

УДК 519.87

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).256-261](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).256-261)**І. І. Половко¹, М. М. Шаркаді²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики
polovko.ivan@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7128-4846>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат економічних наук
mariana.sharkadi@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1850-996X>

ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ В ЕКОЛОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

У цій статті представлено ґрунтовний огляд ключових типів математичних моделей, що застосовуються в екології для аналізу, моделювання та прогнозування змін у природних і антропогенних системах. Розглянуто як традиційні аналітичні, так і сучасні комп'ютеризовані підходи до моделювання, включаючи стохастичні, динамічні, просторово-часові моделі, моделі на основі нечіткої логіки, машинного навчання й штучного інтелекту. Наведено численні приклади використання моделей для вирішення завдань управління водними ресурсами, контролю якості повітря, дослідження популяційних процесів, оцінки кліматичних змін та розрахунку екосистемних послуг. Підкреслено роль міждисциплінарного підходу та цифрових технологій в удосконаленні інструментів екологічного моделювання. Визначено перспективи інтеграції моделей у процеси планування природокористування, управління ризиками та формування екологічної політики.

Ключові слова: математичне моделювання, екологічні системи, стохастичні моделі, динамічні моделі, просторово-часові моделі, нечітка логіка, машинне навчання, прийняття рішень.

1. Вступ. У сучасному світі екологічні виклики набувають усе більшої актуальності та гостроти. Глобальні зміни клімату, інтенсивне забруднення довкілля, деградація земель, виснаження водних і біологічних ресурсів потребують впровадження комплексних рішень для моніторингу, оцінки та прогнозування екологічного стану навколишнього середовища. Одним із ключових інструментів, що дає змогу системно та ефективно аналізувати ці явища, є математичне моделювання. Воно дозволяє не лише кількісно описувати складні природні й антропогенні процеси, а й прогнозувати їх розвиток у різних сценаріях майбутнього.

Математичні моделі допомагають виявити приховані зв'язки між чинниками, оцінити потенційні наслідки втручань, обґрунтувати прийняття управлінських рішень на місцевому, регіональному та глобальному рівнях. Завдяки стрімкому розвитку цифрових технологій, збільшенню обчислювальної потужності та розширенню доступу до відкритих даних, моделювання стало доступним, гнучким та інтегрованим методом наукового дослідження в екології.

Метою математичного моделювання в проблемі охорони навколишнього середовища є оцінка впливу господарської діяльності людини на стан і зміни природного середовища, зокрема, аналіз і прогноз якості повітря, поверхневих

і підземних вод з точки зору відповідності концентрацій шкідливих речовин існуючим стандартам. Математичні моделі застосовуються з метою оцінки екологічного збитку в результаті забруднення навколишнього середовища і для обґрунтування заходів щодо запобігання або зниження рівня забруднення. Математичні моделі є складовою частиною моніторингу навколишнього середовища, який являє собою систему спостережень, оцінки і прогнозу. Моніторинг ведеться в приземному і прибережному шарах атмосфери, в гідросфері (у поверхневих і підземних водах), у ґрунтах. Вихідними даними для моделей є умови поширення забруднюючих речовин (характеристики течій у повітряному і водному середовищі), і параметри викидів. Результати моделювання звичайно представляються у вигляді розподілу концентрації шкідливих домішок і їхнього масопотоку на границях розділу різних середовищ (осадження на ґрунт, підземний стік у ріки і т. ін.).

Основною характеристикою в таких моделях є концентрація шкідливої домішки у воді (повітрі). Звичайно використовується масова концентрація, що виражається в кг/м^3 (г/м^3 , мг/л і т. п.). Для газоподібних забруднень може застосовуватися також об'ємна концентрація.

2. Основний результат. Математичні моделі в екології класифікуються за різними критеріями: детермінованість/стохастичність, динамічність, рівень просторової деталізації, використання даних, логіка побудови тощо. Кожен тип моделей має свою область ефективного застосування та особливості реалізації.

