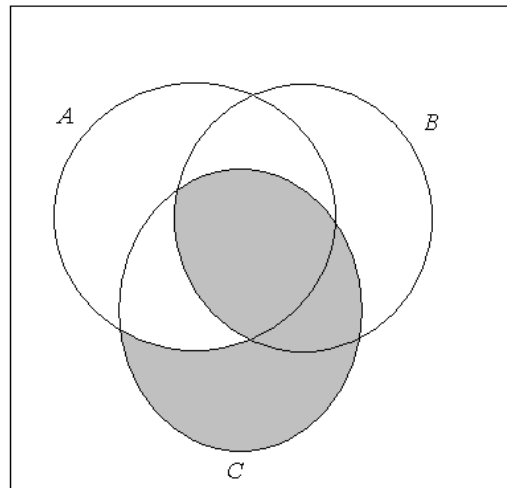


Рис. 1.4.

Рис. 1.5. Діаграма Ейлера-Венна множини $B \cap C \cup (C \setminus A)$.

Порівняємо діаграми, наведені на рис. 1.3 (справа) та рис. 1.5. Легко переконатися, що вони ідентичні. Тому множини $C \setminus \overline{A \cup B}$ та $B \cap C \cup (C \setminus A)$ рівні.

Другий спосіб. Використаємо інтуїтивний принцип об'ємності, згідно до якого для доведення потрібної рівності достатньо довести, що

$$C \setminus \overline{A \cup B} \subseteq B \cap C \cup (C \setminus A)$$

та

$$B \cap C \cup (C \setminus A) \subseteq C \setminus \overline{A \cup B}.$$

а) Доведемо перше включення. Нехай $x \in C \setminus \overline{A \cup B}$. Тоді

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \notin \overline{A \cup B}. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \in \overline{A \cup B}. \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \in \overline{A}. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \notin A. \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \in B. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \in B. \end{array} \right\} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in C \setminus A, \\ x \in C \cap B. \end{array} \right] \Rightarrow x \in B \cap C \cup (C \setminus A)$$

Таким чином ми показали, що довільний елемент x множини $C \setminus \overline{A \cup B}$ є елементом множини $B \cap C \cup (C \setminus A)$. Перше включення доведено.

б) Доведемо друге включення. Нехай $x \in B \cap C \cup (C \setminus A)$. Тоді

$$\left[\begin{array}{l} x \in C \cap B, \\ x \in C \setminus A. \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \in B. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \in B. \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \notin A. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \in \overline{A}. \end{array} \right\} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \in \overline{A \cup B}. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \notin A \cup B. \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \in B. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in C, \\ x \in B. \end{array} \right\} \end{array} \right] \Rightarrow x \in C \setminus \overline{A \cup B}.$$

Ми показали, що довільний елемент x множини $B \cap C \cup (C \setminus A)$ є елементом множини $C \setminus \overline{A \cup B}$. Тому друге включення доведено.

Отже, множини $C \setminus \overline{A \cup B}$ та $B \cap C \cup (C \setminus A)$ є рівними.

Приклад 1.9. Із 40 програмістів 18 володіють мовою Python, 19 — мовою C++, 21 — мовою Java. Відомо, що 10 програмістів знають одночасно Python і C++, 7 — Python і Java, 8 — C++ і Java. Троє програмістів не володіють жодною із мов Python, C++, Java. Знайти кількість програмістів, які одночасно знають усі три мови програмування.

Розв'язання. За універсальну множину U візьмемо множину тих 40 програмістів, про яких йде мова у задачі. Нехай P, C, J — множини програмістів, які володіють мовами програмування Python, C++ та Java відповідно, і нехай x — шукана кількість програмістів, які одночасно знають усі три мови.

Скористаємося діаграмами Ейлера-Венна. У кожній частині діаграми позначимо кількість елементів множини відповідної цій частині. Оскільки із 10 програмістів, які володіють і мовою Python, і мовою C++, x знає ще й мову Java, то $10 - x$ програмістів знають лише Python і C++ і не знають Java. Позначимо це число на тій частині діаграми на рис. 1.6, яка відповідає множині $(P \cup C) \setminus J$. Із застосуванням аналогічних міркувань отримуємо, що $7 - x$ програмістів знають лише мови Python і Java, $8 - x$ — лише мови C++ та Java.

Знайдемо тепер кількість програмістів, які володіють рівно однією із мов програмування Python, C++ та Java. Оскільки мову Python знає 18 програмістів, то кількість програмістів, які знають лише мову Python рівна

$$18 - (10 - x) - (7 - x) - x = 1 + x.$$

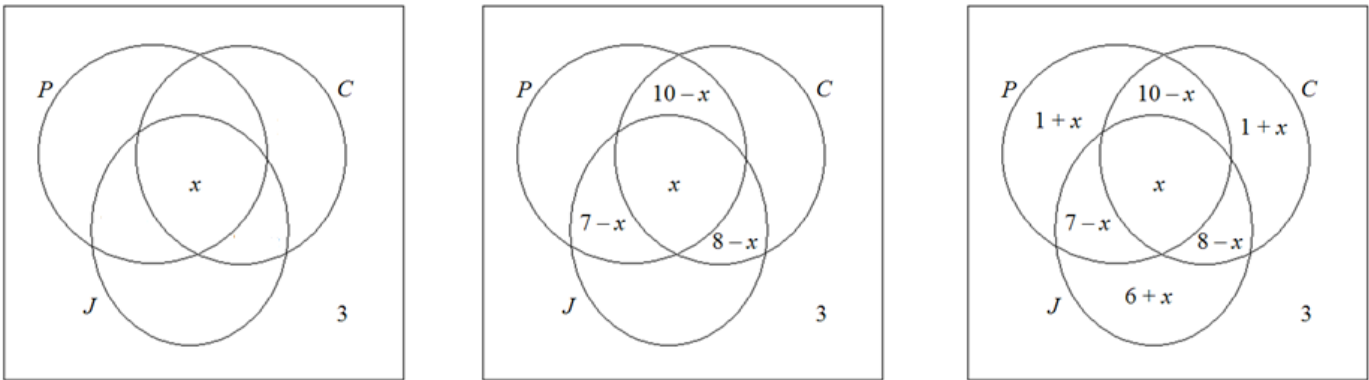


Рис 1.6. Діаграми до прикладу 1.9

Аналогічно отримуємо, що $19 - (10 - x) - (8 - x) - x = 1 + x$ програмістів знають лише мову C++, $21 - (7 - x) - (8 - x) - x = 6 + x$ програмістів — лише мову Java. Позначимо отримані числа на діаграмі (див. рис. 1.6).

Із урахуванням того, що загальна кількість програмістів рівна 40, ми можемо записати наступну рівність:

$$18 + (8 - x) + (1 + x) + (6 + x) + 3 = 40.$$

Перший доданок у лівій частині попередньої рівності відповідає кількості елементів множини P , останній — кількості програмістів, які не володіють жодною із мов. Після спрощень отримаємо $36 + x = 40$. Звідси $x = 4$.

1.6. Алгебра множин

Система $\mathcal{A}$ підмножин деякої універсальної множини U разом із заданими на ній операціями $\bar{}$, $\cap$, $\cup$ називається *алгеброю множин*, якщо вона замкнена відносно цих операцій (тобто, результат застосування операцій до елементів $\mathcal{A}$ також належить $\mathcal{A}$).

Приклади алгебр множин:

- 1) $\mathcal{A} = \{\emptyset, U\}$;
- 2) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(U)$;
- 3) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}$, $U = \{1, 2, 3\}$.

Основні закони алгебри множин:

- 1) Закони комутативності:

$$A \cap B = B \cap A,$$

$$A \cup B = B \cup A,$$

$$A \Delta B = B \Delta A.$$

- 2) Закони асоціативності:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C).$$

3) Закони ідемпотентності:

$$A \cap A = A,$$

$$A \cup A = A.$$

4) Закони дистрибутивності:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C),$$

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

5) Властивості універсальної множини:

$$\bar{U} = \emptyset,$$

$$A \cap U = A,$$

$$A \cup U = U,$$

$$A \setminus U = \emptyset,$$

$$A \Delta U = \bar{A}.$$

6) Властивості порожньої множини:

$$\bar{\emptyset} = U,$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset,$$

$$A \cup \emptyset = A,$$

$$A \setminus \emptyset = A, \emptyset \setminus A = \emptyset,$$

$$A \Delta \emptyset = A.$$

7) Властивості доповнення:

$$\overline{\bar{A}} = A,$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset,$$

$$A \cup \bar{A} = U,$$

$$A \setminus \bar{A} = A,$$

$$A \Delta \bar{A} = U.$$

8) Закони де Моргана:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B},$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

9) Властивості різниці:

$$A \setminus B = A \cap \bar{B},$$

$$A \setminus A = \emptyset,$$

$$U \setminus A = \bar{A}.$$

10) Властивості симетричної різниці:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B),$$

$$A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B),$$

$$\overline{A \Delta B} = \bar{A} \Delta B = A \Delta \bar{B},$$

$$A \Delta A = \emptyset.$$

Приклад 1.10. З використанням властивостей операцій довести, що у алгебрі множин виконуються наступні рівності:

а) $A \cup A \cap B = A$ (закон поглинання);

б) $A \cup \bar{A} \cap B = A \cup B$;

в) $\overline{\bar{A} \cup B \cup (C \setminus A)} = A \setminus B$.

Розв'язання.

а) Використаємо перший дистрибутивний закон та властивості універсальної множини:

$$A \cup A \cap B \stackrel{5}{=} (A \cap U) \cup (A \cap B) \stackrel{4}{=} A \cap (U \cup B) \stackrel{5}{=} A \cap U \stackrel{5}{=} A.$$

Над рівностями у попередньому рядку вказані номери законів алгебри множин, які використовуються при переході від множини у лівій частині рівності до множини у правій частині.

б) Використаємо другий дистрибутивний закон, властивості доповнення та універсальної множини:

$$A \cup \bar{A} \cap B \stackrel{4}{=} (A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B) \stackrel{7}{=} U \cap (A \cup B) \stackrel{5}{=} A \cup B.$$

в) Використаємо закони де Моргана, закон асоціативності, комутативності та дистрибутивності, властивості операції віднімання та закон ідемпотентності:

$$\begin{aligned}\overline{A \cup B \cup (C \setminus A)} &\stackrel{9}{=} \overline{A \cap B \cup (C \setminus A)} \stackrel{2,8}{=} \overline{A \cap B} \cap \overline{C \setminus A} \stackrel{1,9}{=} \overline{B} \cap A \cap (\overline{C} \cup A) \stackrel{4}{=} \\ &\stackrel{4}{=} \overline{B} \cap (A \cap \overline{C} \cup A \cap A) \stackrel{3}{=} \overline{B} \cap (A \cap \overline{C} \cup A) \stackrel{a)}{=} \overline{B} \cap A \stackrel{8}{=} A \setminus B.\end{aligned}$$

1.7. Потужність множини

Множина називається *скінченною*, якщо вона містить скінченну кількість елементів. У протилежному випадку множина називається *нескінченною*.

Кількість елементів скінченної множини називається *потужністю множини*.

Потужність множини A позначається $|A|$.

Теорема 1.2. Якщо A , B та C — скінченні множини, то

$$a) |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|;$$

$$б) |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Доведення.

а) Нехай

$$A \cap B = \{c_1, \dots, c_k\}, \quad A = \{a_1, \dots, a_l, c_1, \dots, c_k\}, \quad B = \{b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_k\},$$

де $a_i \notin B$, $i = 1, \dots, l$, $b_j \notin A$, $j = 1, \dots, m$. Тоді

$$A \cup B = \{a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_k\}.$$

Тому

$$|A \cup B| = l + m + k = (l + k) + (m + k) - k = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

що й треба було довести.

б) Використаємо результат пункту а):

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|) = \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.\end{aligned}$$

Приклад 1.11. Відомо, що $|A| = 7$, $|B| = 8$, $|A \cup B| = 11$. Знайти $|A \Delta B|$.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Розв'язання. З формули пункту а) випливає, що $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 7 + 8 - 11 = 4$. Оскільки $A \cup B = (A \Delta B) \cup (A \cap B)$ і множини $A \Delta B$ та $A \cap B$ мають порожній перетин, то $|A \cup B| = |A \Delta B| + |A \cap B|$. Тому $|A \Delta B| = 11 - 4 = 7$.

Приклад 1.12. Розв'язати задачу про програмістів (приклад 1.9) за допомогою формули пункту б) теореми 1.2.

Розв'язання. Запишемо умову співвідношення із умови задачі із використанням теоретико-множинних позначень:

$$|U| = 40, |P| = 18, |C| = 19, |J| = 21, |P \cap C| = 10, |P \cap J| = 7, |C \cap J| = 8,$$

$$|\overline{P \cup C \cup J}| = 3.$$

З останньої рівності випливає, що $|P \cup C \cup J| = 40 - 3 = 37$.

Для обчислення $|P \cap C \cap J|$ скористаємося теоремою 1.2:

$$|P \cup C \cup J| = |P| + |C| + |J| - |P \cap C| - |P \cap J| - |C \cap J| + |P \cap C \cap J|.$$

$$37 = 18 + 19 + 21 - 10 - 7 - 8 + |P \cap C \cap J|.$$

$$37 = 58 - 25 + |P \cap C \cap J|.$$

$$|P \cap C \cap J| = 37 - 33 = 4.$$

Відповідність між елементами множин A та B називається *взаємно однозначною*, якщо кожному елементу множини A відповідає *єдиний елемент* множини B і кожному елементу множини B відповідає *єдиний елемент* множини A .

Приклад 1.13. Відображення $f: x \rightarrow 3x + 1$ встановлює взаємно однозначну відповідність між елементами множин $A = \{1, 2, 5\}$ та $B = \{4, 7, 16\}$.

Дві множини A та B називаються *рівнопотужними* (еквівалентними), якщо між їх елементами можна встановити взаємно однозначну відповідність. Той факт, що множини A та B є рівнопотужними, будемо записувати у вигляді $|A| = |B|$.

Відношення рівнопотужності має наступні властивості:

1. $|A| = |A|$.
2. Якщо $|A| = |B|$, то $|B| = |A|$.
3. Якщо $|A| = |B|$ і $|B| = |C|$, то $|A| = |C|$.

Приклад 1.14. Множини $A = \{1, 2, \dots, n\}$ та $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ є рівнопотужними. Відповідність встановлює відображення $f: k \rightarrow a_k$.

Скінченні множини рівнопотужні тоді і тільки тоді, коли вони містять однакову кількість елементів.

Приклад 1.15. Множина парних цілих чисел рівнопотужна множині цілих чисел. Відповідність встановлює відображення $f: 2n \rightarrow n$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Множина A називається *зліченною*, якщо вона є рівнопотужною множині натуральних чисел.

Теорема 1.3. Множина цілих чисел є зліченною.

Доведення. Покажемо, що множина натуральних чисел рівнопотужна множині цілих чисел. Побудуємо відображення $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ наступним чином:

$$f(1)=0, f(2)=1, f(3)=-1, f(4)=2, f(5)=-2, f(6)=3, f(7)=-3, \dots$$

Легко переконатися, що $f(2k-1)=-(k-1)$, $f(2k)=k$, $k=1,2,\dots$ і відображення f є взаємно однозначним і обернене до нього відображення $g:\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{N}$ визначається наступним чином:

$$g(n)=2n, \text{ якщо } n>0 \text{ та } g(n)=1-2n, \text{ якщо } n\leq 0.$$

Отже, множини $\mathbb{N}$ та $\mathbb{Z}$ є рівнопотужними.

Теорема 1.4. Множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є зліченною.

Доведення. Висотою раціонального дробу $\frac{a}{b}$, ($a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}$) назовемо число $|a|+b$.

Запишемо раціональні числа у порядку зростання висот відповідних їм правильних нескоротних дробів:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{-3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{-4}{1}, \dots$$

Кожне раціональне число зустрінеється у цій послідовності рівно один раз. Тому елементи множини $\mathbb{Q}$ можна пронумерувати за допомогою натуральних чисел. Встановлена за допомогою нумерації відповідність є взаємно однозначною. Отже, множина раціональних чисел — зліченна.

Теорема 1.5. Для множин справджуються наступні твердження:

- а) у кожній нескінченній множині є зліченна підмножина.
- б) будь-яка підмножина зліченної множини або скінченна, або зліченна.
- в) об'єднання скінченної та зліченної множин є зліченною множиною.
- г) об'єднання скінченної кількості злічених множин — зліченна множина.

Теорема 1.6. Множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ не є зліченною.

Множина $\mathbb{R}$ та будь-яка рівнопотужна їй множина називається *континуальною*.

1.8. Задачі до розділу

1.8.1. Множини. Операції над множинами

1. Перевірити, чи:

- а) $\{1,4,5\}=\{5,1,4\}$;
- б) $\emptyset=\{\emptyset\}$; $\emptyset\subset\{\emptyset\}$; $\emptyset\subset\emptyset$; $\emptyset\subseteq\emptyset$;
- в) $\{\{a,b\},\{c,d,e\}\}=\{a,b,c,d,e\}$; $\{a,c,e\}\subset\{a,\{b,c\},d,e\}$.

2. Перевірити, чи:

- а) $\{1,3\}\in\{3,2,4,5,1\}$;
- б) $a=\{a\}$; $a\subseteq\{a\}$; $\emptyset\subset\{a\}$; $(\{a\}\setminus\emptyset)\subset(\{a\}\cup\emptyset)$;

- в) для довільних множин A та B $A \cap B \subset A \cup B$.
3. Знайти $A \Delta (\bar{B} \cap C)$ за умови, що $A = \{x - 2 \mid x \in U, 5x + 1 - \text{квадрат цілого числа}\}$,
 $B = \{x \mid x^2 > 60\}$, $C = \{x \mid (3x - 1) - \text{просте число}\}$, $U = \{1, 2, \dots, 20\}$.
4. Нехай $U = \{5, 6, \dots, 30\}$ — універсальна множина, $A = \{5, 7, 8, 10, 11, 14, 20, 21, 22, 26\}$,
 $B = \{2x - 7 \mid x - \text{непарне ціле число}\}$, $C = \{x \mid x^2 + 1 - \text{просте число}\}$. Вказати перелік елементів множини $D = B \Delta (\bar{A} \cup C)$.
5. На діаграмі Венна зобразити множини:
- а) $\overline{A \Delta C} \setminus (B \cup A)$;
 б) $(\bar{A} \cap B) \cup (B \Delta C)$.
6. Довести, що для довільних множин A , B та C справджуються рівності:
- а) $\bar{C} \Delta ((A \cup \bar{B}) \cap \bar{C}) = B \setminus (A \cup C)$;
 б) $C \setminus \overline{A \cup B} = B \cap C \cup (C \setminus A)$.
7. Нехай A — множина трикутників, B — множина чотирикутників, C — множина правильних багатокутників, D — множина багатокутників, які мають принаймні один прямий кут, E — множина рівносторонніх багатокутників. Вказати множини:
- а) $((D \cap A) \setminus (C \cap B)) \Delta (A \cap E)$;
 б) $\overline{B \cap (C \cup D)} \cap E \cap B$.
8. Нехай S — множина усіх квадратів, R — множина усіх прямокутників, L — множина усіх ромбів, P — множина усіх правильних багатокутників площини. Вказати множини
- а) $(L \setminus S) \cap (R \setminus \bar{P})$;
 б) $(P \setminus S) \cup (R \setminus \bar{L})$.
9. Довести, що у алгебрі множин виконуються наступні рівності:
- а) $\bar{A} \setminus B = \overline{A \cup \bar{A} \cap B}$;
 б) $(B \setminus A) \cup \bar{A} = \overline{C \setminus \bar{A}} \setminus A$.
10. Довести, що у алгебрі множин виконуються наступні рівності:
- а) $\bar{A} \cup B \cup (C \setminus A) = \overline{A \setminus B}$;
 б) $(A \Delta (A \cap \bar{B})) \cap (\bar{B} \Delta \bar{C}) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

1.8.2. Потужність множини

1. Нехай $A_1 = \{2, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12\}$, $A_2 = \{x \mid x^2 : 12\}$. Знайти $|\mathcal{P}(A_1 \cap \bar{A}_2)|$.

2. Нехай $U = \{3, 4, \dots, 15\}$, $A_1 = \{5, 7, 9, 11, 12, 14\}$, $A_2 = \{x \mid (x^2 - x) : 6\}$. Знайти кількість власних підмножин множини $A_1 \Delta A_2$.
3. У групі вчиться 25 студентів. Відомо, що 5 студентів отримали п'ятірку з математики, 8 — з програмування, 7 — з фізики. Троє студентів отримали п'ятірку з математики і програмування, 4 — з програмування та фізики, 2 — з математики та фізики. Один студент отримав п'ятірки з усіх трьох дисциплін. Знайти кількість студентів, які:
 - а) не отримали жодної п'ятірки;
 - б) отримали рівно одну п'ятірку.
4. Троє з 23 мандрівників не були жодного разу ні у Парижі, ні у Лондоні, ні у Римі, 12 було у Лондоні, 10 — у Римі, 4 — тільки у Парижі, 4 — і у Парижі і у Лондоні, 6 — і у Лондоні і у Римі, 5 — і у Парижі і у Римі. Знайти кількість мандрівників, які були в усіх трьох містах.
5. Нехай $|U| = 50$, $|A| = 20$, $|\overline{A \cup B}| = 15$, $|A \cap B| = 11$. Знайти:
 - а) $|B \setminus A|$;
 - б) $|A \cup \overline{B}|$.
6. Нехай $|U| = 60$, $|A| = 25$, $|\overline{A \cap B}| = 45$, $|B \setminus A| = 18$. Знайти:
 - а) $|A \cup B|$;
 - б) $|B \Delta \overline{A}|$.

1.8.3. Метод математичної індукції

1. Довести тотожності:

$$\text{а) } 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$\text{б) } (n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (n+n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1).$$

2. Довести, що для довільного натурального n число $n^3 - 7n$ ділиться на 6.
3. Довести, що для довільного натурального n число $6^{2n-1} + 1$ ділиться на 7.
4. Довести, що число $2^{2^n} + 1$ закінчується цифрою 7 ($n > 1$).
5. Довести, що $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{n-1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$).
6. Знайти суму $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-2)(n-1)n}$ за умови, що $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.

1.9. Додаткові задачі

1. Довести, що число $\sqrt[3]{5} + \sqrt{7}$ є ірраціональним.
2. Довести ірраціональність числа $\sqrt{2}$, не підносячи до квадрату жодну рівність.
3. Знайти суму квадратів n перших чисел Фібоначчі.
4. На треку розташовано кілька однакових гоночних машин. Відомо, що сумарний запас палива усіх машин достатній для того, щоб одна машина подолати коло. Довести, що знайдеться машина, яка зможе проїхати усе коло, доливаючи собі паливе від тих машин, повз які вона проїжджає (вважати, що рух по колу відбувається за годинниковою стрілкою).
5. Елементи послідовності $a_1, a_2, \dots, a_n$ визначаються таким чином:

$$a_1 = 1, a_{k+1} = 5a_k + \sqrt{24a_k^2 + 1}, k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Довести, що усі числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ натуральні.

6. Довести, що довільні n квадратів можна розрізати на частини таким чином, що з отриманих частин можна скласти новий квадрат.
7. Не використовуючи діаграми Венна, перевірити, чи є одна із двох множин $(A \setminus C) \cup \cup B \cap (C \setminus A)$ та $A \Delta \overline{B \cup C}$ підмножиною іншої.
8. Нехай A — множина трикутників, B — множина чотирикутників, C — множина правильних багатокутників, D — множина багатокутників, які мають принаймні один прямий кут, E — множина рівносторонніх трикутників. Вказати множину $((D \cap A) \Delta E) \setminus (A \cap C)$.
9. З використанням законів алгебри множин довести, що

$$(A \Delta (A \cap \overline{B})) \cap (\overline{B} \Delta \overline{C}) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C).$$

10. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} A \cap X = B, \\ A \cup X = C, \end{cases}$$

де $B \subseteq A \subseteq C$.

11. Довести, що множина $\mathcal{A}$ підмножин деякої універсальної множини U , яка містить множину U , є алгеброю множин, якщо вона є замкненою відносно операцій:
 - а) $\cap, \Delta$;
 - б) $\cup, \Delta$;
 - в) $\setminus$.
12. Навести та обґрунтувати формулу для $|A \Delta B \Delta C|$, де A, B та C — скінченні множини.
13. Яких шестицифрових чисел більше: тих, у яких кожна наступна цифра більша за попередню (рахуючи зліва праворуч), чи тих, у яких кожна наступна цифра не менша за попередню, та остання цифра не перевищує 4?

14. Нехай n — ціле число, A_n — множина цілих розв'язків рівняння $x^2 + y^2 = n$, B_n — множина цілих розв'язків рівняння $x^2 + y^2 = 2n$. Порівняйте потужності множини A_n та B_n .
15. Вказати явний аналітичний вираз для номера раціонального дробу $\frac{a}{b}$, який отримує цей дріб у доведенні теореми 1.4.
16. Нехай A — деяка непорожня множина, $\mathcal{B}$ — множина усіх її скінченних підмножин, які містять парну кількість елементів, $\mathcal{C}$ — множина усіх її скінченних підмножин, які містять непарну кількість елементів. Довести, що множини $\mathcal{B}$ та $\mathcal{C}$ рівнопотужні.
17. Нехай $\mathcal{A}$ — деяка алгебра підмножин скінченної універсальної множини U . Довести, що
- $\{\emptyset, U\} \subseteq \mathcal{A}$;
 - існує таке $k \in \mathbb{N}$, що $|\mathcal{A}| = 2^k$.
18. Довести, що наступні множини є скінченними або зліченими:
- множина трикутників площини, які не перетинаються між собою;
 - множина призм у просторі, які не мають спільних точок.
19. Довести, що континуальними множинами є:
- відрізок $[0, 1]$;
 - інтервал (a, b) , де $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$;
 - одиничний квадрат.
20. Довести, що жодна множина A не є рівнопотужною множині $\mathcal{P}(A)$.

2. БІНАРНІ ВІДНОШЕННЯ

2.1. Декартів добуток множин

Декартовим добутком множин A та B називається множина $A \times B$ усіх упорядкованих пар, перша координата (компонента) яких належить множині A , а друга — множині B . Тобто, $A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$. При цьому порядок множників є суттєвим.

Приклад 2.1. Знайти $A \times B$, якщо $A = \{1, 3, 8\}$, $B = \{x, y\}$.

Розв'язання. $A \times B = \{(1, x), (1, y), (3, x), (3, y), (8, x), (8, y)\}$.

Поняття декартового добутку поширюється на довільну скінченну кількість множин:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Елементи декартового добутку n множин називаються *кортежами* довжини n (впорядкованими n -ками).

Приклад 2.2. Знайти $B \times A \times B$, якщо $A = \{1, 3, 8\}$, $B = \{x, y\}$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку $B \times A$.

$$B \times A = \{(x, 1), (x, 3), (x, 8), (y, 1), (y, 3), (y, 8)\}.$$

Тоді

$$B \times A \times B = \{(x, 1, x), (x, 1, y), (x, 3, x), (x, 3, y), (x, 8, x), (x, 8, y), \\ (y, 1, x), (y, 1, y), (y, 3, x), (y, 3, y), (y, 8, x), (y, 8, y)\}.$$

Властивості декартового добутку множин:

- 1) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$;
- 2) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
- 3) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;
- 4) якщо $A \subseteq B$, то $A \times C \subseteq B \times C$;
- 5) якщо $A \neq B$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, то $A \times B \neq B \times A$;
- 6) якщо множини A та B — скінченні, то $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ — комбінаторне правило множення.
- 7) якщо множини A та B — зліченні, то множина $A \times B$ також є зліченною.

2.2. Поняття відношення. Задання бінарних відношень

Бінарним відношенням, визначеним на множинах A та B , називається довільна підмножина декартового добутку цих множин.

Той факт, що елементи $a \in A$ та $b \in B$ перебувають у бінарному відношенні R позначається як aRb або $(a,b) \in R$. Якщо відповідні елементи не перебувають у відношенні R , то це записується як $a\bar{R}b$ або $(a,b) \notin R$.

Множини A та B називаються *базисними множинами* бінарного відношення. Бінарне відношення називається *однорідним*, якщо його базисні множини співпадають.

Приклад 2.3. Розглянемо R — бінарне відношення подільності, визначене на множинах $A = \{3,5,6\}$ та $B = \{1,2,4\}$. Вважаємо, що

xRy тоді і тільки тоді, коли $x : y$ (x націло ділиться на y).

Тоді $R = \{(3,1), (5,1), (6,1), (6,2)\}$. Так як $A \neq B$, то відношення R — неоднорідне.

Приклад 2.4. Однорідним є бінарне відношення R "навчатися у одній групі", визначене на множині студентів УжНУ.

xRy тоді і тільки тоді, коли студенти x та y — одногрупники.

n -арним відношенням, визначеним на множинах $A_1, \dots, A_n$, називається довільна підмножина декартового добутку цих множин.

Якщо $n = 1$, то маємо *унарне* відношення, якщо $n = 2$ — бінарне відношення, якщо $n = 3$ — *тернарне* відношення.

Приклад 2.5. Підприємства, які займаються дизайном інтер'єру приміщень, використовують продукцію кількох фірм. Для аналізу необхідно скласти "відношення" реальних комбінацій трьох параметрів: назви фірми, місця її знаходження (місто), виду продукції, що пропонується.

