

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
Кафедра інформатики та фізико-математичних дисциплін**

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять з дисципліни

«АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»

для студентів спеціальності 121 Інженерія програмного забезпечення

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Ужгород

2024

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Алгебра та аналітична геометрія» для студентів спеціальності 121 Інженерія програмного забезпечення. Векторна алгебра / Уклад.: В.С. Морохович. Ужгород: УжНУ, 2024. 54 с.

Укладач:

Морохович Василь Степанович – доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформатики та фізико-математичних дисциплін факультету інформаційних технологій ДВНЗ «Ужгородський національний університет»

Рецензенти:

Мулеса Оксана Юріївна – професор, доктор технічних наук, професор кафедри програмного забезпечення систем факультету інформаційних технологій ДВНЗ «Ужгородський національний університет»;

Рубіш Василь Васильович – доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теоретичної фізики фізичного факультету ДВНЗ «Ужгородський національний університет»

*Методичні вказівки розглянуто та затверджено
на засіданні кафедри інформатики та фізико-математичних дисциплін
факультету інформаційних технологій
(протокол №7 від 20 грудня 2024 р.)*

*Схвалено та рекомендовано до друку
науково-методичною комісією
факультету інформаційних технологій
(протокол №5 від 20 грудня 2024 р.)*

ЗМІСТ

Вступ	4
Тема 1. Вектори і лінійні операції над ними	5
Теоретичні відомості	5
Завдання для аудиторної і самостійної роботи	11
Тема 2. Лінійна залежність векторів. Розклад вектора за базисом	12
Теоретичні відомості	12
Завдання для аудиторної і самостійної роботи	17
Тема 3. Системи координат. Координати вектора. Лінійні операції з векторами в координатній формі	18
Теоретичні відомості	18
Завдання для аудиторної і самостійної роботи	25
Тема 4. Скалярний добуток векторів	26
Теоретичні відомості	26
Завдання для аудиторної і самостійної роботи	31
Тема 5. Векторний та мішаний добуток векторів	32
Теоретичні відомості	32
Завдання для аудиторної і самостійної роботи	45
Самостійні роботи	46
Тестові завдання	48
Список використаної літератури	53

ВСТУП

Методичні вказівки до практичних занять з розділу «Векторна алгебра» укладені відповідно до навчальної програми дисципліни «Алгебра та аналітична геометрія» для здобувачів вищої освіти спеціальності 121 Інженерія програмного забезпечення. Мета пропонованого видання – сформувати у студентів практичні навички розв’язування задач, розвинути математичне мислення здобувачів вищої освіти.

У методичних вказівках подано визначення основних понять, формулювання теорем і формул за кожною темою. Теоретичні відомості проілюстровано прикладами розв’язання типових задач із детальними поясненнями. Поєднання необхідного обсягу теорії з прикладами задач дозволяє здобувачам вищої освіти ефективно засвоїти матеріал у ході самостійного навчання. Також у методичних вказівках запропоновано завдання для аудиторної і самостійної роботи, варіанти самостійних робіт і тестові завдання для самоконтролю.

ТЕМА 1. ВЕКТОРИ І ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ

Теоретичні відомості

При виборі та розробці математичних методів розв'язування прикладних задач конкретного змісту використовують як скалярні, так і векторні величини.

Скалярною величиною, або скаляром, називається величина, яка характеризується за вибраної одиниці вимірювання лише числом. Прикладами скалярних величин можуть бути: довжина, площа, маса, густина, робота, сила струму, температура тощо.

Інші величини, наприклад, переміщення, швидкість, прискорення, сила, визначаються не тільки своїм чисельним значенням, але й напрямом. Такі величини називаються *векторними*. Кожну векторну величину можна зобразити напрямленим відрізком, який називають вектором. Довжина його дорівнює числовому значенню векторної величини, а напрям такий, як і в цієї величини.