1. Детерміновані моделі засновані на суворо визначених математичних формулах, що описують процеси за умов відомих параметрів. Вони є основою для опису систем із передбачуваною поведінкою. Наприклад, моделі кругообігу води чи кругообігу вуглецю в ґрунтах можуть будуватися на основі детермінованих диференціальних рівнянь. Вони зручні для моделювання процесів у стабільних умовах, наприклад у стаціонарних екосистемах.
2. Стохастичні моделі використовуються тоді, коли важливо врахувати ймовірнісну природу явищ або невизначеність у вхідних параметрах. Такі моделі дозволяють враховувати випадковість впливу кліматичних чинників, флуктуації в розмірах популяцій або неочікувані зміни середовища. Часто використовуються в моделюванні міграції видів, прогнозах викидів забруднювачів, аналізі екологічних ризиків.
3. Динамічні моделі дозволяють відстежувати зміну системи з часом і будувати сценарії розвитку. Вони є основними при оцінці впливу антропогенних чинників на екосистеми, аналізі змін клімату або динаміки популяцій. Їхня перевага — можливість тестування сценаріїв «що, якщо» при зміні вхідних параметрів або впровадженні природоохоронних заходів.
4. Просторово-часові моделі. Поєднання просторової деталізації з часовою динамікою забезпечує надзвичайно гнучкий інструмент для аналізу поширення лісових пожеж, інвазійних видів, урбанізації, ерозії ґрунтів тощо. За допомогою ГІС та дистанційного зондування такі моделі дають змогу створювати точні карти ризиків, оцінювати вплив забудови або змін ландшафту на довкілля.
5. Нечіткі моделі на відміну від класичних моделей, нечіткі дозволяють оперувати суб'єктивними оцінками й термінами, що не мають чітких границь. Наприклад, «задовільна якість води» або «високий рівень загрози». Це ро-

бать нечіткі моделі надзвичайно корисними в аналізі даних громадського моніторингу або при ухваленні рішень в умовах невизначеності.

6. Моделі штучного інтелекту. Методи машинного навчання (ML) та глибокого навчання (DL) відкривають нові можливості для роботи з великими наборами даних. Нейронні мережі, дерева рішень, метод опорних векторів застосовуються для розпізнавання патернів, класифікації станів середовища, прогнозування змін клімату, оцінки ефективності екологічних програм.

Зазначимо математичні основи моделей. Математичні моделі в екології зазвичай базуються на диференціальних рівняннях, які описують зміну стану екосистеми з часом. Наприклад, для моделювання зростання популяцій застосовуються рівняння логістичного зростання:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right),$$

де N — чисельність популяції, r — максимальна швидкість зростання, K — місткість середовища [1].

У дослідженні динаміки двох видів часто використовують модель Лотки-Вольтерри:

$$\frac{dN}{dt} = N(a - bP), \quad \frac{dP}{dt} = P(cN - d),$$

де $N(t)$ — популяція жертв, $P(t)$ — популяція хижаків в момент часу t , де a , b , c , d — додатні константи [2].

Для оцінки розповсюдження забруднювачів у воді чи повітрі використовують рівняння дифузії:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2},$$

де C — концентрація речовини, D — коефіцієнт дифузії [3].

Застосування таких математичних виразів дозволяє формалізувати екологічні процеси та забезпечити високу точність прогнозування, особливо при використанні чисельних методів їх розв'язання.

Математичні моделі в екології допомагають вивчати складні природні процеси, передбачати зміни в навколишньому середовищі та приймати обґрунтовані рішення для його збереження. Наведемо приклади їх застосування.

Управління водними ресурсами. Математичні моделі широко застосовуються для оцінки стану басейнів річок, прогнозування паводків, аналізу впливу змін клімату на гідрологічні цикли. Інструменти типу SWAT, WEAP, MIKE BASIN дозволяють враховувати різноманітні джерела забруднення, зміну водоспоживання та ефективність захисних заходів. У регіонах із густою мережею водних об'єктів (наприклад, Закарпаття) це критично важливо для забезпечення сталого водокористування.