Нехай відомо, що АП "Orion" (Одеса) продає меблі, ТОВ "День" (Харків) продає світильники, ПП "Sit" (Одеса) торгує меблями та світильниками, ТОВ "House" (Харків) продає світильники та матеріали.

В цьому відношенні беруть участь три множини:

Фірми = {АП "Orion", ТОВ "День", ПП "Sit", ТОВ "House"}.

Міста = {Одеса, Харків}.

Продукція = {меблі, світильники, матеріали}.

Це тернарне відношення можна формально зобразити списком елементів:

{(АП "Orion", Одеса, меблі), (ТОВ "День", Харків, світильники),
(ПП "Sit", Одеса, меблі), (ПП "Sit", Одеса, світильники),
(ТОВ "House" Харків, світильники), (ТОВ "House", Харків, матеріали)}.

Оскільки n -арні відношення є множинами, то для їх задання можна використовувати ті самі способи, що і для множин. Крім того, якщо бінарні відношення задані на скінченних множинах, то їх можна задавати за допомогою *матриць відношень* та *діаграм (графів)* відношень.

При матричному способі задання відношення елементам множини A ставляться у відповідність рядки матриці відношення $M(R)$, елементам множини B — стовпці. Якщо пара (a, b) перебуває у відношенні R , то на перетині відповідного їм рядка та стовпця матриці записується одиниця, інакше — нуль.

При графічному способі задання відношень елементам множин A та B ставляться у відповідність точки на площині. Якщо пара (a, b) перебуває у відношенні, то точка, яка відповідає елементу a , з'єднується напрямленим відрізком із точкою, яка відповідає елементу b .

Приклад 2.6. Відношення $R = \{(a, 1), (a, 2), (b, 4), (d, 1), (f, 4)\}$ визначене на множинах $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ та $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Задати його за допомогою матриці та діаграми.

Розв'язання. Матриця відношення R має вигляд

$$M(R) = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Діаграму відношення наведено на рис. 2.1.

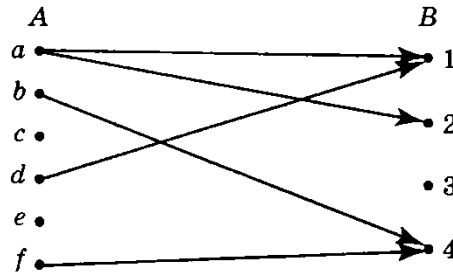


Рис. 2.1. Граф відношення R

Множини $\text{pr}_1 R = \{x \mid (x, y) \in R\}$ та $\text{pr}_2 R = \{y \mid (x, y) \in R\}$ відповідно називаються *першою* та *другою проекціями* відношення R .

Для відношення R із попереднього прикладу $\text{pr}_1 R = \{a, b, d, f\}$, $\text{pr}_2 R = \{1, 2, 4\}$.

Множина $R(C) = \{y \mid (x, y) \in R, x \in C\}$ називається *перерізом* бінарного відношення R за підмножиною C першої базисної множини A .

Для відношення R із попереднього прикладу $R(\{a, d\}) = \{1, 2\}$.

Переріз $R(\{a\})$ називається *перерізом бінарного відношення за елементом a* . Для одноелементних перерізів використовують позначення $R(a)$.

Для відношення R із попереднього прикладу $R(b) = \{4\}$, $R(c) = \emptyset$.

Множина усіх одноелементних перерізів бінарного відношення R , визначеного на множинах A та B , називається *фактор-множиною* множини B за відношенням R і позначається B / R . Тобто, $B / R = \{R(x) \mid x \in A\}$.

Наприклад, для відношення R із діаграмою, наведеною на рис. 2.1,

$$R(a) = \{1, 2\}, R(b) = R(f) = \{4\}, R(c) = R(e) = \emptyset, R(d) = \{1\}.$$

Тому $B / R = \{\{1, 2\}, \{4\}, \{1\}, \emptyset\}$.

У випадку однорідних бінарних відношень на діаграмі відношення зображується лише одна множина точок, як це показано на рис. 2.2. Діаграмі, зображений на рис. 2.2, відповідає однорідне бінарне відношення

$$R = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2), (a_4, a_1), (a_4, a_2), (a_4, a_3), (a_4, a_4), (a_5, a_2), (a_5, a_3)\},$$

визначене на множині $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$.

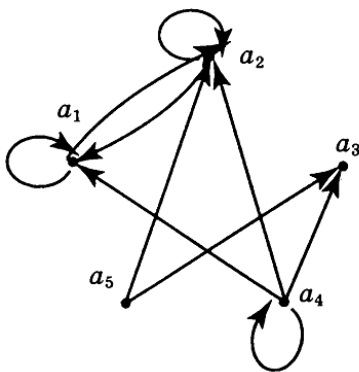


Рис. 2.2. Приклад діаграми однорідного відношення

2.3. Операції над бінарними відношеннями

Над відношеннями можна виконувати усі теоретико-множинні операції. Крім того, вводяться операції знаходження оберненого відношення та композиції відношень.

Бінарне відношення $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$, визначене на множинах B та A , називається *оберненим* до відношення $R \subseteq A \times B$.

Наприклад, для відношення, діаграма якого наведена на рис. 2.1, $R^{-1} = \{(1, a), (2, a), (4, b), (1, d), (4, f)\}$, а для бінарного відношення " $<$ ", визначеного на довільній числовій множині, оберненим буде відношення " $>$ ".

Бінарне відношення

$$S \circ R = \{(x, z) \mid \text{існує таке } y \in B, \text{ що } (x, y) \in R, (y, z) \in S\} \subseteq A \times C$$

називається *добуток* (композицією) відношень $R \subseteq A \times B$ та $S \subseteq B \times C$.

Приклад 2.7. Знайти добуток бінарних відношень R та S , діаграми яких зображені на рис. 2.3.

Розв'язання. $S \circ R = \{(a, x), (a, y), (d, x)\}$.

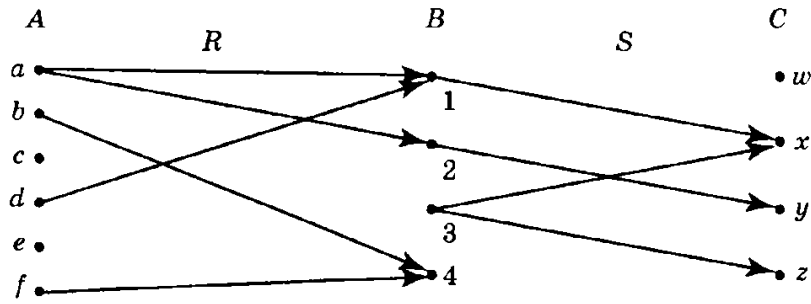


Рис. 2.3. Діаграми відношень R та S

Приклад 2.8. Нехай $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{23, 24, 25, 26, 27\}$, $C = \{a, b, c, d, e, f\}$, бінарне відношення R визначене на множинах A та B наступним чином: $x R y$ тоді і тільки тоді, коли y націло ділиться на x , S — бінарне відношення між елементами множин B та C : $S = \{(23, f), (24, b), (25, d), (26, d), (27, a), (27, e)\}$. Знайти проекції відношення $T = S \circ R$ та вказати $T^{-1}(\{a, c, d, f\})$.

Розв'язання. Задамо бінарне відношення R переліком пар елементів, які перебувають у цьому відношенні:

$$R = \{(2, 24), (2, 26), (3, 24), (3, 27), (4, 24), (5, 25), (6, 24), (8, 24), (9, 27)\}.$$

Тоді з використанням рис. 2.4 отримаємо:

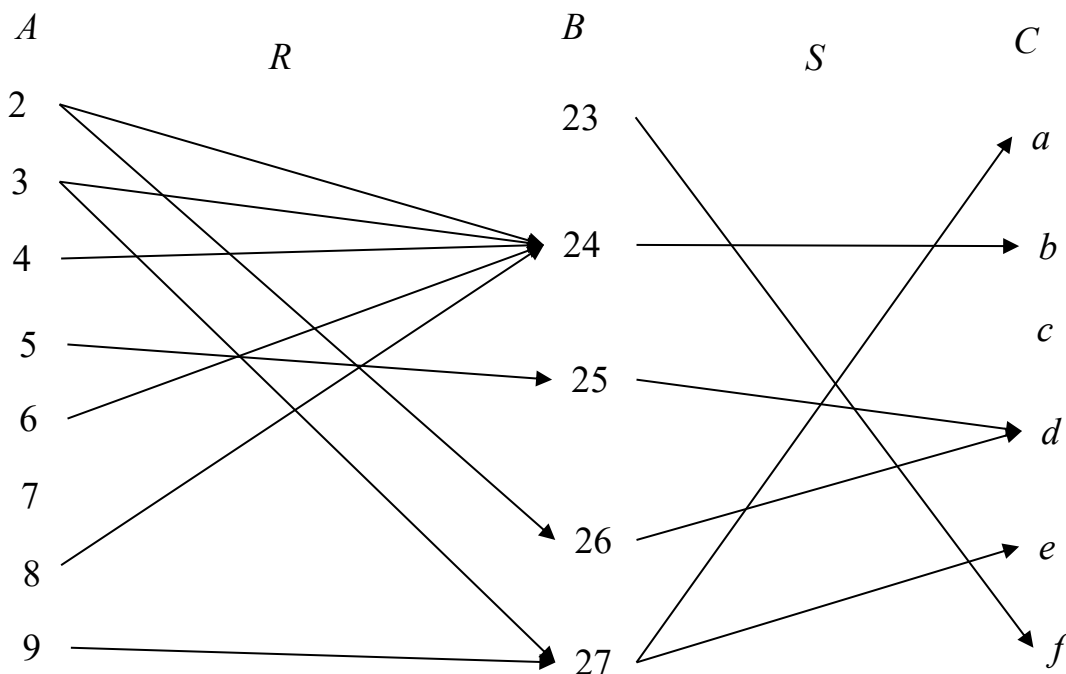


Рис. 2.4. Діаграма відношень R та S .

$$T = \{(2, b), (2, d), (3, a), (3, b), (3, e), (4, b), (5, d), (6, b), (8, b), (9, a), (9, e)\}.$$

Тому

$$\text{pr}_1 T = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}, \text{pr}_2 T = \{a, b, d, e\}.$$

Вкажемо перелік елементів відношення T^{-1} :

$$T^{-1} = \{(b, 2), (d, 2), (a, 3), (b, 3), (e, 3), (b, 4), (d, 5), (b, 6), (b, 8), (a, 9), (e, 9)\}.$$

Тоді $T^{-1}(\{a, c, d, f\}) = \{2, 3, 5, 9\}$.

2.4. Властивості однорідних бінарних відношень

Надалі будемо розглядати лише *однорідні бінарні відношення*.

Бінарне відношення $I_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ називається *відношенням ідентичності* на множині A (відношенням *тотожності*, *діагоналлю* множини A).

Бінарне відношення R називається *рефлексивним* на множині A , якщо для кожного $x \in A$ має місце xRx , тобто кожний елемент множини A перебуває у відношенні R сам із собою.

Наприклад, відношення "=", " $\leq$ " рефлексивні на множині дійсних чисел, оскільки для всіх $a \in \mathbb{R}$ $a = a$, $a \leq a$, відношення " $\parallel$ " (паралельність прямих) є рефлексивним на множині усіх прямих площини, а відношення " $\neq$ ", "<" та " $\perp$ " не є рефлексивними на тих самих множинах.

Бінарне відношення є рефлексивним, якщо на його діаграмі кожна вершина з'єднана "петлею" із самою собою. Якщо відношення R — рефлексивне, то $R \subseteq R^2$.

Наприклад, рефлексивним є відношення, діаграма якого наведена на рис. 2.5.

Бінарне відношення, діаграма якого наведена на рис. 2.2 не є рефлексивним, оскільки при вершинах a_3 та a_5 відсутні петлі.

Критерієм (необхідною і достатньою умовою) рефлексивності є умова $I_A \subseteq R$.

Бінарне відношення R називається *антирефлексивним* (*іррефлексивним*) на множині A , якщо для жодного $x \in A$ не має місце xRx .

Наприклад, відношення " $\neq$ ", "<" та " $\perp$ " — антирефлексивні.

Критерієм антирефлексивності є умова $I_A \cap R = \emptyset$.

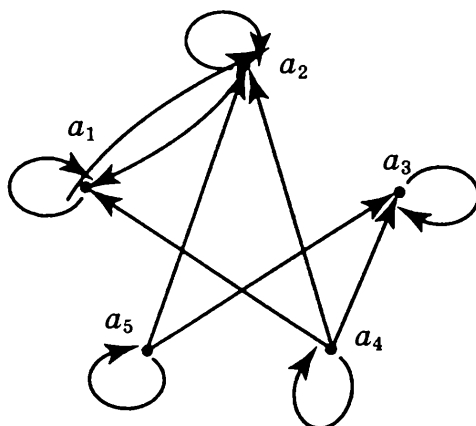


Рис. 2.5. Рефлексивне бінарне відношення

Бінарне відношення R називається *симетричним* на множині A , якщо для довільних $x, y \in A$ з того, що xRy випливає, що yRx .

Наприклад, відношення рівності та подібності на множині трикутників площини, відношення "навчатися у одній групі" — симетричні.

Відношення " $\leq$ " не є симетричним, оскільки якщо $a \leq b$ і $a \neq b$, то нерівність $b \leq a$ не виконується.

Бінарне відношення, діаграма якого наведена на рис. 2.6, є симетричним.

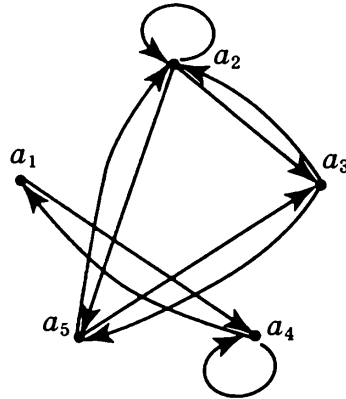


Рис. 2.6. Приклад діаграми симетричного бінарного відношення

Критерієм симетричності є виконання рівності $R^{-1} = R$.

Бінарне відношення R називається *асиметричним* на множині A , якщо для довільних (необов'язково різних) $x, y \in A$ з того, що $x R y$ випливає, що не виконується $y R x$ ($x R y \Rightarrow y \bar{R} x$).

Приклад асиметричного відношення — відношення " $>$ " на множині $\mathbb{R}$.

Умова $R \cap R^{-1} = \emptyset$ може використовуватися у якості *критерію асиметричності*.

Бінарне відношення R називається *антисиметричним* на множині A , якщо для довільних $x, y \in A$ з того, що $x \neq y$ та $x R y$ випливає, що не виконується $y R x$ (з $x R y$ та $y R x$ випливає, що $x = y$).

Кожне асиметричне бінарне відношення є антисиметричним, але не навпаки. Наприклад, відношення " $\geq$ " є антисиметричним, але воно не є асиметричним (умова асиметричності порушується для пар однакових елементів).

Умова $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$ може використовуватися у якості *критерію антисиметричності*.

Бінарне відношення R називається *транзитивним* на множині A , якщо для довільних $x, y, z \in A$ з того, що $x R y$ та $y R z$ випливає, що $x R z$.

Умова $R^2 \subseteq R$ може використовуватися у якості *критерію транзитивності*. Рефлексивне відношення R є транзитивним тоді і тільки тоді, коли $R^2 = R$.

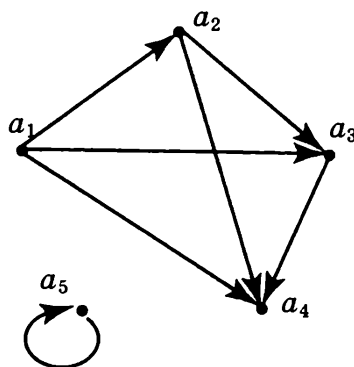


Рис. 2.7. Приклад діаграми транзитивного відношення

Приклад 2.9. Відношення " $=$ ", " $>$ ", " $<$ ", " $\geq$ ", " $\leq$ " є транзитивними, а відношення " $\perp$ " не є транзитивним.

Бінарне відношення R називається *повним* (зв'язним, лінійним) на множині A , якщо для довільних відмінних один від одного $a \in A, b \in A$ виконується хоча б одна з умов aRb або bRa . Критерій повноти — умова $\bar{I}_A \subseteq R \cup R^{-1}$.

Наприклад, відношення " $\leq$ " є повним, а відношення " $\subseteq$ " — ні, оскільки $\{1,2\} \not\subseteq \{3\}$, $\{3\} \not\subseteq \{1,2\}$.

Приклад 2.10. Встановити властивості однорідного бінарного відношення $R = \{(x, y) \mid |x - y| \leq 1\}$, заданого на множині дійсних чисел.

Розв'язання. Оскільки $|x - x| = 0 < 1$, то кожне дійсне число перебуває у відношенні R само із собою. Тому відношення R є рефлексивним, а отже не є антирефлексивним.

Оскільки $|x - y| = |y - x|$, то з того, що $|x - y| \leq 1$ випливає, що $|y - x| \leq 1$. Отже, відношення R є симетричним, а отже не є ні асиметричним, ні антисиметричним (відповідні властивості не виконуються, наприклад, для пари $(1, 0)$).

Оскільки $(0, 1) \in R$ та $(1, 2) \in R$, але $(0, 2) \notin R$, то відношення R не є транзитивним.

Оскільки $(0, 2) \notin R$, $(2, 0) \notin R$, то відношення не є повним.

Приклад 2.11. Задати за допомогою матриці яке-небудь мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення R на множині $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке не є антирефлексивним, не є симетричним та не є транзитивним. Знайти першу та другу проекції відношення $R \cap R^2$ та вказати фактор-множину множини A за відношенням $S = R \cup R^2$.

Розв'язання. Оскільки бінарне відношення R має бути несиметричним, то повинна існувати пара елементів множини A , яка задовольняє умови $(x, y) \in R$ та $(y, x) \notin R$. Оскільки відношення має бути нетранзитивним, то має існувати дві пари елементів

$(x, y) \in R$ та $(y, z) \in R$, такі, що $(x, z) \notin R$. Цим умовам задовольняє, наприклад, відношення $R' = \{(a, b), (b, c)\}$. Але відношення R' є антирефлексивним. Тому потрібно додати до відношення R' ще одну впорядковану пару, яка складається з однакових елементів. Нехай це буде пара (a, a) . Отримуємо $R = \{(a, a), (a, b), (b, c)\}$. Діаграма відношення R наведена на рис. 2.8.

Відношення R є шуканим і має наступну матрицю:

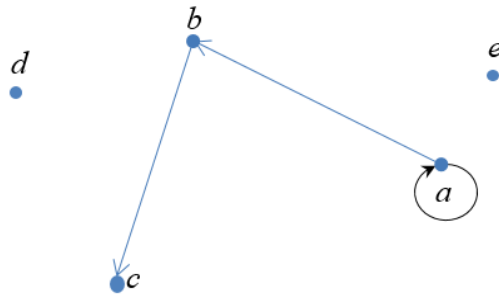


Рис. 2.8. Діаграма відношення R

$$M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Легко переконатися, що $R^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c)\}$. Тому $R \cap R^2 = \{(a, a), (a, b)\}$. Звідси

$$\text{pr}_1(R \cap R^2) = \{a\}, \text{pr}_2(R \cap R^2) = \{a, b\}.$$

$$S = R \cup R^2 = \{(a, a), (a, b), (b, c), (a, c)\}.$$

$$\text{Отже, } S(a) = \{a, b, c\}, S(b) = \{c\}, S(c) = S(d) = S(e) = \emptyset.$$

$$\text{Тому } A / S = \{\{a, b, c\}, \{c\}, \emptyset\}.$$

Замиканням бінарного відношення R за властивістю P називається таке мінімальне за числом елементів бінарне відношення $[R]_P$, яке містить у собі відношення R і задовольняє властивість P .

Наприклад, якщо R — однорідне бінарне відношення на множині A , то його рефлексивне, симетричне та транзитивне замикання $[R]_{\text{ref}}$, $[R]_{\text{sym}}$ та $[R]_{\text{trans}}$ можуть бути знайдені за формулами:

- $[R]_{\text{ref}} = R \cup I_A$;
- $[R]_{\text{sym}} = R \cup R^{-1}$;

$$\bullet [R]_{\text{trans}} = R^1 \cup R^2 \cup \dots \cup R^n \cup \dots$$

Приклад 2.12. Для однорідного бінарного відношення

$R = \{(2,1), (3,1), (2,2), (4,6)\}$, визначеного на множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, побудувати його симетричне та транзитивне замикання S . Вказати матрицю замикання та знайти $S(\{1, 2, 5\})$.

Розв'язання. Із симетричності та транзитивності випливає, що якщо хоча-би один елемент множини A перебуває у відношенні R з яким-небудь елементом, то він повинен перебувати у відношенні S з самим собою (наприклад, з того, що $(3,1) \in R$ та симетричності S випливає, що $(1,3) \in S$. Тоді з транзитивності S отримуємо, що $(1,1) \in S$ та $(3,3) \in S$). Тому пари $(1,1), (3,3), (4,4), (6,6)$, обов'язково потрібно включити у відношення S . Також із симетричності та транзитивності випливає, що пари $(1,2), (1,3), (2,3)$ та обернені до них також мають входити до складу S . Отже остаточно маємо $S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,4), (4,6), (6,4), (6,6)\}$. Легко переконатися, що S — симетричне та $S^2 = S$. Отже, відношення S — транзитивне. Тоді

$$M(S) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

та $S(\{1, 2, 5\}) = \{1, 2, 3\}$.

2.5. Відношення еквівалентності та толерантності

Однорідне бінарне відношення E називається відношенням *еквівалентності* на множині A , якщо воно є рефлексивним, симетричним та транзитивним.

Якщо E — відношення еквівалентності, $a \in A, b \in A$ і aEb , то елементи a та b називаються *еквівалентними*.

Прикладами відношень еквівалентності є відношення рівності чисел, відношення паралельності прямих, відношення "народитися у один день" тощо.

Класом еквівалентності за відношенням еквівалентності E для елемента $a \in A$ називається множина усіх елементів множини A , які еквівалентні елементу a . Клас еквівалентності, який відповідає елементу a , співпадає із перерізом $E(a)$.

Теорема 2.1. Два класи еквівалентності множини A за відношенням E або співпадають, або не перетинаються.

Доведення. Нехай $a, b \in A$. Припустимо, що $E(a) \cap E(b) \neq \emptyset$. Покажемо, що тоді $E(a) = E(b)$.

Доведемо спочатку, що $E(a) \subseteq E(b)$. Нехай x — довільний елемент множини $E(a)$. Тоді $(a, x) \in E$. Нехай $c \in E(a) \cap E(b)$. Тоді $(a, c) \in E$ та $(b, c) \in E$. З симетричності відношення E випливає, що $(c, a) \in E$. Тоді із того, що $(b, c) \in E$, $(c, a) \in E$ та транзитивності відношення E отримуємо, що $(b, a) \in E$ та $(b, x) \in E$. Тому $x \in E(b)$. Отже, $E(a) \subseteq E(b)$.

Обернене включення доводиться аналогічно. Отже, якщо два класи еквівалентності мають спільні елементи, то вони співпадають. Теорему доведено.

Нехай $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I}$ — деяка система підмножин множини A , де I — множина індексів.

Система $\mathcal{C}$ називається *покриттям множини A* , якщо для довільного $a \in A$ знайдеться такий індекс $i \in I$, що $a \in C_i$, тобто $A \subseteq \bigcup_{i \in I} C_i$.

Система $\mathcal{C}$ називається *розбиттям множини A* , якщо вона є покриттям множини A і крім того множини C_i та C_j не перетинаються для довільних відмінних між собою $i \in I, j \in I$, тобто $C_i \cap C_j = \emptyset$ у випадку $i \neq j$.

Приклад 2.13. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Тоді

1) система $\mathcal{C} = \{\{1, 3\}, \{1, 2, 5\}, \{3, 5\}\}$ не є покриттям множини A , оскільки елемент 4 не належить жодній множині, які входять до $\mathcal{C}$.

2) система $\mathcal{C} = \{\{1, 3\}, \{1, 2, 5\}, \{4, 5\}\}$ є покриттям множини A , але не є її розбиттям, оскільки $\{1, 3\} \cap \{1, 2, 5\} \neq \emptyset$.

3) система $\mathcal{C} = \{\{1, 3\}, \{2, 5\}, \{4\}\}$ є розбиттям множини A .

Теорема 2.2. Якщо E — відношення еквівалентності на множині A , то множина класів еквівалентності за цим відношенням є розбиттям множини A . І навпаки, для довільного розбиття $\mathcal{C}$ множини A можна вказати відношення еквівалентності, множина класів еквівалентності якого співпадає з $\mathcal{C}$.

Наслідок. Якщо однорідне бінарне відношення E є рефлексивним на множині A і одноелементні перерізи множини A за відношенням E або співпадають, або не перетинаються, то E — відношення еквівалентності.

На рис. 2.9 наведена діаграма відношення еквівалентності

$$E = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, a), (c, c), (d, d)\},$$

визначеного на множині $A = \{a, b, c, d\}$.

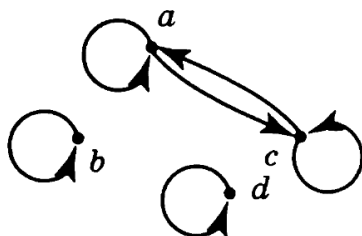


Рис. 2.9. Приклад відношення еквівалентності

З діаграми добре видно, що класами еквівалентності є множини $\{a, c\}$, $\{b\}$ та $\{d\}$, які породжують розбиття множини A .

Відношення T називається *відношенням толерантності* на множині A , якщо воно рефлексивне та симетричне. Очевидно, що кожне відношення еквівалентності є відношенням толерантності, але не навпаки.

Наприклад, нехай A — множина слів української мови. Будемо вважати слова *подібними*, якщо вони відрізняються не більше, ніж на одну літеру. Тоді подібність слів є толерантністю, але не є еквівалентністю.

Легко переконатися, що фактор-множина множини A за відношенням толерантності T є покриттям множини A і $[T]_{\text{trans}}$ є відношенням еквівалентності.

Приклад 2.14. Визначити, які з наступних бінарних відношень є відношеннями еквівалентності, та вказати для них класи еквівалентності. Перевірити толерантність відношень, які не є еквівалентністю:

- а) перпендикулярність площин у просторі;
- б) відношення "бути однакового зросту" на множині людей;
- в) відношення R : "знаходитися один від одного на відстані не більшій за 100" на площині;
- г) відношення "бути родичем" на множині людей (вважаємо, що людина є родичем сама собі, а дві людини є родичами, якщо одна з них є нащадком іншої, або вони мають спільного предка).

Розв'язання.

а) Відношення перпендикулярності площин не є ні відношенням еквівалентності, ні відношенням толерантності, оскільки воно не є рефлексивним.

б) Відношення "бути однакового зросту" на множині людей є відношенням еквівалентності.

Рефлексивність, очевидно, справджується, оскільки відношення рівності чисел є рефлексивним. Симетричність також виконується по тій самій причині. Для перевірки транзитивності досить пересвідчитися у транзитивності відношення рівності чисел.

Якщо вважати, що зріст вимірюється у сантиметрах, то класом еквівалентності, який відповідає числу k , є множина усіх людей, зріст яких рівний k см.

в) Відношення R не є відношенням еквівалентності, оскільки не виконується умова транзитивності. Для того, щоб пересвідчитися у цьому досить розглянути вершини рівнобедреного трикутника з бічною стороною 100 та основою 150 (див. рис. 2.10).

Відстані від кінців основи до вершини задовольняють умову, а довжина основи — не задовольняє. Тобто, $(A, B) \in R$, $(B, C) \in R$, але $(A, C) \notin R$. Оскільки R є рефлексивним та симетричним, то воно є толерантністю.

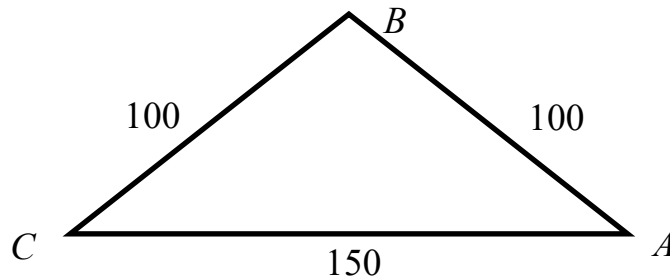


Рис. 2.10. Рівнобедрений трикутник

г) Відношення не є відношенням еквівалентності. Рефлексивність та симетричність впливають із означення. Тому відношення є відношенням толерантності. Покажемо, що транзитивність не виконуються. Нехай різні особи A та B є родичами і нехай B та C також є родичами, причому A предок B по батьківській лінії, а C — предок B по материнській лінії. Тоді жоден із A та C не є родичем іншого. Отже, транзитивність не виконується.

Приклад 2.15. Перевірити, чи є визначене на множині $A = \{x, y, z, t, u, v, w\}$ бінарне відношення $R = \{(u, x), (u, u), (y, z), (w, w), (y, y), (z, y), (z, z), (z, w), (y, w), (x, u), (w, y), (w, z), (x, x), (v, v), (t, t)\}$ відношенням еквівалентності. Якщо так, то вказати фактормножину A/R .