Зображення векторних величин напрямленими відрізками (векторами) дає можливість звести ряд дій з векторними величинами до відповідних операцій з векторами.

Вектором називається напрямлений прямолінійний відрізок, тобто відрізок, для якого вказані початок і кінець. Вектор, початком якого є точка A , а кінцем – точка B , позначається символом $\overrightarrow{AB}$. Крім такого позначення, дуже часто вживається позначення вектора однією малою буквою латинського алфавіту з рискою зверху, тобто $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ... (рис. 1).

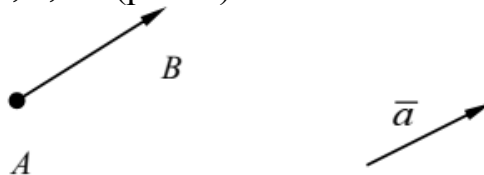


Рис. 1

Вектор $\overrightarrow{BA}$ (його початок в точці B , а кінець в точці A) називається *протилежним* вектору $\overrightarrow{AB}$. Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$, позначається $-\vec{a}$ (рис. 2).

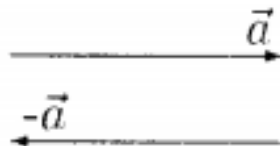


Рис. 2

Довжиною, або модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ називається довжина відрізка AB , яка позначається символом $|\overrightarrow{AB}|$ або $|\vec{a}|$.

Вектор, початок і кінець якого збігаються, називається *нульовим* і позначається $\vec{0}$. Модуль нуль-вектора дорівнює нулю, а його напрям не визначений.

Вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називаються *колінеарними* (рис. 3). Колінеарні вектори можуть бути однаково напрямлені – співнаправлені, які позначають $\vec{a} \uparrow \vec{c}$, і протилежно напрямлені, то їх називають

протилежно напрямленими і позначають $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$. Нульовий вектор вважається колінеарним будь-якому вектору.

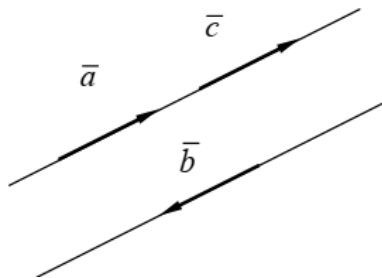


Рис. 3

Вектори вважаються *рівними*, якщо вони колінеарні, мають однакові напрями і довжини (рис. 4).

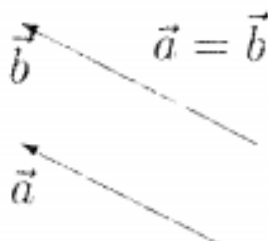


Рис. 4

З означення рівності векторів випливає, що вектор можна переносити паралельно самому собі, а початок вектора поміщати в будь-яку точку O простору. Тому вектори, які вивчаються в геометрії, називаються *вільними*.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається *одиничним* вектором. Якщо напрям одиничного вектора збігається з напрямом $\vec{a}$, то його називають *ортом* вектора $\vec{a}$, і позначають $\vec{a}^0$.

Три вектори називаються *компланарними*, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах.

Якщо серед трьох векторів хоча б один нульовий або два вектори колінеарні, то такі вектори компланарні.

Над векторами можна виконувати певні математичні операції. Найпростішими з них є додавання і віднімання векторів, а також множення вектора на число. Як відомо, ці операції називаються *лінійними*.

Сумою $\vec{a} + \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який з'єднує початок вектора $\vec{a}$ з кінцем вектора $\vec{b}$ за умови, що вектор $\vec{b}$ відкладено від кінця вектора $\vec{a}$ (рис. 5). Це правило додавання векторів називають *правилом трикутника*.