Моніторинг і прогноз якості повітря. Моделі атмосферного розсіювання забруднень (AERMOD, CALPUFF) дозволяють оцінити вплив промислових викидів і транспорту, з урахуванням метеорологічних умов, рельєфу місцевості, рослинного покриву. Із використанням штучного інтелекту моделі здатні навчатися на історичних даних та генерувати сценарії майбутнього, включаючи аварійні ситуації.

Моделювання популяційних процесів. Багатоагентні системи дозволяють моделювати індивідуальну поведінку особин у межах популяції з урахуванням соціальних, поведінкових, середовищних чинників. Це особливо актуально для оцінки стійкості популяцій до зміни середовища, впливу хижацтва, конкуренції, паразитизму.

Кліматичне моделювання. Від глобальних моделей циркуляції атмосфери (GCM) до регіональних кліматичних моделей (RCM), інструменти дозволяють оцінити наслідки зміни клімату для біорізноманіття, сільського господарства, гідроресурсів. У Карпатах, зокрема, моделі допомагають передбачити ризики селевих потоків, паводків, ерозії ґрунтів.

Оцінка екосистемних послуг. Моделі InVEST, ARIES, LUCI інтегрують просторові, економічні й соціальні дані для оцінки послуг, які надають екосистеми: регулювання клімату, очищення води, запилення, рекреаційні функції. Вони використовуються для планування просторового розвитку та прийняття рішень на рівні громад.

Ці приклади свідчать, що математичні моделі є потужним інструментом у руках екологів, науковців і фахівців із природоохоронної діяльності.

Процес моделювання складається з кількох етапів: постановка завдання, збір даних, вибір типу моделі, калібрування, валідація, аналіз результатів. Для цього використовуються класичні чисельні методи (метод Ейлера, Рунге-Кутта), статистичний аналіз (регресія, кластеризація), а також інструменти штучного інтелекту.

Програмне забезпечення охоплює широкий спектр: від універсальних мов (R, Python, MATLAB) до спеціалізованих середовищ (Simile, AnyLogic, GAMA, NetLogo). ГІС-компоненти реалізуються в ArcGIS, QGIS, Google Earth Engine, що дозволяє інтегрувати просторові дані в моделі.

Для збору даних також можна використати нечітку логіку та математику. Якщо взяти до уваги водні ресурси, то одним із ключових завдань екологічного моніторингу є ідентифікація найважливіших індикаторів якості води, адже саме вони найкраще відображають основні джерела антропогенного забруднення. Проте застосування класичних методів аналізу часто ускладнюється через варіативність і нечіткість даних, що характерні для природних систем. У такому контексті особливо цінними є інструменти нечіткої логіки — зокрема, можемо розглянути нечітку ентропію (Fuzzy Entropy) [4] та метод нечіткої кластеризації (Fuzzy C-Means, FCM) [5]. Вони забезпечують гнучкий та надійний підхід до оцінки значущості окремих екологічних параметрів.

Нечітка ентропія дає змогу кількісно охарактеризувати рівень невизначеності в масиві екологічних даних і виокремити найвагоміші чинники, що впливають на стан водного середовища. Чим вище значення ентропії для певного показника, тим більший його внесок у загальну оцінку якості води. Це дає можливість класифікувати індикатори за ступенем їх екологічної значущості та впливу. Такий підхід є особливо корисним для аналізу складного і змішаного типу забруднення водних об'єктів.

Поєднання нечіткої ентропії та методу нечіткої кластеризації дозволяє не лише виявити домінантні чинники, що визначають якість водного середовища, але й упорядкувати їх за пріоритетністю. Застосування цих методів підвищує достовірність результатів аналізу, полегшує формування рекомендацій для еко-

логічного управління та сприяє обґрунтованому прийняттю рішень щодо захисту водних ресурсів.