Розв'язання.

Перший спосіб. Оскільки $I_A \subseteq R$, то відношення R є рефлексивним.

Для перевірки симетричності знайдемо обернене відношення:

$$R^{-1} = \{(x, u), (u, u), (z, y), (w, w), (y, y), (y, z), (z, z), (w, z), (w, y), (u, x), (y, w), (z, w), (x, x), (v, v), (t, t)\}$$

Легко переконатися, що $R^{-1} = R$, а отже, відношення R є симетричним.

Для перевірки транзитивності знайдемо другу степінь відношення R :

$$R^2 = \{(x, x), (x, u), (y, y), (y, z), (y, w), (z, y), (z, z), (z, w), (t, t), (u, x), (u, u), (v, v), (w, y), (w, z), (w, w)\}.$$

Легко перевірити, що $R^2 = R$. Тому відношення R є транзитивним. Отже, відношення R є відношенням еквівалентності.

Другий спосіб. Скористаємося наслідком до теореми 2.2. Для цього потрібно спочатку знайти одноелементні перерізи множини A за відношенням відношення R .

$$R(x) = \{x, u\}, R(y) = \{y, z, w\}, R(z) = \{y, z, w\}, R(t) = \{t\}, R(u) = \{x, u\}, R(v) = \{v\}, R(w) = \{y, z, w\}.$$

Оскільки, для довільного $a \in A$ виконується умова $a \in R(a)$, то R — рефлексивне. Оскільки усі перерізи або співпадають, або не перетинаються, то відношення R є відношенням еквівалентності.

Тоді $A / R = \{\{x, u\}, \{y, z, w\}, \{t\}, \{v\}\}$ — фактор-множина множини A за відношенням R .

2.6. Відношення порядку

Бінарне відношення R називається *відношенням порядку (порядком)* на множині A , якщо воно є антисиметричним та транзитивним. Пара (A, R) називається *впорядкованою множиною*.

Якщо a та b — елементи впорядкованої множини (A, R) і виконується умова $a R b$, то кажуть, що елемент a *передуює* елементу b (b *слідуює за* a).

Якщо порядок є рефлексивним, то він називається *частковим (нестрогим) порядком*. Прикладом нестрогого порядку є відношення " $\leq$ " на множині дійсних чисел.

Антирефлексивний порядок називається *строгим порядком*. Отже, строгий порядок — це асиметричне та транзитивне відношення. Прикладом є відношення " $\subset$ " (строге включення множин). Відношення R є строгим порядком на множині тоді і тільки тоді, коли воно антирефлексивне та транзитивне на цій множині.

Якщо R — відношення строгого порядку на множині A , то відношення $R' = R \cup I_A$ називається відношенням часткового порядку, відповідним відношенню R .

Наприклад, відношення " $\leq$ " є відношенням часткового порядку, яке відповідає відношенню строгого порядку " $<$ ".

Відношення порядку, яке є повним, називається відношенням *лінійного порядку*, а відповідна впорядкована множина — *лінійно впорядкованою*. Прикладом строгого лінійного порядку є відношення " $>$ " на числовій множині. Лінійно впорядкована підмножина впорядкованої множини називається *ланцюгом* (відносно того самого відношення порядку). Підмножина впорядкованої множини, жодні два елементи якої не передують один одному (не порівнюються) називається *антиланцюгом*.

Нехай a та b — різні елементи впорядкованої множини (A, R) . Елемент a називається *безпосереднім попередником* елемента b , якщо елемент a передуює елементу b і не існує жодного елемента c такого, що a передуює c і c передуює b .

Аналогічно дається означення *безпосереднього наступника*.

Приклад 2.16. Розглянемо відношення включення, визначене на множині підмножин множини $\{1, 2, 3, 4\}$. Тоді множини $\{1\}$ та $\{2\}$ є безпосередніми попередниками множини $\{1, 2\}$, а множина $\{3\}$ не є безпосереднім попередником множини $\{1, 2, 3\}$, оскільки

$\{3\} \subseteq \{1,3\} \subseteq \{1,2,3\}$. Множина $\{\{1,4\}, \{1,2,4\}, \{1\}\}$ є ланцюгом, а множина $\{\{1\}, \{2,3\}, \{2,4\}\}$ — антиланцюгом.

Приклад 2.17. Елемент 1 є безпосереднім наступником елемента 0 множини цілих чисел $\mathbb{Z}$, впорядкованої відношенням " $\leq$ ". Якщо розглядати це саме відношення на множині $\mathbb{Q}$, то у елемента 0 немає безпосереднього наступника, оскільки для довільного додатного $a \in \mathbb{Q}$ виконується умова $0 < a/2 < a$.

Впорядкована множина (A, R) називається *щільною*, якщо для довільних її елементів a та b , таких, що a передує b , знайдеться такий елемент $c \in A$, який є слідом за a та передує b (тобто, для довільних порівнюваних елементів існує «проміжний» між ними елемент). Наприклад, впорядкована множина $(\mathbb{Q}, <)$ є щільною, а $(\mathbb{Z}, <)$ — не є. Очевидно, що у щільній впорядкованій множині жоден елемент не має безпосереднього попередника та безпосереднього наступника. Крім того, жодна скінченна множина не може бути щільною.

Відношення часткового порядку на скінченній множині зручно задавати за допомогою *діаграм Хассе*. При цьому кожний елемент з'єднується відрізками з усіма його "безпосередніми попередниками" і розташовується на діаграмі на один рівень вище за "найвищого" з них. Елементи, які не мають попередників, розташовуються на 1-му рівні.

На рис. 2.11 зображено діаграму Хассе для відношення подільності:

$x R y$ тоді і тільки тоді, коли число x є дільником числа y ,

визначеного на множині $\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$.

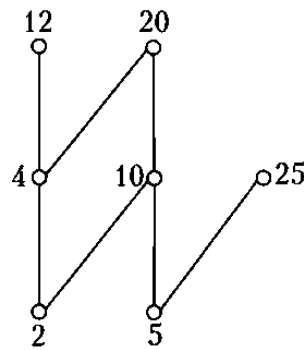


Рис. 2.11. Діаграма Хассе для відношення подільності на множині $\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$

Елемент a називається *мінімальним елементом* впорядкованої множини (A, R) , якщо йому не передує жодний інший елемент цієї множини. Аналогічно дається означення *максимального елемента* впорядкованої множини.

Для відношення подільності із діаграмою на рис. 2.11 елементи 2 та 5 є мінімальними, а елементи 12, 20 та 25 — максимальними.

Елемент a називається *найменшим елементом* впорядкованої множини (A, R) , якщо для довільного іншого елемента $b \in A$ $(a, b) \in R$. Тобто, найменший елемент впорядкованої множини передуює усім іншим елементам.

Аналогічно дається означення *найбільшого елемента* впорядкованої множини.

Елемент a називається *екстремальними елементами* впорядкованої множини, якщо він є її максимальним або мінімальним елементом. У щільній впорядкованій множині усі елементи, які не є екстремальними, мають безліч наступників та попередників.

Для часткової впорядкованої множини, діаграма якої наведена на рис. 2.12, елемент G буде найбільшим, а найменшого елемента взагалі не існує (елементи A , C та E — мінімальні, але не найменші, оскільки жодний із них не передуює двом іншим).

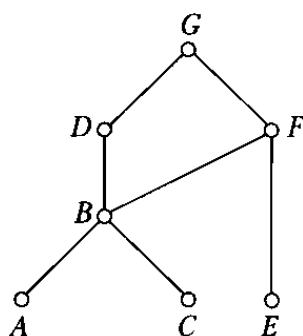


Рис. 2.12. Діаграма Хасе для відношення часткового порядку

Теорема 2.3. Якщо впорядкована множина містить найбільший (найменший) елемент, то він є єдиним її максимальним (мінімальним) елементом.

Теорема 2.4. Кожна непорожня скінченна впорядкована множина містить хоча би один мінімальний та хоча би один максимальний елементи.

Теорема 2.5. Якщо у скінченній впорядкованій множині є єдиний максимальний (мінімальний) елемент, то він є її найбільшим (найменшим) елементом.

Якщо впорядкована множина є скінченною, то:

- за висоту елемента приймається його рівень на діаграмі Хасе;
- висотою множини вважається максимальна з висот її елементів.

Елемент a впорядкованої множини (A, R) називається *нижньою гранню множини* $M \subseteq A$, якщо для усіх елементів $b \in M$ виконується умова $a R b$.

Аналогічно дається означення верхньої грані.

Найбільша нижня грань множини (якщо вона існує) називається *точною нижньою гранню* множини M і позначається $\inf M$.

Точна верхня грань (найменша верхня грань) множини M позначається $\sup M$.

Наприклад, для відношення, діаграма якого наведена на рис. 2.12, $\sup\{D, E\} = G$, $\inf\{D, F\} = B$, а $\inf\{B, E\}$ не існує.

Частково впорядкована множина (A, R) називається *ґраткою*, якщо для довільних $a \in A, b \in A$ існують $\inf\{a, b\}$ та $\sup\{a, b\}$.

Наприклад, множина усіх підмножин деякої універсальної множини разом із заданим на ній відношенням включення множин є ґраткою. Для довільних двох множин A та B $\inf\{A, B\} = A \cap B$, $\sup\{A, B\} = A \cup B$.

Приклад 2.18. Перевірити, чи є бінарне відношення

$$R = \{(b, d), (a, e), (a, b), (a, d), (c, d), (b, e), (a, c)\} \cup I_A$$

відношенням часткового порядку на множині $A = \{a, b, c, d, e\}$. Якщо так, то зобразити діаграму Хассе впорядкованої множини (A, R) , відшукати її екстремальні елементи, вказати висоту множини та перевірити, чи є впорядкована множина (A, R) ґраткою. Знайти $\inf\{b, c\}$, $\sup\{a, c\}$ та $\sup\{b, c\}$.

Розв'язання. Відношення R є рефлексивним. Перевіримо, чи є воно антисиметричним. Знайдемо обернене до нього відношення:

$$R^{-1} = \{(d, b), (e, a), (b, a), (d, a), (d, c), (e, b), (c, a)\} \cup I_A.$$

Тоді $R^{-1} \cap R = I_A$, а, отже, відношення R є антисиметричним. Перевіримо транзитивність.

$$R^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, b), (b, d), (b, e), (c, c), (c, d), (d, d), (e, e)\} = R.$$

Тому відношення R є транзитивним.

Отже, відношення R є відношенням часткового порядку.

Діаграма Хассе впорядкованої множини (A, R) наведена рис. 2.13.

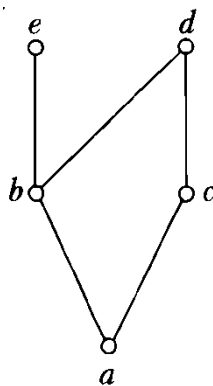


Рис. 2.13. Діаграма Хассе

З діаграми Хассе видно, що елемент a є найменшим елементом впорядкованої множини (A, R) , а, отже, єдиним мінімальним елементом.

Елементи e та d — максимальні елементи впорядкованої множини (A, R) , а найбільший елемент не існує.

Впорядкована множина (A, R) має висоту 3.

Оскільки $\sup\{e, d\}$ не існує, то впорядкована множина (A, R) не є ґраткою.

Нарешті, з діаграми Хассе видно, що $\inf\{b, c\} = a$, $\sup\{a, c\} = c$, $\sup\{b, c\} = d$.

2.7. Функціональні відношення

2.7.1. Основні означення

Бінарне відношення f , визначене на множинах A та B , називається *функціональним*, якщо для довільного $x \in A$ існує не більше ніж один $y \in B$, такий що $(x, y) \in f$.

З означення функціонального відношення випливає, що для довільного $x \in A$ $|f(x)| \leq 1$. Якщо базисні множини функціонального відношення скінченні, то кожний рядок матриці $M(f)$ містить не більше однієї одиниці та з кожної вершини на діаграмі відношення виходить не більше однієї дуги.

Приклад 2.19. Відношення, діаграми яких зображені на рис. 2.14 а)-в), — функціональні, а відношення на рис. 2.14 г) не є функціональним.

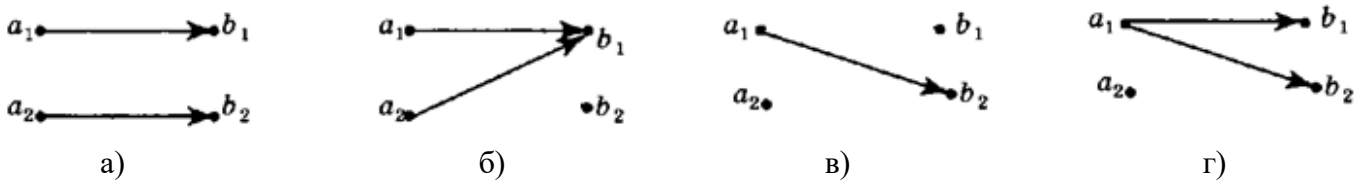


Рис. 2.14. Приклади функціональних та нефункціональних відношень

Функціональне відношення f , визначене на множинах A та B , називається *функцією* (відображенням) із A у B і позначається у вигляді

$$f: A \rightarrow B \text{ або } A \xrightarrow{f} B.$$

Якщо $f: A \rightarrow B$, то той факт, що $(x, y) \in f$, записують у вигляді $y = f(x)$.

Нехай f — функціональне відношення на множинах A та B . Тоді множина $\text{Dom } f \stackrel{\text{def}}{=} \text{pr}_1 f$ називається *областю визначення* відношення f (часто також використовується позначення D_f), а множина $\text{Im } f \stackrel{\text{def}}{=} \text{pr}_2 f$ — *областю значень* відношення f (також позначається як E_f).

Так, наприклад, для функції з рис. 2.14 б) $\text{Dom } f = \{a_1, a_2\}$, $\text{Im } f = \{b_1\}$, а для функції рис. 2.14 в) $\text{Dom } f = \{a_1\}$, $\text{Im } f = \{b_2\}$.

Теорема 2.6. Нехай $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$. Тоді $g \circ f$ — функція із A у C , причому $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

2.7.2. Види функцій

Функція $f: A \rightarrow B$ називається *цілком визначеною* (тотальною), якщо $\text{Dom } f = A$.

У протилежному випадку функція називається *частковою*.

Функція $f: A \rightarrow B$ називається *сюр'єктивною*, якщо $\text{Im } f = B$.

Приклад діаграми часткового сюр'єктивного відображення між елементами множин $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ та $B = \{y_1, y_2\}$ наведено на рис. 2.15.

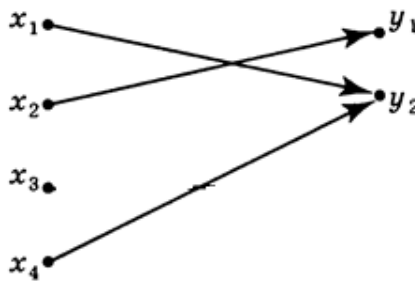


Рис. 2.15. Приклад сюр'єктивного відображення

На діаграмі сюр'єктивної функції у кожную вершину, яка відповідає елементам множини B , заходить принаймні одна дуга.

Функція $f: A \rightarrow B$ називається *ін'єктивною*, якщо з того що $x_1 \neq x_2$ випливає, що $f(x_1) \neq f(x_2)$. На діаграмі, яка відповідає ін'єктивній функції, у кожную вершину входить не більше однієї дуги (див. рис. 2.16).



Рис. 2.16. Приклад ін'єктивної функції

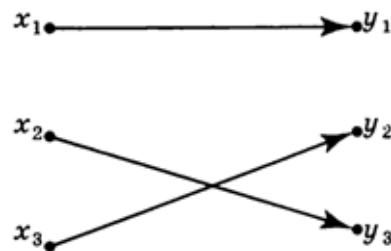


Рис. 2.17. Приклад бієктивної функції

Цілком визначена функція називається *бієктивною* (взаємно однозначною або *бієкцією*), якщо вона є сюр'єктивною та ін'єктивною одночасно. Приклад бієктивного відображення наведено на рис. 2.17.

Бієктивна функція $f: A \rightarrow B$ встановлює взаємно однозначну відповідність між елементами множин A та B .

Теорема 2.7. Функція $f: A \rightarrow B$ є бієкцією тоді і тільки тоді, коли відношення f^{-1} є цілком визначеною функцією. Якщо f — бієкція, то f^{-1} — також бієкція, причому для довільних $x \in A$, $y \in B$

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad f(f^{-1}(y)) = y.$$

Приклад 2.20. Перевірити властивості та вказати обернені функції до функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, якщо:

а) $f(x) = 3x + 6$;

б) $f(x) = x^2 - 4$;

в) $f(x) = x^3 - 1$.

Розв'язання.

а) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, тому функція $f(x)$ цілком визначена. Оскільки $f(x)$ — лінійна функція і коефіцієнт біля невідомої x відмінний від 0, то $\text{Im } f = \mathbb{R}$. Звідси випливає, що функція $f(x)$ є сюр'єктивною. Оскільки $f(x)$ — зростаюча лінійна функція, то при $x_1 \neq x_2$ $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тому f — ін'єктивна функція. З сюр'єктивності та ін'єктивності функції f випливає її бієктивність. Знайдемо обернену функцію. Виразимо x з рівності $y = 3x + 6$. Отримаємо $x = (y - 6) / 3$. Отже, $f^{-1}(y) = (y - 6) / 3$.

б) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, тому функція $f(x)$ цілком визначена. Оскільки $x^2 \geq 0$, то $\text{Im } f = [-4, +\infty)$. З того, що $\text{Im } f \neq \mathbb{R}$ випливає, що $f(x)$ не є сюр'єктивною. Функція f не є ін'єктивною, оскільки вона парна. Функція f не є бієктивною. Тому вона не має оберненої функції.

в) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, тому функція $f(x)$ цілком визначена. Оскільки $f(x)$ — зростаюча кубічна функція, то $\text{Im } f = \mathbb{R}$. Звідси випливає, що функція $f(x)$ є сюр'єктивною. Оскільки $f(x)$ — зростаюча функція, то при $x_1 \neq x_2$ $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тому f — ін'єктивна функція. З сюр'єктивності та ін'єктивності функції f випливає її бієктивність. Знайдемо обернену функцію. З рівності $y = x^3 - 1$ випливає, що $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y + 1}$.

2.8. Задачі до розділу

2.8.1. Операції над відношеннями

1. Нехай $A = \{k, l, m, n\}$, $B = \{1, 2, 5, 7, 8\}$, $C = \{a, b, c, d, e\}$,

$$R = \{(k, 1), (n, 2), (n, 1), (l, 5), (l, 8), (m, 2), (m, 8), (k, 7)\}, \quad S = \{(2, b), (7, c), (8, b), (5, e)\},$$

$T = S \circ R$. Задати відношення T за допомогою матриці та графу і знайти $(A \setminus T^{-1}(\{c, e\})) \times (C \setminus \text{pr}_2 T)$.

2. Нехай $A = \{k, l, m, n\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{x, y, z, t, u, v\}$,

$$M(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, S = \{(1, u), (2, x), (2, z), (2, t), (4, x), (4, v)\}, T = S \circ R.$$

Задати відношення T за допомогою графу і знайти $(C \setminus T(\{l, n\})) \times (A \setminus \text{pr}_2 T^{-1})$.

3. Нехай R — бінарне відношення " $<$ ", визначене на множині $\mathbb{N}$. Знайти R^m , де $m \in \mathbb{N}$.
4. Нехай R — бінарне відношення подільності на множині $\mathbb{Z}$. Знайти R^m , де $m \in \mathbb{N}$.
5. Навести приклад непорожнього бінарного відношення, квадрат якого — порожня множина.
6. Навести приклад бінарного відношення R , такого що $R^2 \neq \emptyset$, $R^2 \cap R = \emptyset$.

2.8.2. Властивості бінарних відношень

1. Встановити властивості однорідного бінарного відношення $R = \{(x, y) \mid |x| = |y|\}$, заданого на множині $\mathbb{R}$. Вказати $R(\{-1, 2, 5\})$.
2. Встановити властивості однорідного бінарного відношення $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$, заданого на множині $\mathbb{R}$. Вказати $\text{pr}_1 R$.
3. Задати за допомогою матриці та графу мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення R на множині $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, яке є антирефлексивним, не є симетричним та не є транзитивним. Знайти першу та другу проєкції відношення $R^2 \cup R$ та вказати фактор-множину множини A за відношенням R .
4. Задати за допомогою матриці та графу мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення R на множині $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, яке є рефлексивним, симетричним та не є транзитивним. Знайти першу та другу проєкції відношення $R^2 \setminus R$ та вказати фактор-множину множини A за відношенням R .
5. Для однорідного бінарного відношення $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 5)\}$, визначеного на множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, побудувати його замикання S , яке є симетричним та транзитивним. Вказати матрицю замикання та знайти $S(\{1, 4\})$.
6. Для однорідного бінарного відношення $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, d), (c, e), (e, d), (c, b)\}$, визначеного на множині $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, побудувати його замикання, яке є рефлексивним та транзитивним одночасно. Вказати матрицю відношення S^{-1} та знайти $S(\{b, d, f\})$.

7. Побудувати рефлексивне, антисиметричне та транзитивне замикання S однорідного бінарного відношення $R = \{(a,b), (b,c), (c,a)\}$, визначеного на множині $\{a,b,c,d\}$.
8. Побудувати асиметричне та транзитивне замикання S однорідного бінарного відношення $R = \{(2,1), (1,3), (3,5), (5,2)\}$, визначеного на множині $\{1,2,3,4,5\}$.

2.8.3. Бінарні відношення еквівалентності

1. Які із наступних систем множин є а) покриттям; б) розбиттям множини $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$:
 - а) $\{\{1,2,4,8\}, \{5\}, \{3,7\}\}$;
 - б) $\{\{1,2,6\}, \{4,5\}, \{2,3,7\}, \{4,8\}\}$;
 - в) $\{\{1,2,6\}, \{4,7\}, \{3,5,8\}\}$.
2. Які із наступних систем множин є а) покриттям; б) розбиттям множини $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$:
 - а) $\{\{b,e,g\}, \{a,d\}, \{b,c,h\}\}$;
 - б) $\{\{d,e\}, \{b,c,g\}, \{d,h\}, \{a,b,f\}\}$;
 - в) $\{\{c,e,h\}, \{a,b,f\}, \{d,g\}\}$.
3. Задати за допомогою а) матриці; б) діаграми відношення еквівалентності, фактор-множина якого наведена у прикладі 1 в).
4. Задати за допомогою а) матриці; б) діаграми відношення еквівалентності, фактор-множина якого наведена у прикладі 2 в).
5. Вказати, які з наступних бінарних відношень є відношеннями толерантності, а які — відношеннями еквівалентності (та вказати для них класи еквівалентності):
 - а) паралельність площин у просторі;
 - б) відношення знайомства на множині людей;
 - в) відношення "одногогрупник" на множині: а) людей; б) студентів;
 - г) відношення рівнопотужності.
6. Вказати, які з наступних бінарних відношень є відношеннями толерантності, а які — відношеннями еквівалентності (та вказати для них класи еквівалентності):
 - а) перпендикулярність прямих на площині;
 - б) відношення "мати однаковий вік" на множині людей;
 - в) відношення "знаходитися у одній чверті" на множині точок координатної площини;
 - г) відношення "бути родичем" на множині людей.
7. Перевірити, чи є визначене на множині $A = \{x, y, z, t, u, v, w\}$ бінарне відношення $R = \{(t,v), (w,x), (w,z), (u,y), (x,z), (w,w), (x,x), (z,x), (v,v), (z,z), (z,w), (x,w), (y,u), (y,y), (u,u), (t,t), (v,t)\}$ відношенням еквівалентності. Якщо так, то знайти фактор-множину A/R . Вказати $(R^3 \cup R^{-2})^{100} \setminus R^{50}$.

8. Перевірити, чи є визначене на множині $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ бінарне відношення $R = \{(b, f), (a, g), (b, b), (f, c), (d, d), (b, c), (g, a), (c, c), (g, g), (c, f), (f, f), (c, b), (e, e), (a, a), (f, b)\}$ відношенням еквівалентності. Якщо так, то знайти фактор-множину A/R . Вказати $(R^{-5} \cap R^3)^{20} \cup R^{-30}$.
9. Вказати визначене на відрізку $[0, 1]$ бінарне відношення еквівалентності, яке має 5 класів еквівалентності, класи еквівалентності якого утворюють розбиття відрізка $[0, 1]$.
10. Вказати визначене на множині $\mathbb{Z}$ бінарне відношення еквівалентності, яке має 13 класів еквівалентності і породжує розбиття множини цілих чисел.
11. Для бінарного відношення $R = \{(1, 2), (3, 2), (9, 2), (10, 5), (3, 3)\}$, визначеного на множині $A = \{1, 2, \dots, 10\}$, вказати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення S , яке є відношенням еквівалентності на множині A і задовольняє умову $R \subseteq S$. Вказати класи еквівалентності множини A за відношенням S та знайти $|A / (S \setminus R)|$.
12. Для бінарного відношення $R = \{(b, a), (c, b), (f, b), (b, g), (d, k), (h, f), (i, j)\}$, визначеного на множині $A = \{a, b, \dots, k\}$, вказати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення S , яке є відношенням еквівалентності на множині A і задовольняє умову $R \subseteq S$.

2.8.4. Відношення порядку

- Вказати, які з наступних бінарних відношень є відношеннями порядку, часткового, строгого та лінійного порядку:
 - відношення знайомства на множині людей;
 - відношення "бути старшим";
 - відношення "бути сином";
 - відношення "бути предком" (вважати, що за домовленістю кожна людина є власним предком).
- Вказати, які з наступних бінарних відношень є відношеннями порядку, часткового, строгого та лінійного порядку:
 - відношення "бути нащадком";
 - відношення "бути молодшим";
 - відношення "знаходитися на більшій відстані від початку координат" на множині точок площини;
 - відношення "бути родичем" на множині людей.
- Задати переліком елементів бінарне відношення строгого порядку R , якому відповідає впорядкована множина, діаграма Хассе якої наведена на рис. 2.18. Знайти екстремальні елементи впорядкованої множини. Вказати усі верхні грані множини $\{A, C, E\}$. Знайти $\sup\{C, E\}$, $\inf\{D, E\}$ та $\inf\{D, C\}$ і вказати усі ланцюги та антиланцюги максимальної потужності, які містяться у впорядкованій множині. Чи є ця множина ґраткою?

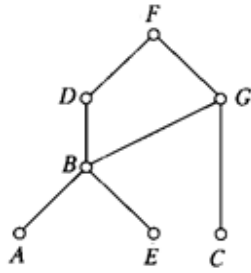


Рис. 2.18

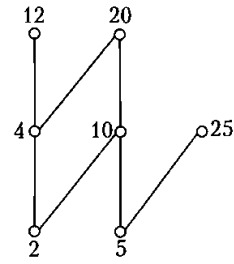


Рис. 2.19

4. Знайти $|R|$, де R — відношення часткового порядку на множині $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$, діаграма Хассе якого наведена на рис. 2.19. Вказати екстремальні елементи впорядкованої множини (A, R) . Знайти $\sup\{10, 12\}$ та $\inf\{10, 12\}$ і вказати усі ланцюги антиланцюги максимальної потужності, які містяться у впорядкованій множині. З'ясувати, чи є ця множина ґраткою.
5. На рис 2.20. наведені діаграми Хассе частково впорядкованих множин. Які з цих множин є ґратками.

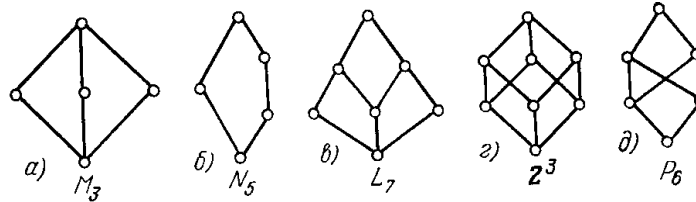


Рис. 2.20.

6. На рис 2.21. наведені діаграми Хассе частково впорядкованих множин. Які з цих множин є ґратками.

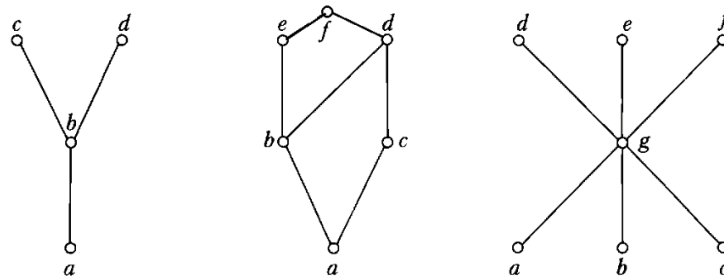


Рис. 2.21.

7. Побудувати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення на множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$, яке було би відношенням:
- нестрогого порядку;
 - строогого порядку;
 - лінійного порядку.
- Вказати екстремальні елементи множини A за побудованим відношенням.
8. Побудувати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення на множині $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке було би відношенням:

- а) нестрогого порядку;
- б) строгого порядку;
- в) лінійного порядку.

Вказати екстремальні елементи множини A за побудованим відношенням.

9. Для однорідного бінарного відношення $R = \{(c, a), (b, d), (d, c), (f, c)\}$, визначеного на множині $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, побудувати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення S , яке б містило у собі відношення R і було відношенням:

- а) часткового порядку;
- б) строгого порядку;
- в) лінійного порядку.