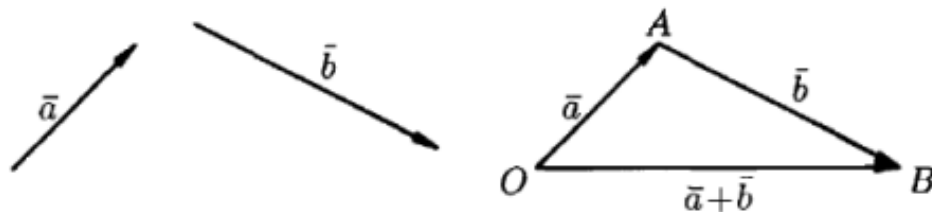


Рис. 5

Суму двох векторів можна побудувати також за *правилом паралелограма* (рис. 6).

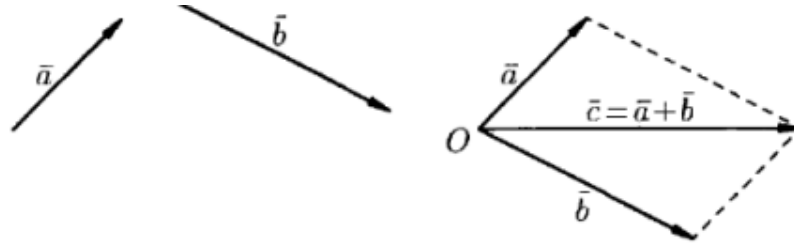


Рис. 6

Для того, щоб додати n векторів потрібно послідовно використовувати правило трикутника. Тоді, вектор суми скінченного числа n векторів, розміщених послідовно, причому так, що початок кожного наступного вектора-доданка збігається з кінцем попереднього вектора-доданка, сполучає початок першого вектора-доданка з кінцем останнього вектора-доданка (рис. 7). Це правило справедливе й у випадку, коли всі n векторів-доданків розташовані на одній прямій.

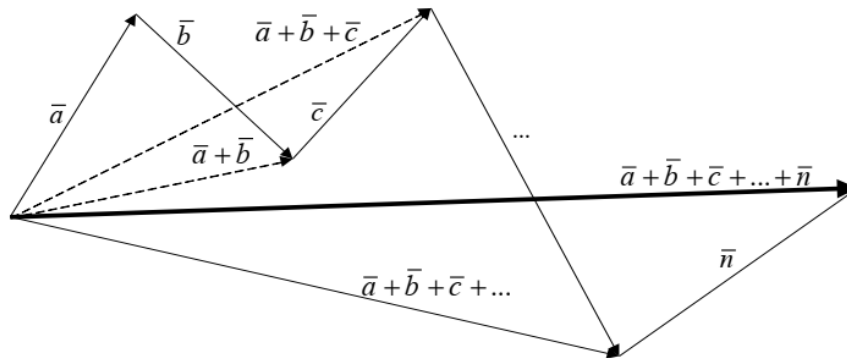


Рис. 7

Додавання векторів має такі властивості:

- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- 2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- 3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- 4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Правило трикутника додавання векторів дає можливість ввести й операцію віднімання векторів.

Різницею $\vec{a} - \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$, тобто $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ (рис. 8).

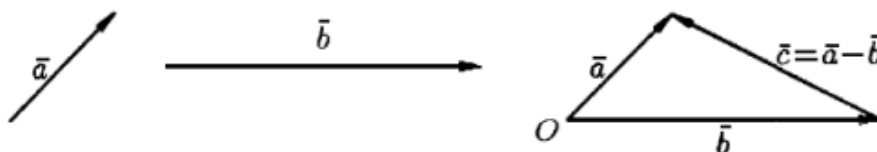


Рис. 8

Зауважимо, що у паралелограмі, побудованому на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, одна направлена діагональ є сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, а інша – різницею (рис. 9).