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. Математичне моделювання є невід’ємною складовою сучасних екологічних досліджень, що дає змогу системно аналізувати складні природні та антропогенні процеси, прогнозувати їх динаміку та обґрунтовувати управлінські рішення. У статті розглянуто широкий спектр моделей — від детермінованих і стохастичних до просторово-часових, нечітких і штучного інтелекту — кожна з яких має свої переваги залежно від контексту застосування. Аналіз практичних прикладів показав високу ефективність моделей у таких напрямках, як управління водними ресурсами, оцінка якості повітря, моніторинг популяцій, прогноз кліматичних змін та моделювання екосистемних послуг.

Основні труднощі в екологічному моделюванні пов’язані з обмеженим доступом до якісних даних, невизначеністю параметрів, складністю калібрування моделей і потребою в мультидисциплінарному підході. Однак розвиток відкритих даних (Copernicus, GBIF, OpenStreetMap), зростання потужностей хмарних обчислень (Google Cloud, AWS), розвиток систем інтернету речей (IoT) відкривають нові горизонти.

У майбутньому очікується розширення гібридних підходів, поєднання моделей процесів і даних, створення цифрових двійників екосистем, інтеграція моделей у прийняття рішень через екологічні інформаційні системи, а також активізація участі громадськості в екологічному моделюванні через мобільні застосунки й краудсорсинг даних.

Математичне моделювання є ключовим інструментом у сучасній екології, що дозволяє системно вивчати природні процеси, прогнозувати наслідки змін і формувати науково обґрунтовану екологічну політику. Ефективне застосування моделей сприяє раціональному використанню природних ресурсів, мінімізації ризиків і збереженню довкілля. Подальший розвиток екологічного моделювання залежить від синергії науки, технологій і суспільства на шляху до сталого розвитку.

Список використаної літератури

1. Kot M. *Elements of Mathematical Ecology*. Cambridge University Press. 2001. P. 3–11.
2. Murray, J. D. *Mathematical Biology I: An Introduction* (3rd ed.). Springer, 2002. P. 79–83.
3. Crank J. *The Mathematics of Diffusion* (2nd ed.). Oxford University Press. 1975. P. 1–12.
4. De Luca A., and Termini S. A Definition of a Nonprobabilistic Entropy in the Setting of Fuzzy Sets Theory. *Information and Control*. 1972. Vol. 20. P. 301–312.
5. Bezdek J. C. *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*. Plenum Press. 1981. P. 65–80.

Polovko I. I., Sharkadi M. M. Use of mathematical models in environmental research.

This article provides a thorough overview of the key types of mathematical models used in ecology to analyze, model, and predict changes in natural and anthropogenic systems. Both traditional analytical and modern computerized modeling approaches are considered, including stochastic, dynamic, spatio-temporal, fuzzy logic, machine learning, and artificial intelligence models. Numerous examples of the use of models for solving problems of water resources management, air quality control, study of population processes, climate change assessment, and calculation of ecosystem services are given. The role of an interdisciplinary approach and digital technologies in improving environmental modeling tools

is emphasized. The prospects for integrating models into the processes of environmental planning, risk management and environmental policy formation are determined.

Keywords: mathematical modeling, ecological systems, stochastic models, dynamic models, spatio-temporal models, fuzzy logic, machine learning, decision making.

References

1. Kot, M. (2001). *Elements of Mathematical Ecology*. Cambridge University Press, 3–11.
2. Murray, J. D. (2002). *Mathematical Biology I: An Introduction (3rd ed.)*. Springer, 79–83.
3. Crank, J. (1975). *The Mathematics of Diffusion (2nd ed.)*. Oxford University Press, 1–12.
4. De Luca, A., & Termini, S. (1972). A Definition of a Nonprobabilistic Entropy in the Setting of Fuzzy Sets Theory. *Information and Control*, 20(4), 301–312.
5. Bezdek, J. C. (1981). *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*. Plenum Press, 65–80.

Одержано 09.03.2025