Вказати екстремальні елементи впорядкованої множини (A, S) , її висоту та найдовший ланцюг елементів множини і найбільший за кількістю елементів антиланцюг.

10. Для однорідного бінарного відношення $R = \{(7, 4), (2, 3), (4, 1), (5, 4), (3, 4)\}$, визначеного на множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, побудувати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення S , яке б містило у собі відношення R і було відношенням:

- а) часткового порядку;
- б) строгого порядку;
- в) лінійного порядку.

Вказати екстремальні елементи впорядкованої множини (A, S) , її висоту та найдовший ланцюг елементів множини і найбільший за кількістю елементів антиланцюг.

11. Перевірити, чи є бінарне відношення $R = I_A \cup \{(2, 1), (4, 1), (1, 3), (5, 1), (4, 3), (2, 3)\} \cup \{(5, 3), (5, 4)\}$ відношенням часткового порядку на множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Якщо так, то зобразити діаграму Хассе множини (A, R) та вказати її екстремальні елементи.

12. Перевірити, чи є бінарне відношення R з матрицею

$$M(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

відношенням строгого порядку на множині $A = \{x, y, z, u, v\}$. Якщо так, то зобразити діаграму Хассе відношення R та вказати екстремальні елементи множини A за відношенням нестрогого порядку, яке відповідає відношенню R , її висоту та найдовший ланцюг елементів множини і найбільший за кількістю елементів антиланцюг.

13. Перевірити, чи є відношення $S = R \circ (R \cup I_A)$ відношенням строгого порядку на множині $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, де $R = \{(b, g), (a, e), (c, g), (b, c), (a, b), (c, e), (d, f)\}$. Якщо так, то

- зобразити діаграму Хассе відношення S ;
- вказати екстремальні елементи множини A за відношенням S ;
- знайти $\inf \{b, g, e\}$ та $\sup \{a, b, h\}$.

2.8.5. Функціональні відношення

1. Які з наведених нижче однорідних відношень є функціональними на множині дійсних чисел? Для функціональних відношень вказати область визначення, область значень та множину точок площини, які перебувають у цьому відношенні. Перевірити властивості функціональних відношень та вказати обернену функцію, якщо вона існує.

- $R_1 = \{(x, y) \mid xy = 2\}$;
- $R_2 = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4\}$;
- $R_3 = \{(x, y) \mid 2x > y\}$;
- $R_4 = \{(x, y) \mid x = \sqrt{y-1}\}$;
- $R_5 = \{(x, y) \mid y = \operatorname{tg} x\}$
- $R_6 = \{(x, y) \mid y - \sqrt[3]{x+2} = 0\}$.

2. Які з наведених нижче однорідних відношень є функціональними на множині дійсних чисел? Для функціональних відношень вказати область визначення, область значень та множину точок площини, які перебувають у цьому відношенні. Перевірити властивості відношень та вказати обернену функцію, якщо вона існує.

- $R_1 = \{(x, y) \mid y = 2^x\}$;
- $R_2 = \{(x, y) \mid y \leq -2, (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1\}$;
- $R_3 = \{(x, y) \mid x + y = 1\}$;
- $R_4 = \{(x, y) \mid x^2 = |y|\}$;
- $R_5 = \{(x, y) \mid x = \sin y\}$.

3. За бінарним відношенням $R = \{(2, b), (5, d), (4, b)\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{a, b, c, d\}$ побудувати таке мінімальне за кількістю елементів функціональне відношення f , яке задовольняє умову $R \subseteq f$ і є:

- ін'єктивним;
- сюр'єктивним;
- бієктивним;

4. За бінарним відношенням $R = \{(1,b), (3,d), (4,a)\} \subset \{1,2,3,4,5\} \times \{a,b,c,d,e\}$ побудувати таке мінімальне за кількістю елементів функціональне відношення f , яке задовольняє умову $R \subseteq f$ і є:
 - а) ін'єктивним;
 - б) сюр'єктивним;
 - в) бієктивним;
5. За бінарним відношенням $R = \{(2,b), (5,d), (4,b), (1,a), (2,c), (5,a)\} \subset \{1,2,3,4,5\} \times \{a,b,c,d\}$ побудувати таке максимальне за кількістю елементів функціональне відношення f , яке задовольняє умову $f \subseteq R$ і є:
 - а) ін'єктивним;
 - б) сюр'єктивним;
 - в) бієктивним;
6. За бінарним відношенням $R = \{(b,2), (d,5), (a,4), (e,3), (c,4), (d,3), (a,1)\} \subset \{a,b,c,d,e\} \times \{1,2,3,4,5\}$ побудувати таке максимальне за кількістю елементів функціональне відношення f , яке задовольняє умову $f \subseteq R$ і є:
 - а) ін'єктивним;
 - б) сюр'єктивним;
 - в) бієктивним;
7. Перевірити, чи є функціональним відношення $F = \{(x,y) \mid (x-1)^2 + y^2 = 16, y \geq 0\}$. Якщо так, то записати у відповідь значення виразу $10x + y$, де x — кількість цілих значень у множині $\text{Im } F$, y — найменший елемент множини $\text{Dom } F$. Інакше записати у відповідь 0.
8. Перевірити, чи є функціональним бінарне відношення $F = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 25, x < 0\}$. Якщо так, то записати у відповідь значення виразу $10x + y$, де x — кількість цілих значень у множині $\text{Dom } F$, y — найменший цілий елемент множини $\text{Im } F$. Інакше записати у відповідь кількість цілих елементів множини $F[-4]$.

2.9. Додаткові задачі

1. Навести формулу для $\overline{A \times B}$.
2. Довести, що якщо множини A та B — зліченні, то множина $A \times B$ також зліченна.
3. Нехай $R = \{(x,y) \mid x < y\}$ — бінарне відношення на множині $\mathbb{N}$. Знайти R^{-n} ($n \in \mathbb{N}$).
4. Нехай R — таке однорідне бінарне відношення на множині точок площини, що $x R y$ тоді і тільки тоді, коли відстань від точки x до точки y рівна 1. Знайти $R^3[(0,0)]$.
5. Знайти усі такі однорідні бінарні відношення R на множині A , що для всіх $S \in A^2$ $R \circ S = S \circ R$.

6. Нехай R, S — деякі бінарні відношення між елементами множин A та B , T — деяке бінарне відношення між елементами множин B та C . Чи правильно, що:
 - а) $T \circ (R \cup S) = (T \circ R) \cup (T \circ S)$;
 - б) $T \circ (R \cap S) = (T \circ R) \cap (T \circ S)$?
7. Нехай A — множина усіх людей, R — відношення батьківства на множині A ($x R y$: « x є батьком або матір'ю для y »). Записати відношення S “брат-сестра” ($x S y$: « x є братом або сестрою y »), використовуючи R та операції над відношеннями.
8. Вказати кількість однорідних бінарних відношень на n -елементній множині, які є:
 - а) симетричними та асиметричними;
 - б) симетричними та антисиметричними.
9. Підрахувати кількість усіх транзитивних відношень на множині із трьох елементів.
10. Знайти ймовірність того, що навмання вибране однорідне бінарне відношення на n -елементній множині є повним.
11. Обґрунтувати формулу $[R]_{\text{trans}} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$ для транзитивного замикання.
12. Нехай A — множина усіх людей, R — відношення батьківства на множині A . Записати відношення S “родич” ($x S y \Leftrightarrow x$ та y — родичі).
13. З'ясувати, за яких умов добуток двох відношень еквівалентності сам є відношенням еквівалентності.
14. Навести приклад впорядкованої множини, яка має єдиний максимальний елемент, але не має найбільшого елемента.
15. Написати програму для побудови діаграми Хассе заданої впорядкованої множини.
16. Довести, що відношення порядку R є відношенням строгого порядку тоді і тільки тоді, коли $R = [R \setminus R^2]_{\text{trans}}$.
17. Довести, що довільну скінченну частково впорядковану множину можна розбити на k ланцюгів, де k — найбільша можлива потужність антиланцюга цієї множини.
18. Довести, що у довільному товаристві, утвореному $mn + 1$ людьми знайдеться або такий список із $m + 1$ людини, що кожна наступна людина списку є нащадком попередньої, або множина, що складається з $n + 1$ людини, жодна з яких не є нащадком іншої людини з цієї множини.
19. Доведіть, що для довільних елементів x, y, z гратки $\sup\{\inf\{x, y\}, \inf\{x, z\}\}$ передуює елементу $\inf\{x, \sup\{y, z\}\}$.
20. Чи правильно, що для довільної функції $f: A \rightarrow B$ та довільних множин $A_1 \subset A$, $A_2 \subset A$ справджуються рівності:
 - а) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;
 - б) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$?
21. Довести, що якщо функції $f: A \rightarrow B$ та $g: B \rightarrow C$ бієктивні, то $g \circ f$ — також бієкція.
22. Знайти n -ту степінь функціонального відношення $f = \{(x, y) | 2x + y = 5\}$.

3. ЛОГІКА ВИСЛОВЛЮВАНЬ

3.1. Основні поняття логіки висловлювань

Формальна логіка займається аналізом речень, звертаючи основну увагу на їх форму і відволікаючись від змісту. Розділ логіки, який вивчає висловлювання та їхні властивості, називають *логікою висловлювань*.

Під *висловлюванням* розуміють розповідне речення, у якому щось стверджується, і про яке у даних умовах місця та часу можна сказати, *істинне* вони чи *хибне*.

Значення "істина" чи "хибність", яких набуває висловлювання, називають його *значенням істинності*. Значення "істина" часто позначають 1, "хибність" — 0.

Приклад 3.1. Розглянемо речення:

- 1) Сніг зелений.
- 2) Київ — столиця України.
- 3) Якщо семестровий рейтинг студента з дисципліни "Дискретна математика" не менший за 60, то він отримає залік автоматом.
- 4) $x + 1 = 3$.
- 5) Котра година?
- 6) Читай уважно!

Три перші речення — висловлювання, решта три — ні, бо четверте речення набуває істинного чи хибного значення залежно від значення змінної x , п'яте та шосте речення — не розповідні. Перше висловлювання є хибним, друге та третє — істинними.

Для позначення *змінних висловлювань* використовують великі латинські літери.

Висловлювання поділяються на *прості (елементарні)* та *складні*.

Атомами (елементарними висловлюваннями) називаються висловлювання, які відповідають простим розповідним реченням, які не мають складових частин. Складні висловлювання утворюють із простих висловлювань за допомогою *логічних операцій* (логічних зв'язок).

Перші два висловлювання прикладу 1 є простими, третє — складне.

3.1.1. Логічні операції

Запереченням висловлювання A називається висловлювання $\neg A$ (читається "не A "), істинне тоді і тільки тоді, коли висловлювання A є хибним.

Кон'юнкцією висловлювань A та B називається нове висловлювання, яке позначається $A \wedge B$ (читається " A і B ") і є істинним тоді і тільки тоді, коли обидва висловлювання A та B істинні.

Диз'юнкцією висловлювань A та B називається нове висловлювання, яке позначається $A \vee B$ (читається " A або B ") і є хибним тоді і тільки тоді, коли обидва висловлювання A та B хибні.

Імплікацією називається висловлювання $A \Rightarrow B$, яке хибне тоді і тільки тоді, коли висловлювання A істинне, а B — хибне. Висловлювання A — *припущення* (засновок, *антецедент*) імплікації, B — *висновок* (консеквент) імплікації.

Причинно-наслідковий зв'язок між A і B , що виражається імплікацією, на природній мові описується такими зворотами: "якщо A , то B ", "з A випливає B ", " A лише тоді, коли B ", " A є достатнім для B ", " B є необхідним для A ".

Еквівалентністю висловлювань A та B називається висловлювання $A \Leftrightarrow B$, яке є істинним тоді і тільки тоді, коли висловлювання A та B мають однакові значення істинності.

У природній мові цій операції відповідають звороти: " A тоді і тільки тоді, коли B ", " A є необхідним і достатнім для B ", " A та B є еквівалентними".

Значення операцій логіки висловлювань наведені у таблиці 3.1.

Таблиця 3.1. Таблиця значень операцій логіки висловлювань

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

3.1.2. Формули логіки висловлювань

Означення формули логіки висловлювань:

1) кожний атом — це формула;

2) якщо φ та ψ — формули, то

$(\neg \varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ — формули;

3) формули можуть бути породжені тільки скінченною кількістю застосувань вказаних правил.

Для зменшення кількості дужок вважають, що логічні операції (логічні зв'язки) мають наступний пріоритет (від найвищого до найнижчого):

$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ і замість $(\neg \varphi)$ пишуть $\bar{\varphi}$.

Приклад 3.2. Записати формулу, яка відповідає висловлюванню:

1) "Якщо Іван пропустить лекцію з дискретної математики і не повторить матеріал самостійно, то він погано виконає тести або не впорається із задачами".

2) "Оскільки Петро пізно ліг спати, то він проспав і через це не встиг на автобус та спізнився на пару".

Розв'язання.

1) Виділимо елементарні висловлювання, які входять до складу нашого першого складного висловлювання:

A — "Іван пропустить лекцію з дискретної математики",

B — "Іван повторить матеріал самостійно",

C — "Іван погано виконає тести",

D — "Іван впорається із задачами".

Тоді отримуємо наступну формулу, яка описує структуру нашого складного висловлювання:

$$A \wedge \bar{B} \Rightarrow C \vee \bar{D}.$$

2) Елементарні висловлювання:

A — "Петро пізно ліг спати";

B — "Петро проспав";

C — "Петро встиг на автобус";

D — "Петро спізнився на пару".

Тоді структуру другого складного висловлювання описує формула

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow \bar{C} \wedge D.$$

Під формальною *інтерпретацією* формули логіки висловлювань розуміють при-
своєння змінним висловлюванням, з яких побудована формула, деяких значень істин-
ності 0 або 1.

Приклад 3.3. Вказати значення формули $\varphi = \overline{A \wedge \bar{B}} \Leftrightarrow \bar{C} \Rightarrow B \vee A$ на інтерпретації $(1,0,1)$.

Розв'язання. $\varphi(1,0,1) = \overline{1 \wedge \bar{0}} \Leftrightarrow \bar{1} \Rightarrow 0 \vee 1 = \overline{1 \wedge 1} \Leftrightarrow 0 \Rightarrow 1 = \bar{1} \Leftrightarrow 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$.

Таблиця, які містить значення формули логіки висловлювань на всіх її інтерпрета-
ціях змінних, називається *таблицею істинності формули*.

Приклад 3.4. Побудувати таблицю істинності формули

$$\varphi = \overline{A \vee B} \Rightarrow (C \Leftrightarrow B \wedge \bar{A}).$$

Розв'язання. Поставимо у відповідність кожній підформулі формули φ окремий
стовпчик таблиці.

Таблиця 3.2. Таблиця істинності формули $\varphi = \overline{A \vee B} \Rightarrow (C \Leftrightarrow B \wedge \bar{A})$

A	B	C	$\bar{A}$	$\bar{A} \vee B$	$\overline{\bar{A} \vee B}$	$B \wedge \bar{A}$	$C \Leftrightarrow B \wedge \bar{A}$	φ
0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	0	1

Логічним рівнянням називається рівняння вигляду $\varphi = \psi$, де φ, ψ — формули
логіки висловлювань або логічні константи 0 чи 1.

Розв'язати логічне рівняння означає вказати усі набори значень атомів, які перетворюють його на правильну рівність.

Приклад 3.5. Розв'язати логічне рівняння $P \wedge \bar{Q} \Rightarrow \bar{R} \vee Q = 0$.

Розв'язання. Оскільки імплікація набуває значення 0 лише для одного набору значень аргументів, то рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} P \wedge \bar{Q} = 1, \\ \bar{R} \vee Q = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи останню систему, отримаємо

$$\begin{cases} P = 1, \\ \bar{Q} = 1, \\ \bar{R} = 0, \\ Q = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 1, \\ Q = 0, \\ R = 1. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(1,0,1)\}$.

Приклад 3.6. Розв'язати логічне рівняння $P \wedge \bar{Q} \vee R = \bar{R} \Leftrightarrow P$.

Розв'язання. Оскільки логіка висловлювань двозначна, то можливими є два випадки:

1-й випадок:

$$\begin{cases} P \wedge \bar{Q} \vee R = 0, \\ \bar{R} \Leftrightarrow P = 0. \end{cases}$$

2-й випадок:

$$\begin{cases} P \wedge \bar{Q} \vee R = 1, \\ \bar{R} \Leftrightarrow P = 1. \end{cases}$$

Розв'яжемо спочатку першу систему:

$$\begin{cases} P \wedge \bar{Q} \vee R = 0, \\ \bar{R} \Leftrightarrow P = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P \wedge \bar{Q} = 0, \\ R = 0, \\ 1 \Leftrightarrow P = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \wedge \bar{Q} = 0, \\ R = 0, \\ P = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 0, \\ R = 0. \end{cases}$$

Зауважимо, що перше рівняння передостанньої системи перетворюється у правильну рівність при всіх значеннях невідомої Q . Отже, у першому випадку ми отримали два розв'язки $(0,0,0)$ та $(0,1,0)$.

Розв'яжемо другу систему. Для цього спочатку проаналізуємо її друге рівняння. Еквівалентність приймає значення 0 у двох випадках. Тому

$$\left\{ \begin{array}{l} P \wedge \bar{Q} \vee R = 1, \\ \bar{R} \Leftrightarrow P = 1. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{R} = 0, \\ P = 0, \\ 0 \wedge \bar{Q} \vee 1 = 1 \\ \bar{R} = 1, \\ P = 1, \\ 1 \wedge \bar{Q} \vee 0 = 1. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} R = 1, \\ P = 0. \\ R = 0, \\ P = 1, \\ \bar{Q} = 1. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P = 0, \\ R = 1. \\ P = 1, \\ Q = 0, \\ R = 0. \end{array} \right.$$

Отже, ми отримали ще три розв'язки $(0,0,1), (0,1,1)$ та $(1,0,0)$.

Відповідь: $\{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0)\}$.

Формула логіки висловлювань називається *загальнозначущою* (тотожно істинною або тавтологією), якщо вона є істинною на всіх своїх інтерпретаціях. Той факт, що формула φ є загальнозначущою позначається $\models \varphi$.

Формула логіки висловлювань називається *суперечливою* (тотожно фальшивою), якщо вона є хибною на всіх своїх інтерпретаціях.

Формула логіки висловлювань називається *виконуваною*, якщо вона є істинною принаймні на одній своїй інтерпретації.

Формула логіки висловлювань називається *спростовною*, якщо вона є хибною принаймні на одній своїй інтерпретації.

Приклад 3.7. Перевірити, чи є суперечливою формула $\varphi = \overline{(\bar{A} \Leftrightarrow B) \vee (A \Rightarrow B)}$.

Розв'язання. Побудуємо таблицю істинності формули φ .

A	B	$\bar{A}$	$\bar{A} \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$(\bar{A} \Leftrightarrow B) \vee (A \Rightarrow B)$	φ
0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0

Оскільки формула φ хибна на усіх інтерпретаціях, то формула φ суперечлива.

Приклад 3.8. Довести, що формула $\varphi = \overline{\bar{B} \Rightarrow \bar{C}} \Rightarrow (C \Leftrightarrow A \vee C)$ є загальнозначущою.

Розв'язання. Використаємо метод від супротивного. Припустимо, що формула φ не є загальнозначущою. Тоді рівняння $\varphi = 0$ повинно мати хоча б один розв'язок. Перевіримо це.

$$\overline{\bar{B} \Rightarrow \bar{C}} \Rightarrow (C \Leftrightarrow A \vee C) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \overline{\bar{B} \Rightarrow \bar{C}} = 1, \\ C \Leftrightarrow A \vee C = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{B} \Rightarrow \bar{C} = 0, \\ C \Leftrightarrow A \vee C = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{B} = 1, \\ \bar{C} = 0, \\ C \Leftrightarrow A \vee C = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0, \\ C = 1, \\ 1 \Leftrightarrow A \vee 1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0, \\ C = 1, \\ 1 \Leftrightarrow 1 = 0. \end{cases}$$

У результаті ми отримали систему, останнє рівняння якої є неправильною рівністю, оскільки $1 \Leftrightarrow 1 = 1 \neq 0$. Отже рівняння $\varphi = 0$ не має розв'язків. Тому формула φ є загальноозначущою ($\models \varphi$).

3.2. Рівносильні перетворення формул

Формули φ та ψ називаються *рівносильними* (еквівалентними) формулами логіки висловлювань, якщо вони приймають однакові значення істинності на всіх інтерпретаціях змінних, кожна з яких входить принаймні у одну з формул φ або ψ . Той факт, що формули φ та ψ *рівносильні*, позначається як $\varphi \equiv \psi$.

Відношення рівносильності формул, побудованих із деякої фіксованої множини атомів, задовольняє умови рефлексивності ($\varphi \equiv \varphi$), симетричності ($\varphi \equiv \psi \Rightarrow \psi \equiv \varphi$) та транзитивності ($\varphi \equiv \psi, \psi \equiv \omega \Rightarrow \varphi \equiv \omega$), а отже є відношенням еквівалентності. Тому множина усіх формул розбивається на класи, у кожному з яких містяться рівносильні між собою формули.

Приклад 3.9. Перевірити, чи рівносильні формули $\varphi = \bar{C} \Rightarrow A$ та $\psi = \overline{A \vee C} \Rightarrow (A \vee \bar{B} \Rightarrow \bar{C}) \wedge C$.

Розв'язання. Побудуємо таблицю істинності формул φ та ψ .

A	B	C	$\bar{C}$	φ	$A \vee C$	$\overline{A \vee C}$	$\bar{B}$	$A \vee \bar{B}$	$A \vee \bar{B} \Rightarrow \bar{C}$	$(A \vee \bar{B} \Rightarrow \bar{C}) \wedge C$	ψ
0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1

Оскільки значення формул на усіх інтерпретаціях співпадають, то формули φ та ψ рівносильні.

Рівносильні перетворення формул ґрунтуються на законах логіки висловлювань, основні з яких наведені у таблиці 3.3.

Таблиця 3.3. Основні закони логіки висловлювань

№	Назва	Формулювання закону
1.	Закон комутативності кон'юнкції	$A \wedge B \equiv B \wedge A$
2.	Закон комутативності диз'юнкції	$A \vee B \equiv B \vee A$
3.	Закон асоціативності кон'юнкції	$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
4.	Закон асоціативності диз'юнкції	$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
5.	Перший закон дистрибутивності	$A \wedge (B \vee C) \equiv A \wedge B \vee A \wedge C$
6.	Другий закон дистрибутивності	$A \vee B \wedge C \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
7.	Закон подвійного заперечення	$\overline{\overline{A}} \equiv A$
8.	Закон суперечності	$A \wedge \overline{A} \equiv 0$
9.	Закон виключення третього	$A \vee \overline{A} \equiv 1$
10.	Перший закон де Моргана	$\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$
11.	Другий закон де Моргана	$\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$
12.	Закон ідемпотентності кон'юнкції	$A \wedge A \equiv A$
13.	Закон ідемпотентності диз'юнкції	$A \vee A \equiv A$
14.	Властивості нуля	$A \wedge 0 \equiv 0, A \vee 0 \equiv A$
15.	Властивості одиниці	$A \wedge 1 \equiv A, A \vee 1 \equiv 1$
16.	Перший закон поглинання	$A \vee A \wedge B \equiv A$
17.	Другий закон поглинання	$A \wedge (A \vee B) \equiv A$
18.	Модифікований закон поглинання	$A \vee \overline{A} \wedge B \equiv A \vee B$
19.	Закон усунення імплікації	$A \Rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B$
20.	Перший закон усунення еквівалентності	$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
21.	Другий закон усунення еквівалентності	$A \Leftrightarrow B \equiv \overline{A} \wedge \overline{B} \vee A \wedge B$

Теорема 3.1. Формули φ та ψ рівносильні тоді і тільки тоді, коли $\models (\varphi \Leftrightarrow \psi)$ (формула $\varphi \Leftrightarrow \psi$ є загальнозначущою).

Теорема 3.2. Якщо φ_1 — підформула формули ψ_1 , $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ і формула ψ_2 отримується з формули ψ_1 заміною підформули φ_1 на φ_2 , то формули ψ_1 та ψ_2 рівносильні.

Теорема 3.2 та закони 1-21 використовується для побудови ланцюжків рівносильних формул.

Наприклад, формули $\overline{A \wedge B} \wedge \overline{A} \Rightarrow C$ та $(\overline{A} \vee \overline{B}) \wedge \overline{A} \Rightarrow C$ рівносильні, оскільки за першим законом де Моргана підформула $\varphi_1 = \overline{A \wedge B}$ першої формули рівносильна підформулі $\varphi_2 = \overline{A} \vee \overline{B}$ другої формули.

Приклад 3.10. Для формули $\varphi = \overline{A} \wedge B \Rightarrow (C \Leftrightarrow \overline{A})$ побудувати рівносильну їй формулу, яка би містила лише атоми, символи операцій заперечення та диз'юнкції.

Розв'язання.

$$\begin{aligned}\bar{A} \wedge B \Rightarrow (C \Leftrightarrow \bar{A}) &\stackrel{19}{\equiv} \overline{\bar{A} \wedge B} \vee (C \Leftrightarrow \bar{A}) \stackrel{4,10}{\equiv} \bar{\bar{A}} \vee \bar{B} \vee (C \Leftrightarrow \bar{A}) \stackrel{4,7,21}{\equiv} A \vee \bar{B} \vee \bar{C} \wedge \bar{A} \vee C \wedge \bar{A} \stackrel{7}{\equiv} \\ &\equiv A \vee \bar{B} \vee \bar{C} \wedge A \vee C \wedge \bar{A} \stackrel{7}{\equiv} A \vee \bar{B} \vee \bar{C} \wedge A \vee C \wedge \bar{A} \stackrel{7,10}{\equiv} A \vee \bar{B} \vee \bar{C} \vee \bar{A} \vee C \vee A.\end{aligned}$$

Приклад 3.11. Перевірити, чи є рівносильними формули

$$\varphi_1 = (Q \Rightarrow P) \vee (\bar{P} \Leftrightarrow Q \wedge R) \text{ та } \varphi_2 = (\bar{P} \Rightarrow Q \wedge R) \vee (Q \Rightarrow P \wedge \bar{Q}).$$

Розв'язання. Спробуємо звести формули до одного і того самого вигляду.

$$\begin{aligned}\varphi_1 = (Q \Rightarrow P) \vee (\bar{P} \Leftrightarrow Q \wedge R) &\stackrel{4,7,19,21}{\equiv} \bar{Q} \vee P \vee P \wedge \overline{Q \wedge R} \vee \bar{P} \wedge Q \wedge R \stackrel{16}{\equiv} \bar{Q} \vee P \vee \bar{P} \wedge Q \wedge R \stackrel{18}{\equiv} \\ &\stackrel{18}{\equiv} \bar{Q} \vee P \vee Q \wedge R \stackrel{18}{\equiv} \bar{Q} \vee P \vee R \stackrel{2}{\equiv} P \vee \bar{Q} \vee R.\end{aligned}$$

$$\varphi_2 = (\bar{P} \Rightarrow Q \wedge R) \vee (Q \Rightarrow P \wedge \bar{Q}) \stackrel{4,7,19}{\equiv} P \vee Q \wedge R \vee \bar{Q} \vee P \wedge \bar{Q} \stackrel{16}{\equiv} P \vee Q \wedge R \vee \bar{Q} \stackrel{18}{\equiv} P \vee \bar{Q} \vee R \equiv \varphi_1.$$

Отже, формули φ_1 та φ_2 є рівносильними.

Приклад 3.12. З використанням рівносильних перетворень довести загальнозначущість формули $\varphi = \overline{\bar{B} \Rightarrow \bar{C}} \Rightarrow (C \Leftrightarrow A \vee C)$.

Розв'язання. Покажемо, що формула $\varphi = \overline{\bar{B} \Rightarrow \bar{C}} \Rightarrow (C \Leftrightarrow A \vee C)$ рівносильна 1.

$$\begin{aligned}\overline{\bar{B} \Rightarrow \bar{C}} \Rightarrow (C \Leftrightarrow A \vee C) &\stackrel{19,21}{\equiv} (\bar{B} \Rightarrow \bar{C}) \vee \bar{C} \wedge \overline{A \vee C} \vee C \wedge (A \vee C) \stackrel{7,17}{\equiv} \\ &\equiv B \vee \bar{C} \vee \bar{C} \wedge \overline{A \vee C} \vee C \stackrel{2,4}{\equiv} \bar{C} \vee C \vee B \vee \bar{C} \wedge \overline{A \vee C} \stackrel{9}{\equiv} 1 \vee B \vee \bar{C} \wedge \overline{A \vee C} \stackrel{15}{\equiv} 1.\end{aligned}$$

Отже, формула φ загальнозначуща.

3.3. Логічне слідування. Аналіз міркувань

Формула φ називається *логічним наслідком* формул $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ (позначається $\varphi_1, \dots, \varphi_m \models \varphi$), якщо на усіх спільних інтерпретаціях змінних, на яких кожна з формул $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ є істинною, формула φ також є істинною.

Приклад 3.13. Перевірити, чи є формули:

а) $\varphi = R \Rightarrow \bar{Q}$;

б) $\psi = Q \Leftrightarrow R$

логічним наслідком формул $\varphi_1 = P \Rightarrow \bar{Q}$, $\varphi_2 = R \Leftrightarrow P$.

Розв'язання. Побудуємо таблиці істинності формул φ_1 , φ_2 , φ та ψ . На трьох виділених у таблиці інтерпретаціях змінних (0,0,0), (0,1,0), (1,0,1) обидві формули φ_1 та φ_2 є істинними. Формула φ також є істинною на цих інтерпретаціях. Тому формула φ є логічним наслідком формул φ_1 та φ_2 .

P	Q	R	$\bar{Q}$	$\varphi_1 = P \Rightarrow \bar{Q}$	$\varphi_2 = R \Leftrightarrow P$	$\varphi = R \Rightarrow \bar{Q}$	$\psi = Q \Leftrightarrow R$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1	0	1

Оскільки $\varphi_1(0,1,0)=1$, $\varphi_2(0,1,0)=1$, а $\psi(0,1,0)=0$, то формула ψ не є логічним наслідком формул φ_1 та φ_2 .

Теорема 3.3. Формула φ є логічним наслідком формул $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ тоді і тільки тоді, коли формула $\psi = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_m \Rightarrow \varphi$ є загальнозначущою.

Доведення. Необхідність. Нехай формула φ є логічним наслідком формул $\varphi_1, \dots, \varphi_m$. Покажемо, що тоді $\psi = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_m \Rightarrow \varphi$ є загальнозначущою.

Будемо вважати, що формули $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ та φ побудовані із атомів $A_1, \dots, A_n$ і нехай $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — довільна інтерпретація формули ψ . Можливими є два випадки:

- а) $\varphi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$ для всіх індексів i , які задовольняють умову $(1 \leq i \leq m)$;
- б) $\varphi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ для деякого індексу i .

У випадку а) з того, що формула φ є логічним наслідком формул $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ випливає, що $\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$. Тоді

$$\psi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1 \wedge \dots \wedge 1 \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1.$$

У випадку б) з того, що $\varphi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ випливає, що

$$\varphi_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \wedge \dots \wedge \varphi_{i-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \wedge 0 \wedge \varphi_{i+1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \wedge \dots \wedge \varphi_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0.$$

Тому

$$\psi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \Rightarrow \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \bar{0} \vee \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1 \vee \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1.$$

Отже, у обох випадках формула ψ є істинною. Оскільки $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — довільна інтерпретація формули ψ , то ψ — загальнозначуща. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай формула ψ є загальнозначущою. Покажемо, що тоді формула φ є логічним наслідком формул $\varphi_1, \dots, \varphi_m$.

Нехай $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — довільна інтерпретація змінних, на якій кожна із формул $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ є істинною. Доведемо, що формула φ також є істинною на цій інтерпретації. Із загальнозначущості формули ψ випливає, що

$$\begin{aligned}
1 = \psi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &\equiv \varphi_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \wedge \dots \wedge \varphi_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \Rightarrow \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \equiv \\
&\equiv 1 \wedge \dots \wedge 1 \Rightarrow \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \equiv 1 \Rightarrow \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \equiv 0 \vee \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \equiv \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n).
\end{aligned}$$

Отже, формула φ є логічним наслідком формул $\varphi_1, \dots, \varphi_m$. Теорему доведено.

Теорема 3.4. Формула φ є логічним наслідком формул $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ тоді і тільки тоді, коли формула $\psi = \overline{\varphi_1} \vee \dots \vee \overline{\varphi_m} \vee \varphi$ є загальнозначущою.

Теорема 3.5. Формула φ є логічним наслідком формул $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ тоді і тільки тоді, коли формула $\psi = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_m \wedge \overline{\varphi}$ є суперечливою.

Приклад 3.14. Перевірити, чи є формула $\varphi = P \vee Q \wedge R$ логічним наслідком формул $\varphi_1 = P \Leftrightarrow \overline{P} \wedge R$ та $\varphi_2 = \overline{R} \Rightarrow Q$.

Розв'язання. Використовуючи теорему 3.5, перевіримо, чи є суперечливою формула $\psi = (P \Leftrightarrow \overline{P} \wedge R) \wedge (\overline{R} \Rightarrow Q) \wedge \overline{P \vee Q \wedge R}$.

$$\begin{aligned}
(P \Leftrightarrow \overline{P} \wedge R) \wedge (\overline{R} \Rightarrow Q) \wedge \overline{P \vee Q \wedge R} &\equiv (\overline{P} \wedge \overline{\overline{P} \wedge R} \vee P \wedge \overline{P} \wedge R) \wedge (R \vee Q) \wedge \overline{P} \wedge \\
&\wedge \overline{Q \wedge R} \equiv (\overline{P} \wedge (P \vee \overline{R}) \vee 0 \wedge R) \wedge (R \vee Q) \wedge \overline{P} \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R}) \equiv (\overline{P} \wedge P \vee \overline{P} \wedge \overline{R}) \wedge \\
&\wedge (R \vee Q) \wedge \overline{P} \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R}) \equiv (0 \vee \overline{P} \wedge \overline{R}) \wedge \overline{P} \wedge (R \vee Q) \wedge (\overline{Q} \vee \overline{R}) \equiv \overline{P} \wedge \overline{R} \wedge
\end{aligned}$$

$$\wedge (R \wedge \overline{Q} \vee Q \wedge \overline{R}) \equiv \overline{P} \wedge \overline{R} \wedge R \wedge \overline{Q} \vee \overline{P} \wedge \overline{R} \wedge Q \wedge \overline{R} \equiv 0 \vee \overline{P} \wedge Q \wedge \overline{R} \equiv \overline{P} \wedge Q \wedge \overline{R}.$$

Формула $\overline{P} \wedge Q \wedge \overline{R}$ не є суперечливою, оскільки вона є істинною на наборі $(0, 1, 0)$. Тому формула φ не є логічним наслідком формул φ_1, φ_2 .

Аналіз міркувань засобами логіки висловлювань полягає у перевірці того, чи є висновки міркування логічним наслідком його засновків (*гіпотез*).

Приклад 3.15. Проаналізувати міркування:

- 1) сьогодні не сонячний день і холодніше, ніж учора;
- 2) ми підемо сьогодні купатися тоді і тільки тоді, якщо сьогодні сонячний день;
- 3) якщо ми не підемо сьогодні купатись, то будемо кататися на човні;
- 4) якщо ми будемо кататися на човні, то повернемося пізно ввечері.

Отже, ми повернемося пізно ввечері.

Розв'язання. Введемо атоми:

- A — сьогодні сонячний день;
- B — сьогодні холодніше, ніж учора;
- C — ми підемо сьогодні купатися;
- D — ми будемо кататися на човні;
- E — ми повернемося пізно ввечері.

Тоді міркування можна записати у вигляді:

- 1) $\bar{A} \wedge B$;
- 2) $C \Leftrightarrow A$;
- 3) $\bar{C} \Rightarrow D$;
- 4) $D \Rightarrow E$.

E .

Перевіримо, чи є висновок міркування логічним наслідком засновків, тобто чи

$$\bar{A} \wedge B, A \Leftrightarrow C, \bar{C} \Rightarrow D, D \Rightarrow E \models E.$$

Для цього розглянемо формулу $\psi = \bar{A} \wedge B \wedge (A \Leftrightarrow C) \wedge (\bar{C} \Rightarrow D) \wedge (D \Rightarrow E) \wedge \bar{E}$ і перевіримо її суперечливість.

$$\begin{aligned} \bar{A} \wedge B \wedge (A \Leftrightarrow C) \wedge (\bar{C} \Rightarrow D) \wedge (D \Rightarrow E) \wedge \bar{E} &\equiv \bar{A} \wedge B \wedge (\bar{A} \wedge \bar{C} \vee A \wedge C) \wedge (C \vee D) \wedge \\ &\wedge (\bar{D} \vee E) \wedge \bar{E} \equiv (\bar{A} \wedge B \wedge \bar{A} \wedge \bar{C} \vee \bar{A} \wedge B \wedge A \wedge C) \wedge (C \vee D) \wedge (\bar{D} \wedge \bar{E} \vee E \wedge \bar{E}) \equiv \\ &\equiv \bar{A} \wedge B \wedge \bar{C} \wedge (C \vee D) \wedge \bar{D} \wedge \bar{E} \equiv \bar{A} \wedge B \wedge \bar{C} \wedge (C \wedge \bar{D} \vee D \wedge \bar{D}) \wedge \bar{E} \equiv \bar{A} \wedge B \wedge \bar{C} \wedge (C \wedge \bar{D} \vee 0) \wedge \\ &\wedge \bar{E} \equiv \bar{A} \wedge B \wedge \bar{C} \wedge C \wedge \bar{D} \wedge \bar{E} \equiv \bar{A} \wedge B \wedge 0 \wedge \bar{D} \wedge \bar{E} \equiv 0. \end{aligned}$$

Отже, формула ψ є суперечливою. Тому міркування є правильним.

3.4. Задачі до розділу

3.4.1. Формули логіки висловлювань.

1. Вказати порядок виконання операцій у формулі φ та перейти від неї до відповідної їй формули за домовленістю:
 - а) $\varphi = (((\neg A) \Rightarrow (B \Leftrightarrow (\neg((C \vee A) \wedge (\neg D))))))$;
 - б) $\varphi = ((P \Rightarrow ((\neg Q) \vee R)) \Leftrightarrow ((\neg P) \wedge (Q \vee (\neg P))))$.
2. Відновити дужки у формулі φ , якщо:
 - а) $\varphi = B \wedge \bar{A} \Rightarrow D \Leftrightarrow (\bar{C} \vee A) \wedge B \Rightarrow \bar{D}$;
 - б) $\varphi = \bar{C} \wedge B \vee D \Leftrightarrow \bar{A} \Rightarrow (D \Leftrightarrow \bar{B}) \vee \bar{C} \wedge A$.
3. Розв'язати логічні рівняння:
 - а) $\bar{Q} \vee P \Rightarrow Q \wedge \bar{R} = 0$.
 - б) $P \Leftrightarrow \bar{Q} \wedge R = \bar{P} \vee R$.
 - в) $\bar{Q} \vee P \Rightarrow Q \wedge \bar{R} = 1$.
 - г) $P \Rightarrow R = \bar{P} \Leftrightarrow Q \vee \bar{R}$.
4. Побудувати таблицю істинності формули φ :
 - а) $\varphi = \bar{P} \vee Q \Rightarrow R \Leftrightarrow \overline{R \vee P \wedge Q}$;
 - б) $\varphi = (P \Rightarrow \bar{Q} \Leftrightarrow R) \vee \overline{\bar{R} \Rightarrow P \wedge \bar{Q}}$.
5. Перевірити, чи є:

- а) виконуваною формула $\varphi = \overline{\overline{A} \wedge C} \Leftrightarrow A \vee (\overline{B} \Rightarrow C)$;
- б) загальнозначущою формула $\varphi = (A \wedge \overline{C} \Leftrightarrow B) \Rightarrow \overline{A \Rightarrow B} \vee (C \Rightarrow B)$;
- в) спростовною формула $\varphi = \overline{C \Rightarrow \overline{B}} \Rightarrow (C \Leftrightarrow C \vee \overline{A})$.
6. З використанням методу від супротивного перевірити, чи є:
- а) суперечливою формула $\varphi = \overline{A \wedge B \Rightarrow (A \vee \overline{A} \wedge C)} \wedge B$;
- б) тотожно істинною формула $\varphi = \overline{\overline{A} \Rightarrow B} \Rightarrow (\overline{A} \vee C \Leftrightarrow \overline{A})$.

3.4.2. Рівносильні перетворення формул алгебри висловлювань

- Для формули φ побудувати рівносильну їй формулу, яка би містила лише атоми та символи операцій диз'юнкції і заперечення:
 - $\varphi = (\overline{Q} \Leftrightarrow P) \Rightarrow P \wedge \overline{R}$;
 - $\varphi = \overline{P} \wedge R \Leftrightarrow Q \Rightarrow P$.
- Для формули φ побудувати рівносильну їй формулу, яка би містила лише атоми і символи операцій кон'юнкції та заперечення.
 - $\varphi = \overline{P} \wedge R \Leftrightarrow Q \Rightarrow P$;
 - $\varphi = (\overline{R} \vee P) \Leftrightarrow (Q \Rightarrow R)$.
- Для формули φ побудувати рівносильну їй формулу, яка би містила лише атоми, символи операцій кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення, причому заперечення відноситься лише до атомів:
 - $\varphi = \overline{R} \vee P \Leftrightarrow Q \Rightarrow R \wedge \overline{P}$;
 - $\varphi = (\overline{P} \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow R \wedge \overline{P})$.
- Перевірити, чи є рівносильними формули φ_1 та φ_2 , якщо
 - $\varphi_1 = (\overline{P} \Leftrightarrow Q \wedge R) \vee (\overline{P} \Rightarrow \overline{Q})$, $\varphi_2 = (Q \Rightarrow P \wedge \overline{Q}) \vee (\overline{P} \Rightarrow Q \wedge R)$.
 - $\varphi_1 = (Q \wedge P \Rightarrow R \vee Q) \wedge (\overline{P} \Leftrightarrow P \wedge Q)$, $\varphi_2 = \overline{P \wedge \overline{Q} \Rightarrow R \Rightarrow P}$.
- Перевірити, чи є:
 - загальнозначущою формула $\varphi = \overline{P \Rightarrow \overline{R}} \Rightarrow (P \vee \overline{Q} \Leftrightarrow P)$;
 - суперечливою формула $\varphi = \overline{Q \wedge P \Rightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{Q} \wedge R)} \wedge P$;
 - спростовною формула $\varphi = \overline{\overline{P} \Rightarrow P \wedge Q} \Rightarrow \overline{R} \vee (\overline{P} \Leftrightarrow R)$;
 - суперечливою формула $\varphi = (R \Rightarrow (P \Leftrightarrow \overline{R})) \wedge (\overline{Q} \Rightarrow P)$.
- Довести, що формула φ є тотожно істинною, якщо:
 - $\varphi = P \wedge \overline{Q} \Rightarrow R \wedge \overline{Q} \Leftrightarrow (\overline{R} \vee Q) \wedge P \Rightarrow Q$;
 - $\varphi = \overline{\overline{A} \wedge B \Rightarrow \overline{C} \wedge B} \Leftrightarrow \overline{\wedge \overline{A} \wedge (C \vee \overline{B})} \Rightarrow \overline{B}$.

3.4.3. Логічне слідування

1. Перевірити, чи є формула φ логічним наслідком формул φ_1 та φ_2 , якщо:
 - а) $\varphi = \bar{Q} \wedge R \vee \bar{P}$, $\varphi_1 = \bar{R} \Rightarrow \bar{Q}$, $\varphi_2 = R \wedge P \Leftrightarrow \bar{P}$;
 - б) $\varphi = P \vee \bar{P} \wedge \bar{Q} \wedge \bar{R}$, $\varphi_1 = \bar{R} \wedge \bar{P} \Leftrightarrow P$, $\varphi_2 = R \Rightarrow \bar{Q} \wedge R$;
 - в) $\varphi = \bar{R} \Rightarrow P \Rightarrow \bar{Q}$, $\varphi_1 = \bar{Q} \wedge \bar{R} \Leftrightarrow Q$, $\varphi_2 = P \Rightarrow \bar{Q} \Leftrightarrow Q \wedge R$.
2. Перевірити, чи має місце логічне слідування $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models \varphi$, якщо:
 - а) $\varphi_1 = \bar{Q} \Rightarrow \bar{Q} \wedge R$, $\varphi_2 = \bar{P} \Leftrightarrow Q$, $\varphi_3 = R \Rightarrow \bar{P} \wedge \bar{R}$, $\varphi = \bar{Q} \Leftrightarrow R$;
 - б) $\varphi_1 = \bar{Q} \Leftrightarrow P \wedge \bar{Q}$, $\varphi_2 = Q \Rightarrow Q \wedge P$, $\varphi_3 = P \Rightarrow \bar{P} \wedge \bar{R}$, $\varphi = \bar{Q} \Leftrightarrow P$.
3. Вказати структуру висловлювання:
 - а) "Якщо студент написав усі модульні роботи на 2, то він складе іспит на два, хіба що він ретельно вивчить усі питання";
 - б) "Якщо клієнт банку не зробить черговий платіж за кредитом або не домовиться про відстрочку, то він втратить майно, під яке брався кредит, хіба що оголосять мораторій на стягнення майна".
4. Проаналізувати міркування:
 - а) Якщо програміст володіє мовою PHP або мовою Java, то він може розробляти серверне ПЗ.
 - б) Програміст може підтримувати сайт тоді і тільки тоді, коли він може розробляти серверне ПЗ.
 - в) Програміст не може підтримувати сайт.
 Отже, програміст не володіє ні PHP, ні Java.
5. Проаналізувати міркування:
 - а) Якщо Сергій оволодіє німецькою мовою, то він зможе читати твори Гете та Шиллера в оригіналі.
 - б) Сергій оволодіє німецькою мовою, якщо почне її вивчати.
 Отже, Сергій зможе читати твори Шиллера в оригіналі тоді і тільки тоді, якщо він почне вивчати німецьку мову.
6. Проаналізувати міркування:
 - а) Число ділиться на 5 тоді і тільки тоді, коли його остання цифра рівна 0 або 5;
 - б) Рівність останньої цифри числа 0 є достатньою для його парності;
 - в) Число ділиться на 5 і є непарним.
 Отже, остання цифра цього числа не рівна 0.
7. Проаналізувати міркування:
 - а) Якщо ціле число більше за одиницю, то воно є простим або складеним.
 - б) Якщо ціле число більше за два, то воно більше за один.
 - в) Якщо ціле число більше за два і парне, то воно складене.
 Отже, якщо непарне ціле число більше за два не є простим, то воно є складеним.
8. Проаналізувати міркування:
 - а) Якщо падає сніг або на дорозі ожеледиця, то машиною важко керувати.

б) Якщо машиною важко керувати, то я спізнюся або зовсім не приїду.

в) Сніг не падає.

Отже, я спізнюся або на дорозі ожеледиця.

3.5. Додаткові задачі

1. Довести, що довільну систему логічних рівнянь можна звести до еквівалентного їй рівняння вигляду $\varphi = 0$.
2. Довести, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ і довільного $0 \leq k \leq 2^n$ знайдеться логічне рівняння із n невідомими, яке має k розв'язків.
3. Довести, що якщо формули $A \vee B$, $A \Rightarrow C$ та $B \Rightarrow D$ загальнозначущі, то формула $C \vee D$ загальнозначуща.
4. Нехай формула φ не містить інші зв'язки, крім $\Leftrightarrow$. Довести, що вона загальнозначуща тоді і тільки тоді, коли у φ кожна змінна входить парну кількість разів.
5. Нехай формула φ не містить інші логічні зв'язки, крім $\Leftrightarrow$ та $\neg$. Довести, що вона загальнозначуща тоді і тільки тоді, коли заперечення та кожна змінна входять у φ парну кількість разів.
6. Довести, що для довільної формули логіки висловлювань можна побудувати рівносильну їй формулу, яка містить лише символи операцій заперечення та диз'юнкції.
7. Довести, що для довільної формули логіки висловлювань можна побудувати рівносильну їй формулу, яка містить лише символи операцій заперечення та імплікації.
8. Довести, що для довільної формули логіки висловлювань можна побудувати рівносильну їй формулу, усі підформули якої є або атомами, або мають вигляд $A|B$, де $A|B = \overline{A \wedge B}$.
9. Довести, що для довільної формули логіки висловлювань можна побудувати рівносильну їй формулу, усі підформули якої є або атомами, або є формулами вигляду $A \wedge B \Rightarrow \bar{C}$.
10. Довести, що для довільної формули логіки висловлювань можна побудувати рівносильну їй формулу, усі підформули якої є або атомами, або є формулами вигляду $A \wedge B \Leftrightarrow A \wedge \bar{C}$.
11. Довести, що для довільної формули логіки висловлювань можна побудувати рівносильну їй формулу, яка містить лише символи операцій кон'юнкції, еквівалентності та щонайбільше одне заперечення.

4. ЛОГІКА ПРЕДИКАТІВ

4.1. Недостатність засобів логіки висловлювань

У природній мові, з потреб формалізації якої виникла математична логіка, часто зустрічаються умовиводи, для опису яких засоби логіки висловлювань є недостатніми. Розглянемо класичну задачу, яка полягає у аналізі наступного міркування:

- 1) Усі люди смертні;
 - 2) Сократ — людина;
- Отже, Сократ смертний.

Уведемо атоми A — "усі люди смертні", B — "Сократ — людина", C — "Сократ — смертний". Тоді для перевірки правильності міркування треба переконатися, чи має місце логічне слідування $A, B \models C$. Формула C є логічним наслідком засновків A та B тоді і тільки тоді, коли формула $A \wedge B \wedge \bar{C}$ є суперечливою. Однак, остання формула не є суперечливою, оскільки вона приймає значення істинності "істина" на інтерпретації $(1, 1, 0)$. Отже, використовуючи засоби логіки висловлювань, одержуємо, що міркування не є правильним. Отриманий результат суперечить "інтуїтивній" правильності міркування. Отримане протиріччя впливає з того, що при використанні логіки висловлювань жодним чином не враховано наявність у атомі A узагальнення "усі", а також відсутній зв'язок між першою гіпотезою та висновком міркування.

У зв'язку з подібними проблемами виникла необхідність удосконалити логіку висловлювань. Розширенням логіки висловлювань є логіка предикатів, у якій введено додаткові поняття "предикат" та "квантор".

4.2. Поняття предиката. Основні означення.

Нехай задано деякі множини $A_1, \dots, A_n$.

Відображення $f: A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow \{0, 1\}$ називається n -місним предикатом, визначеним на множинах $A_1, \dots, A_n$.

Множини $A_1, \dots, A_n$ називаються базисними множинами предиката $f(x_1, \dots, x_n)$. Якщо $A_1 = \dots = A_n = A$, то предикат f називається однорідним предикатом на множині A .

Якщо у означенні покласти $n=0$, то отримуємо нуль-місний предикат, який є логічною константою (0 або 1).

Якщо базисні множини предиката скінченні, то предикат можна задати за допомогою таблиці значень.

Приклад 4.1. Нехай $f(x, y)$ — однорідний двомісний предикат, визначений на множині $A = \{1, 3\}$, для якого

$$f(1,1)=1, f(1,3)=0, f(3,1)=1, f(3,3)=1.$$

Тоді значення предиката f можна зобразити у вигляді наступної таблиці:

x	y	$f(x, y)$
1	1	1
1	3	0
3	1	1
3	3	1

Слід зазначити, що можна використовувати іншу структурну форму зображення даних для таблиці значень предиката f :

$$f:$$

$x \backslash y$	1	3
1	1	0
3	1	1

Більш універсальним є спосіб задання предикатів за допомогою *пропозиційних форм*.

Пропозиційною формою $F(x_1, \dots, x_n)$, визначеною на множинах $A_1, \dots, A_n$, називається вираз, у який входять змінні $x_1, \dots, x_n$, і який перетворюється у висловлювання при підстановці замість змінних x_i деяких елементів $a_i \in A_i, i = 1, \dots, n$.

Пропозиційна форма $F(x_1, \dots, x_n)$, визначена на множинах $A_1, \dots, A_n$, однозначно задає предикат $f(x_1, \dots, x_n)$ наступним чином: для довільного $(a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n$

$$\begin{cases} f(a_1, \dots, a_n) = 1, & \text{якщо висловлювання } F(a_1, \dots, a_n) \text{ є істинним,} \\ f(a_1, \dots, a_n) = 0, & \text{якщо висловлювання } F(a_1, \dots, a_n) \text{ є хибним.} \end{cases}$$

Так, предикат $f(x, y)$ із прикладу 4.1 можна задати за допомогою пропозиційної форми $F(x, y): "x \geq y"$.

Приклад 4.2. Розглянемо пропозиційну форму $F(x, y, z): "У місті x проживає від y до z тисяч мешканців"$, визначену на множинах A_1 — множина міст світу, A_2 — множина невід'ємних чисел, $A_3 = A_2$. Ця форма задає тримісний предикат $f(x, y, z)$, значення якого можна обчислити використовуючи цю пропозиційну форму. Так, наприклад,

$$f(\text{Ужгород}, 100, 200) = 1, \quad f(\text{Київ}, 500, 1000) = 0.$$

Впорядкований набір значень аргументів $(a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n$ задовольняє предикат $f(x_1, \dots, x_n)$, якщо $f(a_1, \dots, a_n) = 1$.

Множинною істинності предиката $f(x_1, \dots, x_n)$, визначеного на множинах $A_1, \dots, A_n$, називається множина усіх наборів значень аргументів, які його задовольняють. Множина істинності позначається наступним чином:

$$T(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{(a_1, \dots, a_n) \mid f(a_1, \dots, a_n) = 1\}.$$

Так, предикат $f(x, y)$ із прикладу 4.1 має наступну множину істинності:

$$\{(a_1, a_2) \mid f(a_1, a_2) = 1\} = \{(1, 1), (3, 1), (3, 3)\}.$$

Предикат $f(x_1, \dots, x_n)$ називається *тотожно істинним* на множинах $A_1, \dots, A_n$, якщо його задовольняють усі можливі набори значень аргументів $(a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n$.

Предикат $f(x_1, \dots, x_n)$ називається *виконуваним* на множинах $A_1, \dots, A_n$, якщо його задовольняє хоча б один набір значень аргументів.

Предикат $f(x_1, \dots, x_n)$ називається *тотожно фальшивим* на множинах $A_1, \dots, A_n$, якщо його множина істинності порожня.

Предикат $f(x_1, \dots, x_n)$ називається *спростовним* на множинах $A_1, \dots, A_n$, якщо існує такий набір значень аргументів, який не задовольняє предикат f .

Властивості предиката (наприклад, тотожна істинність, виконуваність чи тотожна фальшивість) залежать від області визначення.

Приклад 4.3. Нехай задано предикат $f(x): x^2 \geq x$. Цей предикат є тотожно істинним на множині цілих чисел, виконуваним та спростовним на множині дійсних чисел та тотожно фальшивим на інтервалі $(0; 1)$.

Оскільки предикати приймають значень із множини $\{0, 1\}$, то над предикатами можна виконувати логічні операції. Легко переконатися, що $T(\bar{f}) = \overline{T(f)}$, $T(f \wedge g) = T(f) \cap T(g)$, $T(f \vee g) = T(f) \cup T(g)$, $T(f \Rightarrow g) = \overline{T(f)} \cup T(g)$.

Приклад 4.4. Побудувати таблицю значень предиката

$$h(x, y) = \overline{f(x, y)} \Leftrightarrow g(x, y),$$

якщо предикати

$$f(x, y): x + 2y \text{ — просте число, } g(x, y): x^2 < 3y$$

визначені на множинах $A_1 = \{1, 3, 4, 6, 9\}$ та $A_2 = \{2, 5, 8, 9\}$. Вказати множину істинності предиката $h(x, y)$.

Розв'язання. Будуємо таблиці значень предикатів f та g :

f :

$x \backslash y$	2	5	8	9
1	1	1	1	1
3	1	1	1	0
4	0	0	0	0
6	0	0	0	0
9	1	1	0	0

g :

$x \backslash y$	2	5	8	9
1	1	1	1	1
3	0	1	1	1
4	0	0	1	1
6	0	0	0	0
9	0	0	0	0

$f(1, 2) = 1$, оскільки $1 + 2 \cdot 2 = 5$ — просте число;

$f(1, 5) = 1$, оскільки $1 + 2 \cdot 5 = 11$ — просте число;

.....
 $f(9,9)=0$, оскільки $9 + 2 \cdot 9 = 27$ не є простим числом;

$g(1,2)=1$, оскільки нерівність $1^2 < 3 \cdot 2$ виконується;

$g(1,5)=1$, оскільки нерівність $1^2 < 3 \cdot 5$ виконується;

.....
 $g(9,9)=0$, оскільки нерівність $9^2 < 3 \cdot 9$ не виконується.

Будуємо таблиці значень предикатів $\overline{f(x,y)}$ та $h(x,y)$:

$\overline{f}$

$x \backslash y$	2	5	8	9
1	0	0	0	0
3	0	0	0	1
4	1	1	1	1
6	1	1	1	1
9	0	0	1	1

h :

$x \backslash y$	2	5	8	9
1	0	0	0	0
3	1	0	0	1
4	0	0	1	1
6	0	0	0	0
9	1	1	0	0

.....
 $h(3,2) = \overline{f(3,2)} \Leftrightarrow g(3,2) = 0 \Leftrightarrow 0 = 1$.

.....
 $h(6,5) = \overline{f(6,5)} \Leftrightarrow g(6,5) = 1 \Leftrightarrow 0 = 0$.

Знаходимо множину істинності:

$$T(h) = \{(x,y) \mid h(x,y)=1\} = \{(3,2), (3,9), (4,8), (4,9), (9,2), (9,5)\}.$$

Нехай предикати $f(x_1, \dots, x_n)$ та $g(x_1, \dots, x_n)$ визначені на множинах $A_1, \dots, A_n$. Предикат $g(x_1, \dots, x_n)$ називається *логічним наслідком* предиката $f(x_1, \dots, x_n)$ (позначається $f(x) \models g(x)$), якщо множина істинності предиката $f(x_1, \dots, x_n)$ є підмножиною множини істинності предиката $g(x_1, \dots, x_n)$: $T(f) \subseteq T(g)$.

Приклад 4.5. Нехай $n=2$, $A_1 = A_2 = \mathbb{Z}$. Предикат $f_2(x,y): x^2 > y$ є логічним наслідком предиката $f_1(x,y): x > y$. Якщо ж $A_1 = A_2 = [0, 1]$, то предикат f_1 є логічним наслідком предиката f_2 .

Приклад 4.6. Предикати $f_1(x,y)$ та $f_2(x,y)$ мають наступні таблиці значень:

f_1 :

$x \backslash y$	a	b	c	d
1	1	1	1	1
2	1	1	1	0

f_2 :

$x \backslash y$	a	b	c	d
1	1	0	1	1
2	0	1	0	0

3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	1	1	0	0

3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	1	0	0	0

Перевірити, чи є один з предикатів наслідком іншого.

Розв'язання. З таблиць значень видно, що

$$T(f_2) = \{(x, y) \mid f_2(x, y) = 1\} \subset \{(x, y) \mid f_1(x, y) = 1\} = T(f_1).$$

Отже, предикат f_1 є логічним наслідком предиката f_2 .

4.3. Квантори

Нехай $f(x)$ — одномісний предикат, визначений на множині A .

Універсальним висловлюванням, яке відповідає предикату $f(x)$, називається висловлювання "усі елементи множини A задовольняють предикат $f(x)$ ", яке є істинним тоді і тільки тоді, коли предикат $f(x)$ є тотожно істинним. Універсальне висловлювання позначається $\forall x f(x)$ і читається «для всіх $x \in A$ $f(x)$ є істинним». Знак " $\forall$ " називається *квантором загальності*.

Екзистенціальним висловлюванням, яке відповідає предикату $f(x)$, називається висловлювання "хоча б один елемент множини A задовольняє предикат $f(x)$ ", яке є хибним тоді і тільки тоді, коли предикат $f(x)$ є тотожно фальшивим. Екзистенціальне висловлювання позначається $\exists x f(x)$ і читається "існує таке $x \in A$, що $f(x)$ є істинним". Знак " $\exists$ " називається *квантором існування*.

Квантори впливають на предикати, які розташовані безпосередньо за операцією квантифікації.

Приклад 4.7. Значення предикатів f_1, f_2, f_3 вказані у наступній таблиці:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
a	1	1	0
b	1	0	0
c	1	1	0

Тоді

$$\forall x f_1(x) = 1, \exists x f_1(x) = 1,$$

$$\forall x f_2(x) = 0, \exists x f_2(x) = 1,$$

$$\forall x f_3(x) = 0, \exists x f_3(x) = 0.$$

Якщо предикат $f(x)$ визначений на скінченній множині $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, то операції квантифікації (навішування кванторів) можна записати наступним чином:

$$\forall x f(x) = f(a_1) \wedge f(a_2) \wedge \dots \wedge f(a_m),$$

$$\exists x f(x) = f(a_1) \vee f(a_2) \vee \dots \vee f(a_m).$$

Після виконання операції квантифікації по змінній ця змінна стає *пов'язаною*. В результаті навішування квантора на одномісний предикат отримується нуль-місний предикат (константа 0 або 1). Якщо змінна не пов'язана ніяким квантором, то вона називається *вільною*. Вільна змінна може приймати усі значення із відповідної базисної множини.

Квантори можна також застосовувати (можливо неодноразово) і до багатомісних предикатів. Кожне застосування операції квантифікації по одному аргументу зменшує кількість вільних змінних (і відповідно місність предиката) на 1.

Приклад 4.8. Двомісний предикат $f(x, y)$ має наступну таблицю значень:

Вказати таблиці значень предикатів

а) $\forall x f(x, y), \exists x f(x, y), \forall y f(x, y), \exists y f(x, y)$,

б) $\forall x \forall y f(x, y), \forall x \exists y f(x, y), \exists x \forall y f(x, y), \exists x \exists y f(x, y)$,

в) $\forall y \forall x f(x, y), \forall y \exists x f(x, y), \exists y \forall x f(x, y), \exists y \exists x f(x, y)$.

$x \backslash y$	a	b	c	d
1	1	1	1	1
2	1	1	1	0
3	0	1	0	0
4	0	1	0	0
5	1	1	0	0

Розв'язання.

а) Позначимо

$$g_1(y) = \forall x f(x, y), g_2(y) = \exists x f(x, y), h_1(x) = \forall y f(x, y), h_2(x) = \exists y f(x, y).$$

Тоді

$$g_1(a) = \forall x f(x, a) = 0, g_1(b) = \forall x f(x, b) = 1, g_1(c) = \forall x f(x, c) = 0,$$

$$g_1(d) = \forall x f(x, d) = 0.$$

$$g_2(a) = \exists x f(x, a) = 1, g_2(b) = \exists x f(x, b) = 1, g_2(c) = \exists x f(x, c) = 1,$$

$$g_2(d) = \exists x f(x, d) = 1.$$

Предикати $g_1(y)$ та $g_2(y)$ мають наступні таблиці значень:

Для предиката $h_1(x)$ маємо:

$$h_1(1) = \forall y f(1, y) = 1, h_1(2) = \forall y f(2, y) = 0, h_1(3) = \forall y f(3, y) = 0,$$

$$h_1(4) = \forall y f(4, y) = 0, h_1(5) = \forall y f(5, y) = 0.$$

Так само обчислюється предикат $h_2(x)$. Значення предикатів $h_1(x)$ та $h_2(x)$ наведені у наступній таблиці:

б)-в) Наведемо лише деякі значення

$$\forall x \forall y f(x, y) = \forall x h_1(x) = 0, \forall x \exists y f(x, y) = \forall x h_2(x) = 1.$$

$$\exists x \forall y f(x, y) = \exists x h_1(x) = 1, \forall y \exists x f(x, y) = \forall y g_2(y) = 1.$$

y	$g_1(y)$	$g_2(y)$
a	0	1
b	1	1
c	0	1
d	0	1
x	$h_1(x)$	$h_2(x)$
1	1	1
2	0	1
3	0	1
4	0	1
5	0	1

4.4. Властивості операцій квантифікації:

1. Якщо предикат f не залежить від змінної y , то

$$\delta x f(x) = \delta y f(y), \delta \in \{\forall, \exists\} \text{ — правила перейменування пов'язаних змінних.}$$

2. $\delta x \delta y f(x, y) = \delta y \delta x f(x, y), \delta \in \{\forall, \exists\}$ — правила перестановки однойменних кванторів.

3.
$$\left. \begin{aligned} \delta x f(x) \vee g &= \delta x (f(x) \vee g) \\ \delta x f(x) \wedge g &= \delta x (f(x) \wedge g) \end{aligned} \right\} \text{ — правила внесення під знак квантора (} g \text{ не залежить від } x \text{).}$$

4. $\forall x f(x) \wedge \forall x g(x) = \forall x (f(x) \wedge g(x))$ — *пронесення* квантора загальності через кон'юнкцію.

5. $\exists x f(x) \vee \exists x g(x) = \exists x (f(x) \vee g(x))$ — *пронесення* квантора існування через диз'юнкцію.

6.
$$\left. \begin{aligned} \overline{\forall x f(x)} &= \exists x \overline{f(x)} \\ \overline{\exists x f(x)} &= \forall x \overline{f(x)} \end{aligned} \right\} \text{ — закони де Моргана для кванторів.}$$

Приклад 4.9. Побудувати таблицю значень предиката

$$\overline{\overline{\exists x f(x, y)} \Rightarrow \exists z g(x, z)},$$

за умови, що таблиці значень предикатів f та g мають вигляд:

f :

$x \backslash y$	2	5	8	9
a	1	1	1	1
b	1	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	1	0
e	1	1	1	0

g :

$x \backslash y$	2	5	8	9
a	1	1	1	1
b	0	1	1	1
c	0	0	1	1
d	0	0	0	0
e	0	0	0	0

Розв'язання. Застосуємо першу та шосту властивості операцій квантифікації. Результатом виконання операцій над предикатами є двомісний предикат

$$h(x, y) = \overline{\overline{\exists x f(x, y)} \Rightarrow \exists z g(x, z)} = \forall x f(x, y) \Rightarrow \exists y g(x, y) = f_1(y) \Rightarrow g_1(x),$$

де $f_1(y) = \forall x f(x, y)$, $g_1(x) = \exists y g(x, y)$ (ми застосували правило перейменування для змінних z та y). Таблиці значень предикатів f_1 та g_1 :

y	2	5	8	9
$f_1(y)$	0	0	1	0

x	a	b	c	d	e
$g_1(x)$	1	1	1	0	0

$$h(a,2)=f_1(2)\Rightarrow g_1(a)=0\Rightarrow 1=1, \quad h(a,5)=f_1(5)\Rightarrow g_1(a)=0\Rightarrow 1=1, \\ h(d,8)=f_1(8)\Rightarrow g_1(d)=1\Rightarrow 0=0, \quad h(e,9)=f_1(9)\Rightarrow g_1(e)=0\Rightarrow 0=1.$$

Тоді отримуємо наступну таблицю для $h(x,y)$:

$x \backslash y$	2	5	8	9
a	1	1	1	1
b	1	1	1	1
c	1	1	1	1
d	1	1	0	1
e	1	1	0	1

4.5. Використання логіки предикатів

Засоби логіки предикатів використовуються для формулювання думок та запису тверджень.

Приклад 4.10. За допомогою предикатів та кванторів записати речення:

- а) кожний другокурсник успішно склав іспит з історії або програмування;
- б) сума довільних двох додатних чисел — додатне число;
- в) кожне дійсне число крім нуля має обернене число, яке визначається однозначно.

Розв'язання.

а) Нехай A — множина усіх другокурсників. Розглянемо наступні предикати на множині A :

$f(x)$: x склав іспит з історії;

$g(x)$: x склав іспит з програмування.

Тоді речення можна записати у вигляді $\forall x(f(x) \vee g(x))$.

Якщо ж нас цікавлять інші особи крім другокурсників, то потрібно додатково розглянути предикат $h(x)$: x — другокурсник. Тоді речення можна записати у вигляді $\forall x(h(x) \Rightarrow f(x) \vee g(x))$.

Цей приклад можна розв'язати, замінивши одномісні предикати $f(x)$ та $g(x)$ більш загальним двомісним предикатом $l(x,y)$: x склав іспит з дисципліни y , визначеним, наприклад, на множинах людей та навчальних дисциплін. Тоді отримаємо запис

$$\forall x(h(x) \Rightarrow l(x, \text{історія}) \vee l(x, \text{програмування}))$$

б) Уведемо змінні x та y та перепишемо це речення так: «Два довільні додатні числа x та y дають у сумі додатне число». Тоді отримаємо шуканий запис

$$\forall x \forall y ((x > 0) \wedge (y > 0) \Rightarrow (x + y > 0)).$$

Базисною множиною є множина дійсних чисел.

в) Для запису першої частини речення можна спочатку переписати його у вигляді «Для кожного дійсного числа x , відмінного від нуля, існує таке дійсне число y , що $xy = 1$ ». Для опису однозначності можемо скористатися тим, що для довільного z , яке є оберненим до x має виконуватися умова $z = y$. Остаточно отримуємо:

$$\forall x ((x \neq 0) \Rightarrow \exists y ((xy = 1) \wedge \forall z ((xz = 1) \Rightarrow (z = y))))).$$

Приклад 4.11. Проаналізувати міркування

1) Усі люди смертні;

2) Сократ — людина;

Отже, Сократ смертний.

Розв'язання. Нехай A — множина усіх живих істот. Уведемо у розгляд наступні предикати на множині A :

$f(x)$: x — людина,

$g(x)$: x — смертний,

і нехай a = Сократ. Тоді міркування запишеться у такому вигляді:

1) $\forall x (f(x) \Rightarrow g(x))$ (усі люди смертні).

2) $f(a)$ (Сократ — людина).

Висновок $g(a)$ (Сократ — смертний).

Для перевірки правильності міркування потрібно перевірити, чи впливає висновок міркування із засновків 1) та 2). Для цього потрібно дослідити, чи є тотожно фальшивим предикат

$$\forall x (f(x) \Rightarrow g(x)) \wedge f(a) \wedge \overline{g(a)}.$$

Внесемо $f(a) \wedge \overline{g(a)}$ у область дії квантора. Отримаємо

$$\forall x (f(x) \Rightarrow g(x)) \wedge f(a) \wedge \overline{g(a)} = \forall x ((\overline{f(x)} \vee g(x)) \wedge f(a) \wedge \overline{g(a)}) = \forall x h(x),$$

де $h(x) = (\overline{f(x)} \vee g(x)) \wedge f(a) \wedge \overline{g(a)}$.

Оскільки

$$h(a) = (\overline{f(a)} \vee g(a)) \wedge f(a) \wedge \overline{g(a)} = \overline{f(a)} \wedge f(a) \wedge \overline{g(a)} \vee g(a) \wedge f(a) \wedge \overline{g(a)} = 0,$$

то предикат $h(x)$ не є тотожно істинним.

Тому $\forall x h(x) = 0$, а отже міркування є правильним.

Приклад 4.12. Записати принцип математичної індукції з використанням логіки предикатів.

Розв'язання. $P(1) \wedge \forall n(P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n P(n)$.

Приклад 4.13. Записати на мові логіки предикатів категоричні судження Аристотеля: «Усі $S \in P$ » (загальноствердне), «Деякі $S \in P$ » (частковоствердне), «Жоден S не $\in P$ » (загальнозаперечне), «Деякі S не $\in P$ » (частковозаперечне). Зобразити співвідношення між S та P на діаграмі Венна.

1. Запишемо загальноствердне судження на мові логіки предикатів:

$$\forall x(S(x) \Rightarrow P(x))$$

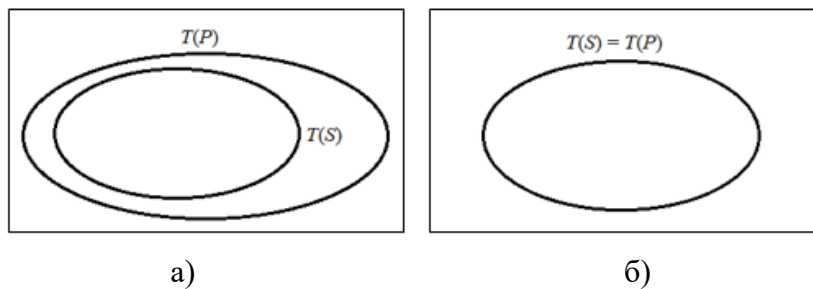


Рис. 4.1. Можливі співвідношення між S та P у випадку загальноствердного судження

2. $\exists x(S(x) \wedge P(x))$

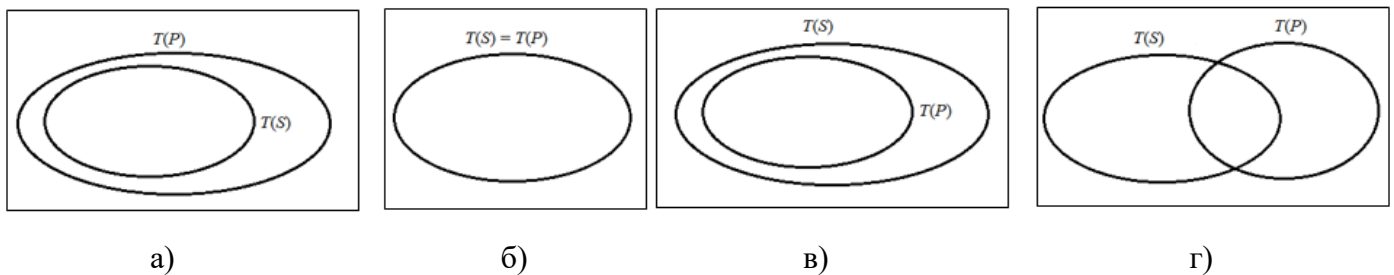


Рис. 4.2. Можливі співвідношення між S та P у випадку частковоствердного судження

3. $\forall x(S(x) \Rightarrow \overline{P(x)})$

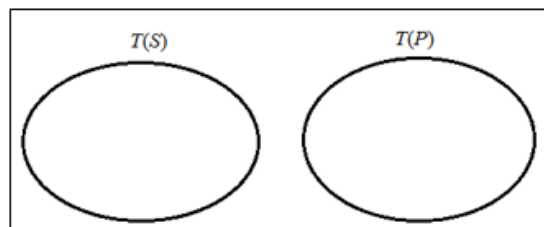


Рис. 4.3. Можливі співвідношення між S та P у випадку загальнозаперечного судження

4. $\exists x(S(x) \wedge \overline{P(x)})$

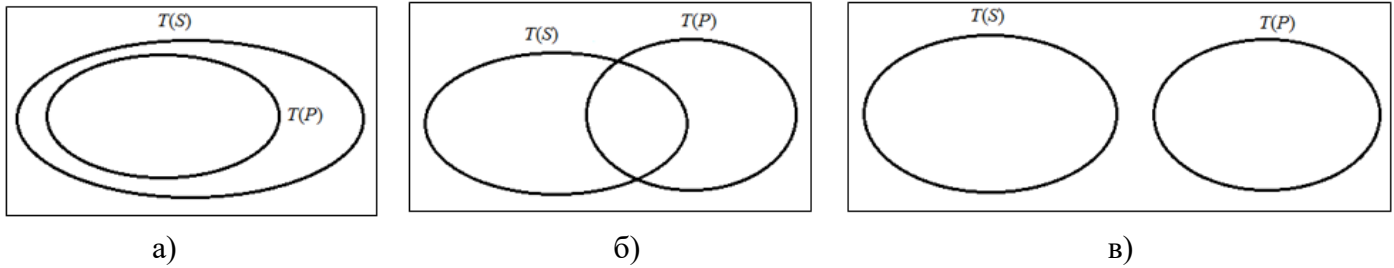


Рис. 4.4. Можливі співвідношення між S та P у випадку частковозаперечного судження

Приклад 4.14. Проаналізувати міркування про Сократа з використанням діаграм Венна.

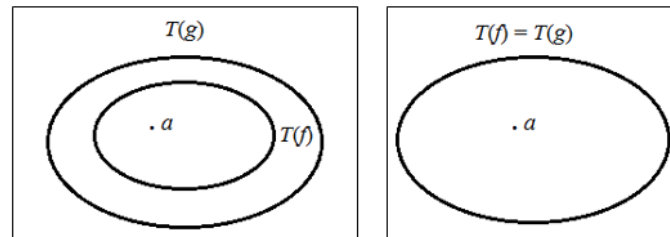


Рис. 4.5. Діаграми для задачі про Сократа

Розв'язання. Skorистаємося позначеннями прикладу 4.11. Перша гіпотеза — загальноствердне судження, якому відповідає діаграма, наведена на рис. 4.2. Друга гіпотеза рівносильна тому, що $a \in T(f)$. Тоді на обидвох діаграмах $a \in T(g)$, що рівносильно тому, що висновок міркування є істинним.

Приклад 4.15. Нехай $f(x)$, $g(x)$ — предикати визначені на деякій множині A . Чи обов'язково $\forall x(f(x) \Rightarrow g(x)) \models \exists x(g(x) \wedge \overline{f(x)})$?

Розв'язання. Нехай $h(x) = g(x) \wedge \overline{f(x)}$. Перевіримо істинність $\exists x h(x)$ у випадку, істинності $\forall x(f(x) \Rightarrow g(x))$. Якщо $\forall x(f(x) \Rightarrow g(x)) = 1$, то з властивості загальноствердного судження випливає, що має місце одне з двох можливих співвідношень між множинами істинності предикатів f та g (див. рис. 4.6).

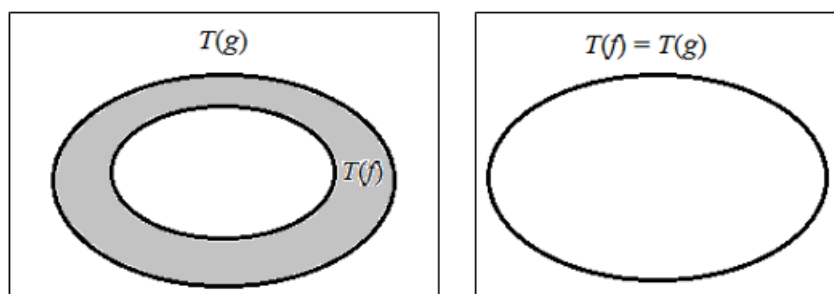


Рис. 4.6. Діаграми для прикладу 4.15 (кольором виділено множину $T(g) \setminus T(f)$)

Істинність $\exists x h(x)$ рівносильна тому, що множина $T(h)$ є непорожньою. Легко бачити, що $T(h) = T(g) \cap \overline{T(f)} = T(g) \setminus T(f)$. Тому два обидвох діаграм на рис. 4.6. треба перевірити, чи є непорожньою множина $T(g) \setminus T(f)$. Оскільки у випадку $f = g$

$T(g) \setminus T(f) = \emptyset$, то у цьому випадку $\exists x h(x) = 0$. Тому $\exists x (g(x) \wedge \overline{f(x)})$ не є логічним наслідком $\forall x (f(x) \Rightarrow g(x))$.

Приклад 4.16. Проаналізувати міркування:

1. Кожний першокурсник знайомий з кимось із студентів другого курсу.

2. Всі другокурсники склали залік з дискретної математики.

Отже, кожен першокурсник знайомий з кимось, хто склав залік з дискретної математики.

Розв'язання. Нехай A — множина людей. Розглянемо наступні предикати на множині A :

$f(x)$: x — першокурсник;

$g(x)$: x — другокурсник;

$h(x, y)$: x та y — знайомі;

$k(x)$: x склав залік з дискретної математики.

Запишемо гіпотези та висновок з використанням уведених предикатів:

1. $\forall x (f(x) \Rightarrow \exists y (h(x, y) \wedge g(y)))$.

2. $\forall x (g(x) \Rightarrow k(x))$.

$\forall x (f(x) \Rightarrow \exists y (h(x, y) \wedge k(y)))$.

Розглянемо два способи аналізу міркування:

Перший спосіб. Припустимо, що обидві гіпотези є істинними. Перевіримо, чи є істинним висновок міркування. Запишемо його у вигляді $\forall x l(x)$, де $l(x) = f(x) \Rightarrow \exists y (h(x, y) \wedge k(y))$ і перевіримо, чи є істинним $l(a)$ для довільного $a \in A$.

Якщо a не є першокурсником, то $f(a) = 0$. Тому $l(a) = f(a) \Rightarrow \exists y (h(a, y) \wedge k(y)) = 0 \Rightarrow \exists y (h(a, y) \wedge k(y)) = 1$.

Нехай a є першокурсником. Тоді $f(a) = 1$. З істинності першої гіпотези випливає, що $f(a) \Rightarrow \exists y (h(a, y) \wedge g(y)) = 1$. З урахуванням $f(a) = 1$ це рівносильно істинності $\exists y (h(a, y) \wedge g(y))$, а істинність $l(a) = f(a) \Rightarrow \exists y (h(a, y) \wedge k(y))$ — істинності твердження $\exists y (h(a, y) \wedge k(y))$. Перейменуємо змінну y на x та перевіримо, чи є істинним $\exists x (h(a, x) \wedge k(x))$ у випадку істинності гіпотез $\exists x (h(a, x) \wedge g(x))$ та $\forall x (g(x) \Rightarrow k(x))$. Гіпотезі $\forall x (g(x) \Rightarrow k(x))$ відповідає загальноствердне судження, із істинності якого випливає, що множини істинності предикатів $g(x)$ та $k(x)$ пов'язані одним із співвідношень, які наведені на рис. 4.7.

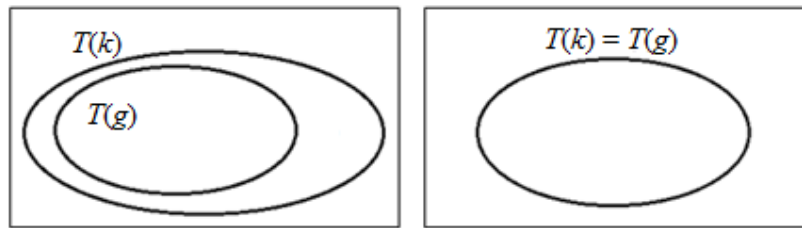


Рис. 4.7. Діаграми до прикладу 4.16

Гіпотезі $\exists x(h(a, x) \wedge g(x))$ відповідає частковоствердне судження, проілюстроване на рис. 4.8.

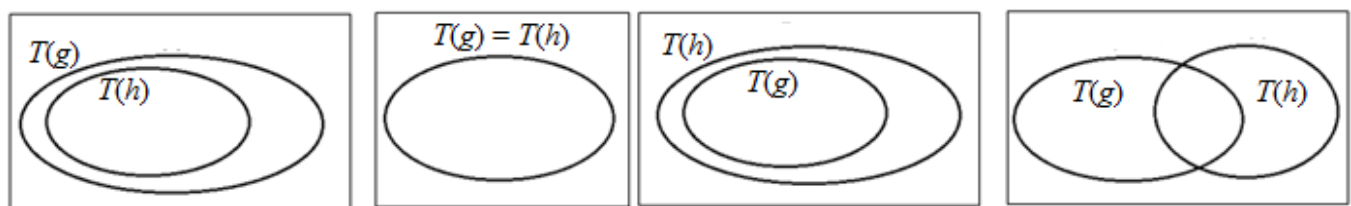


Рис. 4.8. Діаграми до прикладу 4.16

Нехай де $T(h)$ — множина істинності предиката $h(a, x)$. Оскільки $T(g) \subset T(k)$ і $T(h) \cap T(g)$ — непорожня множина (див. рис. 4.7 та 4.8), то множина $T(h) \cap T(k)$ також є непорожньою. Отже, $\exists x(h(a, x) \wedge k(x))$ — істинне висловлювання, а тому і $l(a) = f(a) \Rightarrow \exists y(h(a, y) \wedge k(y))$ набуває істинне значення.

Отже, $l(a)$ є істинним для довільного $a \in A$, що рівносильно істинності $\forall x l(x)$. Звідси випливає, що висновок міркування є істинним. Тому міркування є правильним.

Другий спосіб. Нехай $h_1(x) = f(x) \Rightarrow \exists y(l(x, y) \wedge g(y))$, $h_2(x) = g(x) \Rightarrow k(x)$, $c(x) = f(x) \Rightarrow \exists y(l(x, y) \wedge k(y))$. Припустимо, що міркування не є правильним. Тоді

$$\begin{cases} \forall x h_1(x) = 1, \\ \forall x (g(x) \Rightarrow k(x)) = 1, \\ \forall x c(x) = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

З останньої рівності системи (4.1) випливає, що знайдеться таке $a \in A$, що $c(a) = 0$. Тому $f(a) \Rightarrow \exists y(l(a, y) \wedge k(y)) = 0$. Звідси $f(a) = 1$ і

$$\exists y(l(a, y) \wedge k(y)) = 0. \quad (4.2)$$

З першої рівності у (4.1) випливає, що $h_1(a) = 1$. Оскільки

$$h_1(a) = f(a) \Rightarrow \exists y(l(a, y) \wedge g(y)) = 1 \Rightarrow \exists y(l(a, y) \wedge g(y)) = \exists y(l(a, y) \wedge g(y)),$$

то $\exists y(l(a, y) \wedge g(y)) = 1$. Тому знайдеться таке $b \in A$, що

$$\begin{cases} l(a, b) = 1, \\ g(b) = 1. \end{cases} \quad (4.3)$$

З другої рівності системи (4.1) випливає, що $h_2(b) = 1$. Тому $g(b) \Rightarrow k(b) = 1$. Оскільки у (4.3) $g(b) = 1$, то $k(b) = 1$. З останньої рівності та (4.3) випливає, що

$$\begin{cases} l(a, b) = 1, \\ k(b) = 1, \end{cases}$$

а отже $l(a, b) \wedge k(b) = 1$. Тому $\exists y(l(a, y) \wedge k(y)) = 1$. Остання рівність суперечить (4.2). Отже, наше припущення хибне, і міркування є правильним.

4.6. Задачі до розділу

4.6.1. Предикати. Операції над предикатами

- Вказати, яким є (тотожно істинним, тотожно фальшивим, виконуваним чи спростованим) предикат $f(x): x^2 + 8x + 15 \geq 0$, визначений на множині:
 - натуральних чисел;
 - цілих чисел.
- Вказати, яким є (тотожно істинним, тотожно фальшивим чи виконуваним) предикат $f(x): 3^x \leq \frac{1}{9}$, визначений на множині:
 - натуральних чисел;
 - цілих чисел.
- Вказати, до якого типу (тотожно істинні, тотожно фальшиві, спростовні чи виконувані) належить однорідний двомісний предикат $f(x, y): x^2 + y^2 \geq 2$, визначений на множині:
 - $\mathbb{Z}$;
 - $\mathbb{N}$;
 - $[0, 1)$.
- Вказати, до якого типу належить однорідний предикат $f(x, y): -2x \leq x^2 + y^2$, визначений на множині:
 - $\mathbb{Z}$;
 - $\mathbb{N}$;
 - $(0, 1)$.
- Вказати множину істинності предиката $f(x, y) \Rightarrow \overline{g(y)} \wedge h(x)$, якщо предикати $f(x, y): x + y$ — просте число, $g(x): x^2 + 3$ кратно 4, $h(x): "x$ кратно 3" визначені на множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

6. Вказати множину істинності предиката $g(x) \vee h(y) \Leftrightarrow \overline{f(x,y)}$, якщо предикати $f(x,y): x^2 + y^2$ — просте число, $g(x): |x-3| > 2$, $h(x): "x \text{ кратне } 4"$ визначені на множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
7. Перевірити, чи є один з предикатів $f(x)$, $g(x)$, визначених на множині цілих чисел, наслідком іншого, якщо $f(x): x$ — парне число, $g(x): x^2 - 14x + 24 = 0$.
8. Перевірити, чи є один з предикатів $f(x)$, $g(x)$, визначених на множині цілих чисел, наслідком іншого, якщо $f(x): x$ — просте число, $g(x): x^2 - 5x + 6 \leq 0$.
9. Вкажіть до якого типу (тотожно істинні, тотожно фальшиві чи виконувані) належать предикати, визначені на множині цілих чисел наступним чином:
- $f(x,y): x^2 + y^2 > 0$;
 - $\exists x(x^2 < y)$;
 - $\forall y(5^{x+y} > 0)$;
 - $\forall y(x^2 + 4x + y^2 > 0)$;
 - $f(x): \log_{0,3}(1 + x^2) \geq 0$.
10. Вкажіть множину істинності наступних предикатів, визначених на множині натуральних чисел:
- $f(x,y): x^2 - y^2 \leq 0$;
 - $\forall y(x < y^2)$;
 - $\forall x(y^x > 2)$;
 - $\forall x \exists y(y + z > 3^x)$;
 - $\forall y(1 + \log_2 x \leq y)$.
11. Предикати $f(x,y): (y+1)/(x-1)$ — ціле число та $g(x): x^2 - 10x + 16 = 0$ визначені на множині $A = \{2, 3, 5, 7, 9, 13\}$. Перевірити, чи є один із предикатів $\exists y f(x,y)$ та $g(x)$ наслідком іншого.
12. Перевірити, чи є один з предикатів $f(x)$, $g(x)$, визначених на множині цілих чисел, наслідком іншого. Відповідь обґрунтувати.
- $f(x): x$ — просте число, $g(x): x^2 - 7x + 10 \leq 0$.
 - $f(x): x$ — число Фібоначчі, $g(x): x^3 \geq 125$.
 - $f(x): \exists y(3^y \leq x)$, $g(x): \forall y(y^2 + 1 > x)$.

13. Вказати множину істинності предиката $\overline{\exists z(f(z,y) \Leftrightarrow g(z))}$, якщо предикати $f(x,y): x^2 + y$ — складене число та $g(x): x^2 + 7 \equiv 3 \pmod{4}$ визначені на множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
14. Обчислити $\forall x(\exists y f(x,y) \Rightarrow \overline{g(x)})$, якщо предикати $f(x,y): x^2 + y^2$ — просте число, $g(x): 2x^2 + 3$ кратне 5 визначені на множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
15. Вказати множину істинності предиката $\exists z(f(z,y) \wedge g(z,y))$, якщо $f(x,y): x < y$ — однорідний двомісний предикат, визначений на множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $g(x,y)$ — однорідний двомісний предикат на множині A , множина істинності якого рівна $\{(2,5), (3,2), (4,7), (7,7), (7,8)\}$.
16. Вказати таблицю значень предиката $\exists x f(x,y) \Rightarrow \overline{\forall z g(x,z)}$, якщо двомісні предикати $f(x,y): y^2 > 2x + 10$ та $g(x,y): "x + y \text{ кратне } 6"$ визначені на множинах $A_1 = \{1, 3, 4, 7, 8, 9\}$ та $A_2 = \{-5, 0, 3, 5, 7\}$.

4.6.2. Аналіз міркувань засобами логіки предикатів

1. Вказати структуру міркування:
 - а) Всі студенти крім першокурсників можуть розв'язати цю задачу, якщо хоча б один школяр може це зробити.
 - б) Петро — школяр і не може розв'язати цю задачу.
 - в) Іван — студент-першокурсник і також не може розв'язати цю задачу.
 Отже, задача не має розв'язку.
2. Вказати структуру міркування:
 - а) Іван мало вчиться.
 - б) Кожний, хто мало вчиться, не зможе скласти іспит з вищої математики, хіба що йому пощастить або допоможе товариш.
 - в) Жодний товариш не допоможе Івану.
 Отже, якщо Івану не пощастить, то він не зможе скласти іспит з вищої математики.
3. Проаналізувати міркування:
 - а) Деякі, але не усі люди щирі.
 - б) Не усі щирі люди багаті.
 Отже, деякі люди не багаті.
4. Проаналізувати міркування:
 - а) Усі судді — юристи.
 - б) Деякі юристи — шахраї.
 - в) Степан — суддя.
 Отже, якщо Степан не шахрай, то жоден суддя — не шахрай.

4.7. Додаткові задачі

1. Довести, що для довільного однорідного двомісного предиката $f(x, y)$ та довільного одномісного предиката $g(x)$, визначених на множині $A = \{a, b\}$, предикат $h(x, y, z) = f(x, y) \wedge \overline{f(x, z)} \wedge g(x) \wedge \overline{g(y)} \wedge \overline{g(z)}$ є тотожно фальшивим.
2. Використовуючи предикат $f(x, y)$: «на перетині вертикалі x та горизонталі y шахової дошки розташована королева» та логічні зв'язки записати твердження «на шаховій дошці розставлено 8 королев таким чином, що жодна з них не б'є іншу».
3. Довести, що для операцій квантифікації справджуються властивості 1–6.
4. Навести приклади предикатів, для яких:
 - 1) $\forall x f_1(x) \vee \forall x g_1(x) \neq \forall x (f_1(x) \vee g_1(x))$;
 - 2) $\exists x f_2(x) \wedge \exists x g_2(x) \neq \exists x (f_2(x) \wedge g_2(x))$;
 - 3) $\forall x \exists y f(x, y) \neq \exists y \forall x f(x, y)$.
5. Довести, що для довільних базисних множин та довільних предикатів $f(x), g(x), h(x, y)$ наступні предикати є тотожно істинними:
 - 1) $\forall x f(x) \vee \forall x g(x) \Rightarrow \forall x (f(x) \vee g(x))$;
 - 2) $\exists x (f_2(x) \wedge g_2(x)) \Rightarrow \exists x f(x) \wedge \exists x g(x)$;
 - 3) $\exists y \forall x h(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y h(x, y)$.
6. Довести, що довільний n -місний предикат, визначений на скінченних множинах $A_1, \dots, A_n$, може бути записаний з використанням деяких одномісних предикатів та операцій кон'юнкції та диз'юнкції.
7. Довести, що кожний предикат, записаний за допомогою виразу, який містить інші предикати, логічні зв'язки та операції квантифікації, може бути записаний у вигляді формули $\delta_1 x_1 \delta_2 \dots \delta_m x_m P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де $\delta_i \in \{\forall, \exists\}$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — формула, яка не містить кванторів і $n \geq m$.
8. Засобами логіки предикатів записати речення:
 - а) «Усі діти мають одну матір».
 - б) «У кожної людини є рівно дві бабусі».
 - в) «Кожний студент 1-го курсу ФІТ або склав успішно обидва модулі, або мусить їх перескладати».
9. Нехай у під'їзді є 4 ліфти та 5 поверхів. На кожному поверсі є пристрій, який дає змогу викликати найближчий вільний ліфт. Нехай предикат $f(x, y)$ визначений наступним чином: «ліфт номер x знаходиться на поверсі y і є при цьому вільним». З використанням предикату $f(x, y)$ та засобів логіки предикатів записати предикат $g(x)$: «пристрій, розташований на 1-му поверсі, викличе ліфт номер x ».

5. КОМБІНАТОРИКА

Комбінаторика — розділ дискретної математики, у межах якого вивчають об'єкти, побудовані із елементів *скінченної* множини, а також обчислюють кількості тих конфігурацій об'єктів, які задовольняють певні властивості.

5.1. Основні правила комбінаторики

Правило суми. Якщо об'єкт x можна вибрати n_1 способами, а інший об'єкт y — n_2 способами, то або x , або y можна вибрати $n_1 + n_2$ способами.

Теоретико-множинне формулювання. Якщо система k множин $\{A_1, \dots, A_k\}$ є розбиттям множини A , то $|A| = |A_1| + \dots + |A_k|$.

Приклад 5.1. З міста Львів у місто Ужгород вирушає 7 маршруток, 5 поїздів та 3 автобуси. Скількома способами можна дістатися зі Львова до Ужгорода?

Розв'язання. За правилом суми всього існує $7 + 5 + 3 = 15$ способів.

Правило добутку. Якщо об'єкт x можна вибрати n_1 способами, а об'єкт y — n_2 способами, то пару (x, y) можна вибрати $n_1 \cdot n_2$ способами.

Теоретико-множинне формулювання. Якщо $A = A_1 \times \dots \times A_k$, то

$$|A| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_k|.$$

Приклад 5.2. Обчислити кількість ідентифікаторів мови C, довжина яких не перевищує 3.

Розв'язання. Для запису ідентифікаторів використовують 26 латинських літер, 10 цифр та символ підкреслювання, причому ідентифікатори не можуть починатися з цифри. Оскільки регістр літер є важливим, то існує 53 ідентифікатори довжини 1. За правилом добутку є $53 \cdot 63 = 3339$ ідентифікаторів довжини 2 та $53 \cdot 63 \cdot 63 = 210357$ ідентифікаторів довжини 3. Тому за правилом суми загальна кількість ідентифікаторів рівна $53 + 3339 + 210357 = 213749$.

5.2. Розміщення, сполучення та перестановки

Нехай задано скінченну непорожню множину $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ і виконано r таких кроків:

Крок 1. Із множини A вибирають якийсь елемент a_{i_1} .

Крок 2. Із множини $A \setminus \{a_{i_1}\}$ вибирають якийсь елемент a_{i_2} .

.....

Крок r . Із множини $A \setminus \{a_{i_1}, \dots, a_{i_{r-1}}\}$ вибирають якийсь елемент a_{i_r} .

Тоді вибрані елементи $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}$ утворюють *вибірку* без повторень обсягу r (r -вибірку) із множини A .

Вибірку називають *упорядкованою*, якщо задано порядок її елементів. Зрозуміло, що впорядкована r -вибірка — це кортеж (вектор) з r компонентами, і тому її позначають

$(a_{i_1}, \dots, a_{i_r})$. Упорядковані r -вибірки з n -елементної множини називаються *розміщеннями* з n елементів по r . Згідно до комбінаторного правила множення для кількості A_n^r усіх розміщеннями без повторень з n елементів по r маємо

$$A_n^r = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad (5.1)$$

де $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

Невпорядковану r -вибірку позначатимемо $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}\}$. Невпорядкована r -вибірка — r -елементна підмножина множини A . Неупорядковані r -вибірки з n -елементної множини називаються *сполученнями* з n елементів по r . Кількість усіх *сполучень* з n елементів по r позначається C_n^r . Легко переконатися, що $A_n^r = C_n^r \cdot r!$. Тому

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

У вибірках із повтореннями на k -му кроці елемент a_{i_k} вибирається не з множини $A \setminus \{a_{i_1}, \dots, a_{i_{k-1}}\}$, а з початкової множини A .

Сполучення з повтореннями — це, узагалі кажучи, не множина у звичайному розумінні: її елементи можуть повторюватись, тобто зустрічатися більше одного разу. Таке узагальнення множини називається *мультимножиною*. Для позначення мультимножин будемо використовувати квадратні дужки.

Для чисел $\bar{A}_n^r$ розміщень з повтореннями та $\bar{C}_n^r$ комбінацій з повтореннями з n елементів по r справджуються наступні формули:

$$\bar{A}_n^r = n^r, \quad \bar{C}_n^r = C_{n+r-1}^r.$$

Приклад 5.3. Вказати 2-вибірки з множини $\{a, b, c\}$.

Розв'язання. Наведемо розміщення без повторень із трьох елементів по два:

$(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b);$

розміщення з повтореннями з трьох елементів по два:

$(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c);$

сполучення без повторень із трьох елементів по два:

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\};$

сполучення з повтореннями із трьох елементів по два:

$[a, a], [a, b], [a, c], [b, b], [b, c], [c, c].$

Приклад 5.4. У магазині є тістечка чотирьох видів: бізе, наполеони, пісочні та еклери. Скільки існує:

- а) способів придбати 7 тістечок;
- б) способів придбати 8 тістечок так, щоб серед них було рівно 2 наполеони;
- в) способів придбати 9 тістечок так, щоб серед них було не менше 3 еклерів;
- г) способів придбати 10 тістечок так, щоб серед них було не більше 3 бізе та пісочних?

Розв'язання. а) Шукана кількість рівна числу сполучень з повтореннями з 4 по 7:

$$\bar{C}_4^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!(10-3)!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7! 3!} = 120;$$

б) вважаємо, що 2 наполеони вже вибрані. Тоді ми обираємо 6 тістечок трьох можливих видів. Шукана кількість рівна числу сполучень з повтореннями з 3 по 6: $\bar{C}_3^6 = C_8^6 = 28$;

в) нехай N — загальна кількість способів вибору 9 тістечок, N_i — кількість способів вибору тістечок так, щоб серед них було рівно i еклерів. Тоді шукана кількість рівна

$$N - N_0 - N_1 - N_2 = \bar{C}_4^9 - \bar{C}_3^9 - \bar{C}_3^8 - \bar{C}_3^7 = C_{12}^9 - C_{11}^9 - C_{10}^8 - C_9^7 = 220 - 55 - 45 - 36 = 84.$$

Розв'язок можна спростити, якщо помітити, що фактично ми можемо обирати 6 тістечок одного з 4-ох видів, оскільки 3 з 9 точно є еклерами. Отримуємо $\bar{C}_4^6 = C_9^6 = 84$ способів.

г) нехай M_i — кількість способів вибору тістечок таким чином, щоб серед них було рівно i безе та пісочних (разом). Тоді решта $10-i$ тістечок мають бути або еклерами, або наполеонами. За комбінаторним правилом множення

$$M_i = \bar{C}_2^i \cdot \bar{C}_2^{10-i} = C_{11-i}^{10-i} C_{i+1}^i = \frac{(11-i)!}{(10-i)! 1!} \frac{(i+1)!}{i! 1!} = (11-i)(i+1).$$

Тоді шукана кількість рівна $M_0 + M_1 + M_2 + M_3 = 11 + 10 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 8 \cdot 4 = 90$.

Перестановка з n елементів — це особливий випадок розміщення без повторень з n елементів, коли в розміщення входять усі елементи. Перестановки з n елементів називають також n -перестановками. Окремі n -перестановки різняться лише порядком елементів. Кількість таких перестановок позначають як P_n . Формулу для P_n одержують із формули (5.1) у випадку $r = n$. Тому $P_n = A_n^n = n!$.

Розглянемо тепер задачу про перестановки n елементів за умови, що не всі елементи різні (*перестановки з повтореннями*). Точніше, нехай є елементи k різних типів, а число n_i ($i = 1, \dots, k$) — кількість елементів i -го типу. Очевидно, що $n = n_1 + \dots + n_k$. Перестановки з n елементів за такої умови називають *перестановками з повтореннями*. Кількість таких перестановок позначають як $P_n(n_1, \dots, n_k)$. Щоб знайти явний вираз для $P_n(n_1, \dots, n_k)$, візьмемо фіксовану перестановку з повтореннями та замінимо в ній усі однакові елементи різними. У такий спосіб ми можемо отримати $n_1! \cdot \dots \cdot n_k!$ перестановок з n різних елементів. Якщо зробити це для кожної перестановки з повтореннями, то одержимо усі $n!$ перестановок. Отже $P_n = P_n(n_1, \dots, n_k) \cdot n_1! \cdot \dots \cdot n_k!$. Тому

$$P_n(n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}. \quad (5.2)$$

Приклад 5.5. Підрахувати кількість різних 6-цифрових чисел, які

- складаються із різних цифр;
- містять лише парні цифри;

- в) містять лише непарні цифри;
- г) містять дві цифри 3, три цифри 7 та одну цифру 6;
- д) містять рівно одну цифру 5, хоча би дві цифри 2 та не містять жодної цифри 0.

Розв'язання. а) Використаємо правило множення. Існує 9 способів вибору 1-ї цифри (усі цифри крім 0). Оскільки допускаються повтори цифр, то є $A_9^5 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$ способів вибору інших п'яти цифр. Тому усього є $9 \cdot 15120 = 136080$ 6-цифрових чисел;

б) шукані числа не можуть починатися на цифру 0. Усі інші цифри можуть приймати одне з п'яти можливих значень (0, 2, 4, 6 або 8). Тому є $4 \cdot \bar{A}_5^5 = 4 \cdot 5^5 = 12500$ чисел, складених із парних цифр;

в) на першу цифру нема додаткових обмежень. Тому шукана кількість рівна $5^6 = 15625$;

г) у цьому пункті ми не можемо довільним чином вибирати цифри числа, а лише переставляємо вже вибрані цифри з урахуванням їх повторів. Шукана кількість рівна $P_6(2,3,1) = 6! / (2! 3! 1!) = 4 \cdot 5 \cdot 6 / 2 = 60$;

д) Нехай N — кількість 6-цифрових чисел, які містять одну цифру 5 та не містять жодної цифри 0, N_i — кількість 6-цифрових чисел, які містять одну цифру 5, не містять жодної цифри 0 та містять i цифр 2. При підрахунку числа N ми маємо 6 способів вибору позиції цифри 5 та 8 способів вибору для кожної з інших цифр, при підрахунку N_i — C_5^i способів вибору позицій для двійок та 7 способів вибору для кожної з інших цифр. Тому $N_i = 6 \cdot C_5^i \cdot 7^{5-i}$, $0 \leq i \leq 5$. Тоді шукана кількість способів рівна $N - N_0 - N_1 = 6 \times \times (8^5 - 7^5 - C_5^1 \cdot 7^4) = 23736$.

Приклад 5.6. На рис. 5.1. зображено план міста. Мандрівник хоче потрапити із пункту A в пункт B найкоротшим шляхом, тобто рухаючись весь час або «зліва направо» або «знизу вгору». Скількома способами він може потрапити із A у B ?

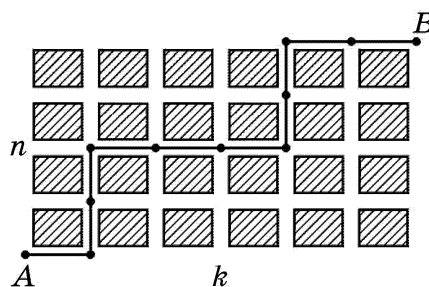


Рис. 5.1. План міста

Розв'язання. Кожний шлях можна однозначно зобразити у вигляді слова, утвореного з n символів U (вверх) та k символів R (вправо). Тому кількість різних шляхів рівна кількості різних перестановок, тобто $P_{k+n}(n,k) = \frac{(n+k)!}{n! k!}$.

5.3. Властивості біноміальних коефіцієнтів. Біном Ньютона та поліноміальна формула

Біноміальними коефіцієнтами називають числа $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ — кількість сполучень з n елементів по r ($0 \leq r \leq n$). При цьому за домовленістю вважаємо, що $0! = 1$. Часто біноміальні коефіцієнти C_n^r позначають як $\binom{n}{r}$. Властивості:

1. Нехай n і r — невід’ємні цілі числа, $r \leq n$. Тоді $C_n^r = C_n^{n-r}$.

$$C_n^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_n^r.$$

2. Рівність Паскаля: $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$.

Для доведення розіб’ємо множину усіх C_n^r сполучень з n елементів $\{a_1, \dots, a_n\}$ по r на дві підмножини. До першої множини віднесемо усі сполучення, які не містять елемент a_n . Таких сполучень є C_{n-1}^r . До другої множини віднесемо усі сполучення, які містять елемент a_n . Відкинувши цей елемент, отримаємо сполучення з $n-1$ елементів по $r-1$. Таких сполучень є C_{n-1}^{r-1} . Тому $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$.

Рівність Паскаля дає змогу таблицю для чисел C_n^r , яку називають *трикутником Паскаля*, який заповнюють зверху вниз. По краях трикутника записують числа $C_n^0 = C_n^n = 1$, а всі інші значення у рядку одержують як суми двох чисел попереднього рядка, що розміщені ліворуч та праворуч від шуканого значення (див рис. 5.2). Тому у $(n+1)$ -й рядок трикутника містять числа C_n^i ($i = 0, \dots, n$).

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & 1 & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & & \\ \dots & & & & & & & & & \end{array}$$

Рис. 5.2. Трикутник Паскаля

3. $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$.

Для доведення рівності досить зауважити, що оскільки кожне число $(n-1)$ -го рядка трикутника Паскаля бере участь у формуванні двох чисел n -го рядка, то сума чисел кожного рядка удвічі більша за суму чисел попереднього рядка. Оскільки сума чисел 1-го

рядка рівна 1, то сума чисел $(n+1)$ -го рядка рівна 2^n .

$$4. C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{n-1}.$$

Доведення за допомогою трикутника Паскаля схоже на доведення попередньої властивості.

$$5. C_n^n + C_{n+1}^n + \dots + C_{n+k-1}^n = C_{n+k}^{n+1};$$

Доведення впливає шляхом багаторазового застосування формули Паскаля:

$$\begin{aligned} C_{n+k}^{n+1} &= C_{n+k-1}^n + C_{n+k-1}^{n+1} = C_{n+k-1}^n + C_{n+k-2}^n + C_{n+k-2}^{n+1} = \dots = C_{n+k-1}^n + \dots + C_{n+1}^n + C_{n+1}^{n+1} = \\ &= C_n^n + C_{n+1}^n + \dots + C_{n+k-1}^n. \end{aligned}$$

$$6. \text{ Якщо } r \leq \min\{m, n\}, \text{ то } \sum_{k=0}^r C_m^k C_n^{r-k} = C_{m+n}^r \text{ (рівність Вандермонда-Коші).}$$

7. Послідовність біноміальних коефіцієнтів є *унімодальною*, тобто задовольняє умову

$$C_n^0 < C_n^1 < \dots < C_n^m; \quad C_n^m \geq C_n^{m+1} > C_n^{m+1} > \dots > C_n^n,$$

де $m = \lfloor n/2 \rfloor$ — ціла частина числа $n/2$. У разі парного n максимум C_n^r досягається в точці $r = m$, а разі непарного — у двох точках $r = m$ та $r = m+1$.

Доведення впливає з того, що відношення $\frac{C_n^r}{C_n^{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}$ більше за 1 у випадку

$r \leq m$ та менше за 1 у випадку $r > m+1$.

Теорема 5.1 (біном Ньютона). Нехай x та y — змінні, $n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i x^i y^{n-i}.$$

Доведення. Дамо комбінаторне доведення цієї теореми [5]. Оскільки доданок $x^i y^{n-i}$ отримується внаслідок i -кратного вибору x та $(n-i)$ -кратного вибору y з n співмножників у виразі $(x+y)^n$, то коефіцієнт при $x^i y^{n-i}$ дорівнює кількості способів i -кратного вибору x з n співмножників, тобто C_n^i .

За допомогою бінома Ньютона можна довести властивості 3–6. Наприклад,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i \cdot 1^i \cdot 1^{n-i} = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n;$$

$(x+y)^{m+n} = (x+y)^m \cdot (x+y)^n$. Прирівнюючи коефіцієнти при $x^r y^{m+n-r}$ отримаємо рівність Вандермонда-Коші.

Приклад 5.7. Обчислити коефіцієнт при x^2 у розкладі $(x+2/x)^8$.

Розв'язання. У біномі Ньютона i -й доданок рівний $C_8^i x^i 2^{8-i} x^{-(8-i)} = C_8^i 2^{8-i} x^{2i-8}$, $i=0, \dots, 8$. Якщо $2i-8=2$, то $i=5$. Тому коефіцієнт при x^2 рівний $C_8^5 2^{8-5} = 448$.

Розглянемо узагальнення бінома Ньютона, яке стосується піднесення до n -го степеня суми k доданків.

Теорема 5.2 (поліноміальна). Вираз $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$ дорівнює сумі всіх можливих доданків $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$, де $n = n_1 + \dots + n_k$, тобто

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1 \geq 0, \dots, n_k \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_k = n}} P_n(n_1, \dots, n_k) x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}.$$

Поліноміальна теорема дає змогу встановити властивості чисел $P_n(n_1, \dots, n_k)$. Наприклад, покладемо $x_1 = 1, \dots, x_k = 1$. Тоді

$$\sum_{\substack{n_1 \geq 0, \dots, n_k \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_k = n}} P_n(n_1, \dots, n_k) = k^n.$$

5.4. Деякі комбінаторні задачі

5.4.1. Задача про цілочислові розв'язки

Цю задачу формулюють так: знайти кількість розв'язків рівняння $x_1 + \dots + x_r = n$ в цілих невід'ємних числах, де n — натуральне число.

Узявши такі невід'ємні цілі числа $x_1, \dots, x_r$, що $x_1 + \dots + x_r = n$, можна одержати сполучення з повтореннями з r елементів по n , а саме: елементів першого типу — x_1 одиниць, другого типу — x_2 одиниць, ..., r -го — x_r . Навпаки, якщо є сполучення з повтореннями з r елементів по n , то кількості елементів кожного типу задовольняють рівняння $x_1 + \dots + x_r = n$ у цілих невід'ємних числах. Отже, кількість цілих невід'ємних розв'язків

$$\text{цього рівняння дорівнює } \bar{C}_r^n = C_{n+r-1}^n = \frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}.$$

Приклад 5.8. Знайти

а) кількість невід'ємних цілих розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + x_3 = 10$;

б) кількість додатних цілих розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + x_3 = 10$;

в) кількість невід'ємних цілих розв'язків нерівності $x_1 + x_2 + x_3 < 10$.

Розв'язання. а) $\bar{C}_3^{10} = C_{12}^{10} = C_{12}^2 = 11 \cdot 12 / 2 = 66$;

б) нехай $x_i = y_i + 1$, $y_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$. Після підстановки отримаємо рівняння $y_1 + y_2 + y_3 = 7$, яке має $\bar{C}_3^7 = C_9^7 = 36$ цілих невід'ємних розв'язків;

в) строга нерівність $x_1 + x_2 + x_3 < 10$ рівносильна нестрогій нерівності $x_1 + x_2 + x_3 \leq 9$ (для цілих значень невідомих). Остання нерівність має таку саму кількість цілих невід'ємних розв'язків, як і рівняння $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$. Отже, шукана кількість розв'язків становить $\bar{C}_4^9 = C_{12}^9 = C_{12}^3 = 220$.

5.4.2. Принцип Діріхле

Якщо в k коробках є $k + 1$ або більше предметів, то існує принаймні одна коробка, яка містить щонайменше два предмети.

Якщо в k коробках є N предметів, то існує принаймні одна коробка, яка містить щонайменше $\lceil N / k \rceil$ предметів (узагальнений принцип Діріхле).

Приклад 5.9. У залі театру є 433 глядачі. Довести, що:

- а) принаймні двоє з них мають однакову кількість знайомих серед присутніх.
- б) принаймні 37 з них народилися в одному місяці.

Розв'язання. а) нехай k -та коробка містить усіх глядачів, які мають рівно k знайомих серед присутніх. Легко переконатися, що хоча б одна з коробок з індексами 0 та 432 порожня. Виключимо цю коробку з розгляду. Тоді 433 глядачі містяться в одній з 432 коробок. Згідно принципу Діріхле одна з цих коробок містить хоча би двох глядачів. Отже, принаймні двоє з них мають однакову кількість знайомих;

б) нехай k -та коробка містить усіх глядачів, які народилися у k -му місяці. Тоді згідно з узагальненим принципом Діріхле знайдеться місяць, в якому народилося $\lceil 433 / 12 \rceil = 37$ глядачів.

5.4.3. Принцип включення-виключення

Цей принцип дає відповідь на запитання, як визначити кількість елементів у об'єднанні множин. Нехай $A_1, \dots, A_n$ — скінченні множини. Тоді

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|.$$

Права частина формули містить $2^n - 1$ доданків, по одному для усіх можливих перетинів множин.

Розглянемо альтернативну форму для принципу включення-виключення. Нехай A — скінченна множина, $|A| = N$ і потрібно знайти кількість її елементів, які не мають жодної з властивостей $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Нехай $N(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k})$ — кількість елементів, які одночасно мають властивості $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$, $N(\bar{\alpha}_{i_1}, \dots, \bar{\alpha}_{i_k})$ — кількість елементів, які не мають жодної з властивостей $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$. Тоді

$$N(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) = N - \sum_{1 \leq i \leq n} N(\alpha_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} N(\alpha_i, \alpha_j) + \dots + (-1)^n N(\alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (5.3)$$

Розглянемо частковий випадок формули (5.3). Припустимо, що величини $N(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k})$ не залежать від самих властивостей, а залежать лише від їх кількості. Вважатимемо за означенням $N(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}) = N^{(k)}$ для будь-якого набору k властивостей. Тоді формула (5.3) набуває вигляду

$$N^{(0)} = N - C_n^1 N^{(1)} + C_n^2 N^{(2)} - \dots + (-1)^n N^{(n)}. \quad (5.4)$$

Приклад 5.10. Обчислити кількість простих чисел серед перших 100 натуральних чисел.

Розв'язання. Якщо число не більше за 100 є складеним, то воно обов'язково має простий дільник, який не перевищує $\sqrt{100} = 10$. Тому серед його простих дільників обов'язково зустрінеться 2, 3, 5 або 7. Нехай властивість α_i полягає у подільності націло на i , де $i \in \{2, 3, 5, 7\}$. Очевидно, що $N(\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k}) = \left\lfloor \frac{100}{i_1 \dots i_k} \right\rfloor$. Тоді за формулою (5.3) шукана кількість простих чисел рівна

$$\begin{aligned} 100 - N(\alpha_2) - N(\alpha_3) - N(\alpha_5) - N(\alpha_7) + N(\alpha_2, \alpha_3) + N(\alpha_2, \alpha_5) + N(\alpha_2, \alpha_7) + N(\alpha_3, \alpha_5) + \\ + N(\alpha_3, \alpha_7) + N(\alpha_5, \alpha_7) - N(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5) - N(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_7) - N(\alpha_2, \alpha_5, \alpha_7) - N(\alpha_3, \alpha_5, \alpha_7) + \\ + N(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7) + 4 - 1. \end{aligned}$$

Передостанній доданок відповідає простим числам 2, 3, 5 та 7, останній — числу 1, яке не є простим. Остаточно отримуємо, що у першій сотні є

$$100 - 50 - 33 - 20 - 14 + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 - 3 - 2 - 1 - 0 + 0 + 4 - 1 = 25$$

простих чисел.

5.4.3. Задачі про розподіл предметів за ящиками

Розв'язуючи задачі про розподіл (розкладання) предметів за ящиками, необхідно проаналізувати зміст задачі, властивості предметів, щоб з'ясувати питання про те, вважати предмети однаковими чи різними, враховувати чи ні порядок вибору предметів, розрізняти чи ні ящики один від одного, брати до уваги чи ні місткість ящиків.

Розподіл різних предметів за різними ящиками заданої місткості

Дано n різних предметів і k різних ящиків. Потрібно покласти в перший ящик n_1 предметів, у другий — n_2 предметів, ..., у k -й — n_k предметів, де $n = n_1 + \dots + n_k$. Скількома способами можна це зробити?

Розглянемо зв'язок між цією задачею та задачею про кількість перестановок з повтореннями. Для цього занумеруємо всі предмети номерами ящиків, у які вони будуть покладені, і запишемо отриману послідовність номерів. Отримаємо перестановку з повтореннями. І навпаки, кожній перестановці з повтореннями цілком однозначно відповідає розподіл предметів по ящиках. Отже, знайдено відповідність між перестановками з повтореннями та розкладанням у ящики. Отже, шукана кількість дається формулою (5.2).

Розподіл n однакових предметів за k різними ящиками

Оскільки предмети не можна відрізнити, то важливими є лише їх кількості у кожному ящику. Нехай x_i — кількість предметів у i -му ящику, де $1 \leq i \leq k$. Тоді $x_1 + \dots + x_k = n$, $x_i \geq 0$. Тобто, ми звели нашу задачу до підрахунку кількості цілочислових

невід'ємних розв'язків рівняння $x_1 + \dots + x_k = n$, яка розглядалася в параграфі 5.4.1. Тому шукана кількість рівна $\bar{C}_k^n = C_{n+k-1}^n = C_{n+k-1}^{k-1}$.

Якщо ставиться додаткова умова, що у кожному ящику має бути не менше ніж r предметів, то для вільного розподілу залишається $n - kr$ предметів. Отже, у цьому випадку шукана кількість способів рівна $\bar{C}_k^{n-kr} = C_{n-k(r-1)-1}^{k-1}$.

Розподіл різних предметів з урахуванням їх порядку в різних ящиках

Якщо не обмежувати кількість предметів в ящиках і не розрізняти предмети між собою, то кількість таких розподілів дорівнює $\bar{C}_k^n = C_{n+k-1}^n$.

Кожному способу розподілу однакових предметів між ящиками відповідає $n!$ способів розподілу різних предметів з урахуванням їх порядку, які одержуються за допомогою перестановок предметів між собою без зміни кількості предметів в ящиках. За правилом добутку одержуємо шукану кількість розподілів:

$$C_{n+k-1}^n \cdot n! = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!} = A_{n+k-1}^n.$$

Розподіл різних предметів без урахування їх порядку у різних ящиках

Необхідно розподілити n різних предметів між k ящиками, місткість яких не обмежена. Перший предмет можна покласти у будь-який з k ящиків, другий (незалежно від першого) також у k ящиків і т. д. За правилом добутку є k^n способів розподілу.

Розподіл різних предметів за однаковими непорожніми ящиками

Позначимо через $S(n, k)$ кількість способів розподілу n різних предметів між k однаковими непорожніми ящиками. Із кожного такого розподілу можна одержати $k!$ аналогічних розподілів за різними ящиками. Таким чином, число $M(n, k)$ — кількість розподілів n різних предметів між k різними непорожніми ящиками рівна $S(n, k) \cdot k!$.

З формули (5.4) з використанням результату попереднього пункту легко отримати формулу для $M(n, k)$

$$M(n, k) = k^n - C_k^1 (k-1)^n + C_k^2 (k-2)^n + \dots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} 1^n.$$

Тому

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \left(k^n - C_k^1 (k-1)^n + C_k^2 (k-2)^n + \dots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} 1^n \right) \quad (5.5)$$

Числа $S(n, k)$ називаються *числами Стірлінга другого роду*. Часто в літературі для чисел Стірлінга другого роду використовують позначення $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$.

5.5. Задача про розбиття множини на непорожні частини

Розглянемо задачу визначення кількості розбиттів скінченної множини A на непорожні частини (означення розбиття множини наведено в підрозділі 2.5).

Приклад 5.11. Якщо $A = \{a, b, c\}$, то є такі розбиття цієї множини на k непорожніх частин:

$$k=1: \{\{a,b,c\}\};$$

$$k=2: \{\{a,b\},\{c\}\}, \{\{a,c\},\{b\}\}, \{\{a\},\{b,c\}\};$$

$$k=3: \{\{a\},\{b\},\{c\}\}.$$

Очевидно, що кількість розбиттів n -елементної множини на k непорожніх частин рівна $S(n,k)$. Нехай B_n — кількість усіх розбиттів скінченної множини A на непорожні частини. Числа B_n називаються *числами Белла*. Очевидно, що

$$B_n = \sum_{k=1}^n S(n,k).$$

Для попереднього прикладу $S(3,1)=1$, $S(3,2)=3$, $S(3,3)=1$, $B_3 = 1 + 3 + 1 = 5$.

Довільне розбиття множини $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ на k непорожніх частин можна одержати так:

- із розбиття множини $A \setminus \{a_n\}$ на $(k-1)$ непорожню частину додаванням підмножини $\{a_n\}$;
- із розбиття множини $A \setminus \{a_n\}$ на k непорожніх частин додаванням до однієї з цих частин елемента a_n (це можна зробити k способами).

Звідси випливає тотожність

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k).$$

Для чисел Белла існує рекурентна залежність (вважаємо, що $B_0 = 1$)

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_n^i B_i.$$

За допомогою останніх двох формул можна будувати таблиці значень чисел Стірлінга та Белла (табл. 5.1).

Таблиця 5.1. Таблиця значень чисел Стірлінга другого роду та Белла ($n \leq 6$)

$k \backslash n$	1	2	3	4	5	6	B_n
1	1						1
2	1	1					2
3	1	3	1				5
4	1	7	6	1			15
5	1	15	25	10	1		52
6	1	31	90	65	15	1	203

Приклад 5.12. Вказати формули для:

- $S(n, n-1)$;
- $S(n, 2)$;

в) $S(n, 3)$.

Розв'язання. а) При розбитті n -елементної множини на $n-1$ непорожню підмножину одна підмножина обов'язково містить два елементи, а усі інші — по одному елементу. Тому кількість способів розбиття співпадає з кількістю різних двоелементних підмножини n -елементної множини. Отже, $S(n, n-1) = C_n^2$.

б) Існує 2^n пар впорядкованих пар $(A, \bar{A})$, де A — підмножина множини $\{1, \dots, n\}$. З них $2^n - 2$ таких пар, що обидві множини у парі не порожні. Оскільки для розбиття порядок підмножин ролі не грає, то $S(n, 2) = (2^n - 2) / 2 = 2^{n-1} - 1$.

в) Скориставшись формулою (5.5), отримаємо

$$S(n, 3) = \frac{3^n - C_3^1 2^n + C_3^2}{3!} = \frac{3^{n-1} - 2^{n-1} + 1}{2}.$$

5.6. Числа Каталана

Числа Каталана — елементи числової послідовності

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, ...

яка з'являється у процесі розв'язування задач підрахунку кількості різноманітних комбінаторних об'єктів.

Числа Каталана C_n визначаються наступним чином:

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \quad (n \geq 0).$$

Можна показати, що числа Каталана — розв'язки рекурентного рівняння

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i}, \quad n \geq 0, \quad C_0 = 1. \quad (5.6)$$

Числа $D_i = C_{i-1}$ є розв'язками рівняння

$$D_{n+1} = \sum_{i=1}^n D_i D_{n-i+1}, \quad n \geq 1, \quad D_1 = 1. \quad (5.7)$$

Числа Каталана виникають у таких задачах:

1. Підрахунок кількості слів Діка довжини $2n$. Слова Діка — це слова, які побудовані із n символів X та n символів Y , причому у будь-якому префіксі слова Діка кількість Y не перевищує кількість X . Нижче наведено слова Діка довжини 6.

XXXYYY XYXXYY YXXYXY XXYYXY XXYXYY.

Кількість слів Діка довжини $2n$ рівна C_n . Доведення впливає з того, довільне слово Діка ω довжини $2n$ може бути записане у вигляді $\omega = X\omega_1 Y\omega_2$, де ω_1, ω_2 —

слова Діка довжини $2k$ та $2(n-k)-2$ відповідно (можливо порожні). Тому кількість слів Діка довжини $2n+2$ задовольняє рівняння (5.6).

2. Підрахунок кількості способів обчислення добутку $n+1$ множника (способів розстановки дужок у виразів). У випадку $n=3$ є наступні способи перемножити 4 множника:

$$((ab)c)d \quad (a(bc))d \quad (ab)(cd) \quad a((bc)d) \quad a(b(cd))$$

Нехай D_{n+1} — шукана кількість способів. Тоді розбивши усі способи за порядковим номером операції множення, яка проводиться у останню чергу, можна легко переконатися, що $D_{n+1} = D_1 D_n + D_2 D_{n-2} + \dots + D_{n-2} D_2 + D_{n-1} D_1$. На основі (5.7) робимо висновок, що $D_{n+1} = C_n$.

3. C_n — кількість шляхів з лівої нижньої точки у праву верхню, які можна побудувати на сітці $n \times n$ таким чином, щоб вони жодного разу не «проходили» вище діагоналі. Випадок $n=4$ проілюстровано на рис. 5.2.

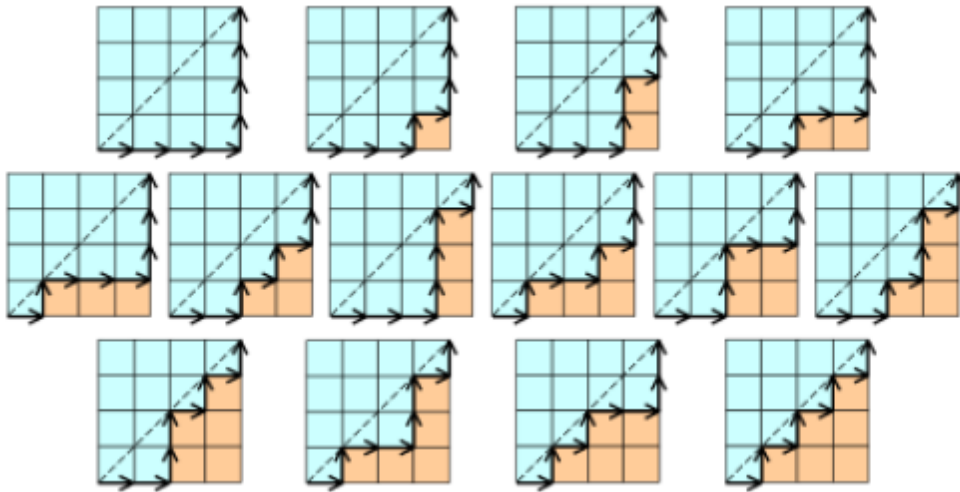


Рис. 5.2. Допустимі шляхи

Для доведення, що кількість шляхів рівна C_n досить встановити взаємно однозначну відповідність між допустимими шляхами та словами Діка довжини $2n$. Цього можна досягти, закодувавши горизонтальні пересування літерою X, а вертикальні — літерою Y.

4. C_n — кількість триангуляцій випуклого $(n+2)$ -кутника шляхом проведення його діагоналей, які не перетинаються між собою. Випадок $n=4$ проілюстровано на рис. 5.3.

Можна показати, що $C_n \sim \frac{4^n}{n^{3/2} \sqrt{\pi}}$, тобто границя відношення n -го числа Каталана і

дроби прямує до 1 при $n \rightarrow \infty$.

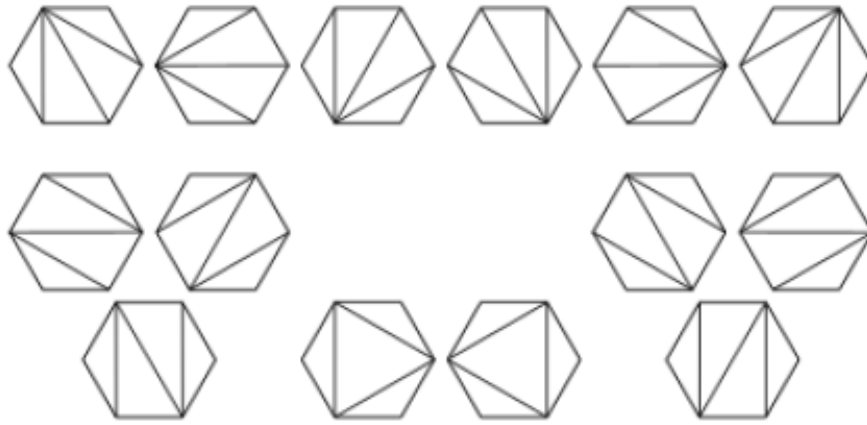


Рис. 5.3. Розбиття шестикутника на трикутники

5.7. Задачі до розділу

1. У чемпіонаті світу з футболу беруть участь 32 команди, 14 з яких з Європи. Підрахувати:
 - а) кількість способів розподілу нагород;
 - б) кількість способів розподілу нагород за умови, що хоча би два призові місця посіли команди з Європи;
2. Будівельна фірма формує бригаду з 6 робітників. На фірмі працює 5 малярів, 2 теслі та 3 штукатури. Підрахувати
 - а) кількість способів укомплектування бригади;
 - б) кількість способів укомплектування бригади за умови, що до її складу мають входити представники усіх трьох спеціальностей.
3. Для премій на конкурсі виділено 2 ноутбуки, 3 смартфони і 8 колонок. Скількома способами можна розділити ці премії між 20 учасниками, якщо будь-якому з них вручають не більше однієї премії?
4. Для премій на олімпіаді з дискретної математики виділено 3 примірника першої книги, 4 — другої і 8 — третьої. Скількома способами можна розділити ці премії між 30 учасниками, якщо будь-якому вручають не більше однієї книги?
5. Скількома способами із 20 шахістів можна скласти:
 - а) три пари (порядок пар не відіграє ролі);
 - б) чотири трійки (порядок трійок є суттєвим)?
6. Скількома способами із 30 студентів можна скласти:
 - а) три трійки (вважати, що порядок трійок є важливим);
 - б) чотири п'ятірки (порядок не є важливим)?
7. У групі навчається 5 дівчат та 10 хлопців. Підрахувати кількість способів вибору 5 студентів групи за умови, що серед вибраних студентів більшість мають становити дівчата.

8. У класі вчиться 9 дівчат та 11 хлопців. Підрахувати кількість способів побудови шеренги із 6 школярів групи за умови, що серед обраних у неї принаймні половина має бути чоловічої статі.
9. Потрібно обрати 5 видань із 6 підручників та 8 методичок і розташувати їх на полиці. Підрахувати, скільки є способів це зробити за умови, що серед вибраних видань підручники мають становити меншість і порядок об'єктів на полиці є суттєвим.
10. На столі лежить 6 книжок та 9 зошитів. Підрахувати кількість способів вибору 8 предметів за умови, що усі предмети різні і серед вибраних зошити мають становити меншість.
11. Студент має виконати 10 лабораторних з програмування. При цьому для кожної задачі він може обрати одну з мов C++, Java, JavaScript, C# чи Python. Підрахувати кількість способів вибору мов для задач за умови, що:
 - а) порядок задач важливий;
 - б) порядок задач не є суттєвим;
 - в) порядок задач не є суттєвим і при цьому принаймні половина лабораторних має бути написана на Python;
 - г) порядок задач не є суттєвим і при цьому принаймні третина лабораторних має бути виконана на C++ або Java.
12. Потрібно зробити 8 прикладів з дискретної математики. При цьому він можна обрати приклади з тем «Теорія множин», «Бінарні відношення» та «Комбінаторика». Підрахувати кількість способів вибору тем для прикладів за умови, що:
 - а) порядок прикладів важливий;
 - б) порядок прикладів не є важливим;
 - в) порядок прикладів не є важливим і при цьому рівно 2 задачі має бути з теорії множин;
 - г) порядок прикладів не є важливим і при цьому менше половини задач має бути з комбінаторики.
13. Скільки слів можна одержати, переставляючи букви слова «метаморфоза» таким чином, щоб дві літери «а» не стояли поруч?
14. Скільки слів можна одержати, переставляючи букви слова «програма» таким чином, щоб літери «о» та «м» не розташовувалися поруч?
15. Скільки слів можна одержати, переставляючи букви слова «перестановка» таким чином, щоб отримана перестановка починалася або закінчувалася на літеру «а»?
16. Скільки слів можна одержати, переставляючи букви слова «комбінаторика» таким чином, щоб отримана перестановка не починалася і не закінчувалася на літеру «о»?
17. У розкладі бінома $\left(\sqrt[3]{a} + 2a^{-1}\right)^{16}$ визначити член, який не залежить від a .
18. У розкладі бінома $\left(3\sqrt{x} - x^{-1}\right)^{15}$ визначити коефіцієнт біля x^3 .
19. У розкладі $(a + b + c + d)^5$ вказати члени, числовий коефіцієнт біля яких є найбільшим.

20. У розкладі $(a + b + c - d)^3$ вказати члени, числовий коефіцієнт біля яких є найменшим.
21. Підрахувати кількість невід'ємних розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ за умови, що:
- x_i — цілі ($i = 1, \dots, 4$);
 - x_1, x_2 — парні, x_3, x_4 — непарні.
22. Підрахувати кількість додатних розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ за умови, що:
- x_i — цілі ($i = 1, \dots, 4$);
 - x_1, x_2, x_3 — непарні.
23. Підрахувати кількість натуральних розв'язків нерівності $x_1 + x_2 + x_3 < 20$.
24. Підрахувати кількість розв'язків нерівності $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 18$ з парними невід'ємними значеннями невідомих $x_1, \dots, x_4$.
25. Скільки потрібно запросити людей, щоб:
- щонайменше шість із них народилися під одним і тим самим знаком зодіаку?
 - обов'язково принаймні двоє з них народилися в один і той самий день тижня та в один і той самий місяць (можливо, у різні роки)?
26. На заводі є 3 цехи, у кожному з яких працюють працівники однієї з 4-х професій. Кожного місяці обирають одного працівника для премії. Яка найменша кількість місяців має пройти, щоб серед обраних обов'язково знайшлося 7 працівників одного цеху з однаковими професіями.
27. У офісі працює 30 людей. Кожного ранку якісь четверо з них зустрічаються при вході. Яка найменша кількість днів має пройти, щоб гарантовано знайшлися такі працівники, які тричі зустрілися вранці у тому самому складі?
28. Нехай A — множина, яка містить 10 натуральних чисел, кожне з яких не більше 42. Довести, що знайдуться хоча би дві різні трьохелементні підмножини множини A , які мають однакові суми елементів.
29. Нехай A — множина, яка містить 15 натуральних чисел, кожне з яких менше за 54. Довести, що знайдуться хоча би дві різні двохелементні підмножини множини A , які мають однакові суми елементів.
30. Скільки елементів містить об'єднання п'яти множин, якщо кожна з них містить 10000 елементів, кожна пара — 1000 спільних елементів, кожна трійка — 100, кожна четвірка — 10 спільних елементів і один елемент належить усім п'яти множинам?
31. В школі вчиться 800 школярів. У олімпіаді з кожного із чотирьох предметів взяло участь по 200 школярів, у обох олімпіадах з кожної пари предметів — по 50 школярів, з кожних трьох — по 20, з усіх чотирьох — 10. Скільки школярів не брали участь у жодній олімпіаді?
32. У магістратуру прийняли 12 студентів. Скількома способами можна їх розподілити за трьома різними спеціалізаціями, якщо

- а) на першій спеціалізації є 5 місць, на другій — 3 місця, на третій — 4 місця;
 - б) обмеження по кількості студентів на спеціалізації відсутні;
 - в) на кожній спеціалізації має навчатися принаймні один студент;
 - г) обмеження по кількості студентів на спеціалізації відсутні і суттєвою є лише кількість студентів на кожній спеціалізації;
 - д) на кожній спеціалізації має бути не менше двох студентів і суттєвою є лише кількість студентів на кожній спеціалізації;
 - е) обмеження по кількості студентів на спеціалізації відсутні і суттєвим є порядковий номер, під яким був обраний студент на відповідну спеціалізацію.
33. На практику скерували 15 чоловік. Скількома способами можна їх розподілити за чотирма керівниками, якщо:
- а) у першого має бути 4 практиканти, у другого та третього — по 3, у четвертого — решта;
 - б) обмеження по кількості практикантів відсутні;
 - в) серед практикантів 8 дівчат та 7 хлопців, обмеження по кількості практикантів відсутні, а при розподілі важливою є лише стать практиканта;
 - г) у кожного керівника має спеціалізуватися принаймні один практикант.
 - д) те саме, що й у попередньому пункті, але порядок керівників не є суттєвим.
34. Скількома способами можна розмістити 10 білих і 6 чорних куль у 5 різних урн, якщо
- а) кулі одного кольору різні;
 - б) кулі одного кольору однакові;
 - в) кулі одного кольору різні і порядок куль в урні важливий;
 - г) кулі одного кольору різні і хоча би дві урни мають бути непорожні;
 - д) кулі одного кольору однакові і всі урни мають бути непорожні.
35. У сітці $\{0, 1, \dots, 7\} \times \{0, 1, \dots, 7\}$ дозволені кроки $(x, y) \rightarrow (x + 1, y)$ та $(x, y) \rightarrow (x, y + 1)$. Скільки існує шляхів із точки $(0, 0)$ у точку $(7, 7)$, які складаються з дозволених кроків та жодного разу не проходять через точки, розташовані вище за пряму $y = x$, і:
- а) проходять через точку $(2, 0)$;
 - б) проходять через точку $(2, 2)$?

5.8. Додаткові задачі

1. Підрахувати кількість різних 6-цифрових чисел, які:
 - а) мають парну суму цифр;
 - б) мають суму цифр кратну трьом.
2. Обчислити значення сум:
 - а) $C_{n-1}^0 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+m-1}^m$;
 - б) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2$;
 - в) $\sum_{r=0}^n r \cdot C_n^r$.

3. З використанням властивостей біноміальних коефіцієнтів вивести формулу для $\bar{C}_n^r$.
4. Довести, що:
 - а) $2 \mid C_{2n}^n$;
 - б) $(n+1) \mid C_{2n}^n$.
5. Обчислити $C_{2n}^0 - C_{2n-1}^1 + C_{2n-2}^2 - C_{2n-3}^3 + \dots + (-1)^n C_n^n$.
6. Обчислити $\frac{1}{C_{2n}^1} - \frac{2}{C_{2n}^2} + \frac{3}{C_{2n}^3} - \frac{4}{C_{2n}^4} + \dots + \frac{2n-1}{C_{2n}^{2n-1}}$.
7. Довести, що перші 2024 цифри після коми числа $(6 + \sqrt{35})^{2024}$ — дев'ятки.
8. У опуклому n -кутнику жодні три діагоналі не перетинаються у одній точці всередині нього. Підрахувати:
 - а) кількість точок перетину діагоналей, які лежать усередині n -кутника;
 - б) кількість трикутників, вершинами яких є вершини n -кутника, а сторонами — його діагоналі;
 - в) кількість частин, на які розбивається n -кутник діагоналями.
9. Вказати значення найбільшого коефіцієнта у поліноміальній формулі.
10. Зробили 41 постріл. Усі кулі влучили у мішень 2 м на 0,8 м. Довести, що обов'язково знайдуться два влучання, відстань між якими:
 - а) менша за 29 см;
 - б) менша за 28 см.
11. Довести наступні співвідношення:
 - а) $k^n = \sum_{r=1}^k C_k^r r! S(n, r)$;
 - б) $k S(n, k) = \sum_{i=k-1}^{n-1} C_n^i S(i, k-1)$;
 - в) $S(n, k) = \sum_{i=k-1}^{n-1} C_{n-1}^i S(i, k-1)$;
 - г) $S(n, k) = \sum_{i=k-1}^{n-1} k^{n-1-i} S(i, k-1)$;
 - д) $\sum_{k=1}^n S(n, k) x(x-1) \dots (x-k+1) = x^n$;
 - е) послідовність $S(n, 1), \dots, S(n, n)$ унімодальна при фіксованому n , тобто існує таке k_n , що $S(n, 1) < S(n, 2) < \dots < S(n, k_n) \geq S(n, k_n + 1) > \dots > S(n, n)$.
12. У сітці $\{0, 1, \dots, n\} \times \{0, 1, \dots, n\}$ дозволені кроки $(x, y) \rightarrow (x+1, y)$ та $(x, y) \rightarrow (x, y+1)$. Скільки існує шляхів із точки $(0, 0)$ у точку (n, n) , які складаються з дозволених кроків та жодного разу не проходять через точки, і:
 - а) лежать нижче за пряму $y = x$ (крім кінцевих точок);

- б) перетинають пряму $y = x$ рівно один раз (кількість точок дотику до прямої може бути довільною).
13. Підрахувати кількість способів розрізання правильного $2n$ -кутника на трикутники за умови, що лінії розрізу проходять по діагоналям, не перетинаються між собою і один з розрізів проходить через центр $2n$ -кутника.
14. На виборах старости групи Андрій отримав n голосів, а Тарас — m голосів. Знайти ймовірність того, що у процесі підрахунку голосів Андрій постійно випереджав Тараса. Розв'язати задачу у випадку:
- а) $m = n - 1$;
 - б) довільного m .

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Капітонова Ю. В., Кривий С. Л., Летичевський О. А., Луцький Г. М. Основи дискретної математики. К.: Наукова думка, 2002. 580 с.
2. Бондаренко М. Ф., Білоус Н. В., Руткас А. Г. Комп'ютерна дискретна математика. Харків: "Компанія Сміт", 2004. 480 с.
3. Бардачов Ю. М., Соколова Н. А., Ходаков В. Є. Дискретна математика. К.: Вища школа, 2002. 287 с.
4. Андрійчук В. І., Комарницький М. Я., Іщук Ю. Б. Вступ до дискретної математики. К.: Центр навчальної літератури, 2004. 254 с.
5. Нікольський Ю. В., Пасічник В. В., Щербина Ю. М. Дискретна математика. К.: Видавнича група ВНУ, 2007. 368 с.
6. Ядренко М. Й., Оленко А. Я. Дискретна математика. навчально-методичний посібник. К.: Київський університет ім. Т. Шевченка, 1995. 83 с.
7. Коцовський В. М. Основи дискретної математики: навчальний посібник. Ужгород: ПП «АУТДОР-ШАРК», 2020. 128 с.
8. Вітенько І. В. Математична логіка: Курс лекцій. Ужгород: УжДУ, 1971. 224 с.
9. Цейтлін Г. Є. Елементи теорії булевих функцій. К: Техніка, 1973. 76 с.
10. Rosen K. H. Discrete Mathematics and Its Applications, 8th edition. New York, NY: McGraw-Hill, 2019. 1118 с.
11. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике: Учеб. пособие. — 3-е изд., перераб. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 416 с.
12. Андерсон Д. Дискретная математика и комбинаторика. СПб.: Вильямс, 2003. 958 с.
13. Коцовський В. М. Дискретна математика та теорія алгоритмів. Частина І: Конспект лекцій для студентів спеціальностей: 6.122 — "Комп'ютерні науки", 6.121 — "Інженерія програмного забезпечення" / В. М. Коцовський. Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла", 2019. 52 с.
14. Коцовський В. М. Дискретна математика та теорія алгоритмів. Частина II: Конспект лекцій для студентів спеціальностей: 6.122 — "Комп'ютерні науки", 6.121 — "Інженерія програмного забезпечення" / В. М. Коцовський. Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла", 2019. 52 с.
15. Коцовський В. М. Дискретна математика та теорія алгоритмів: Методичні матеріали до практичних робіт / В. М. Коцовський. Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла", 2019. 35 с.
16. Комплект конкурсних завдань до університетських студентських олімпіад зі спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» / Розробник: В. М. Коцовський. Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла", 2021. 17 с.