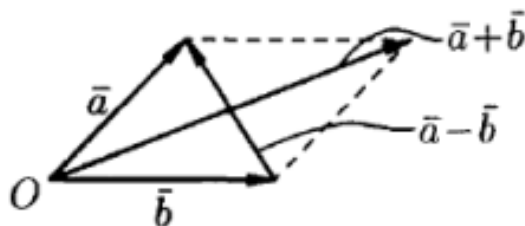
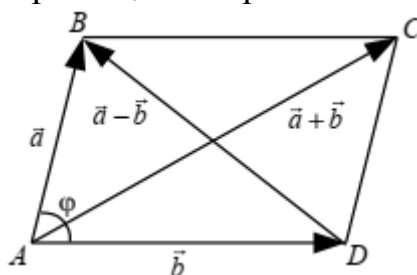


Рис. 9

Приклад 1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = 60^\circ$, причому $|\vec{a}| = 5$ і $|\vec{b}| = 8$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Розв'язування: Побудуємо паралелограм $ABCD$ на векторах $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Згідно з визначенням суми та різниці векторів маємо: $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{a} - \vec{b}$.



З $\triangle ABD$ за теоремою косинусів:

$$|\overrightarrow{BD}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2 - 2 |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos \varphi,$$

$$|\overrightarrow{BD}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi,$$

$$|\overrightarrow{BD}|^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 49.$$

Звідси, $|\vec{a} - \vec{b}| = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{49} = 7$.

З $\triangle ACD$ за теоремою косинусів знаходимо:

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 - 2 |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{CD}| \cdot \cos \angle ADC,$$

$$\angle ADC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2 |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cos 120^\circ,$$

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ = 129.$$

Значить, $|\vec{a} + \vec{b}| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{129}$.

Добутком $\alpha \cdot \vec{a}$ вектора $\vec{a} \neq \vec{0}$ на число $\alpha \neq 0$ ($\alpha \in R$) називається вектор $\vec{b}$, який задовольняє такі умови:

1) $\vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{a}$;

2) $|\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$;

3) вектори $\vec{b}$ і $\vec{a}$ однаково напрямлені, якщо $\alpha > 0$, і протилежні, якщо $\alpha < 0$.

З означення випливає, що коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то $\vec{b} = \alpha \vec{a}$, і навпаки. Якщо $\vec{a}^0$ – одиничний вектор того самого напрямку, що і вектор $\vec{a}$, то $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0$, і навпаки, $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Операція множення вектора на число (скаляр) має наступні властивості:

1) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$

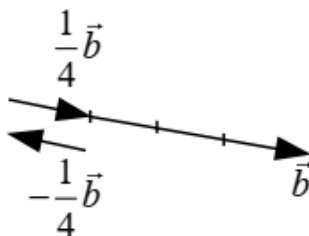
2) $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$

3) $\alpha \cdot (\beta \vec{a}) = (\alpha \beta) \vec{a}$.

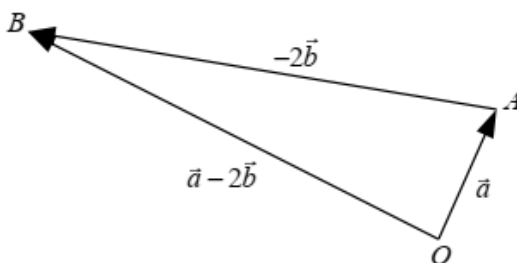
Приклад 2. За даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати вектори: а) $-\frac{1}{4} \vec{b}$; б) $\vec{a} - 2\vec{b}$.



Розв'язування: а) Напрямок вектора $-\frac{1}{4} \vec{b}$ протилежний напрямку вектора $\vec{b}$, а його модуль – у 4 рази менший за модуль вектора $\vec{b}$:



б) Вектор $\vec{a} - 2\vec{b}$ запишемо як $\vec{a} + (-2\vec{b})$. За правилом трикутника:



Нехай дано вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і вісь l . Проекцією вектора $\vec{a}$ на вісь l ($\text{пр}_l \vec{a}$) називається довжина відрізка $A'B'$ між основами перпендикулярів, опущених з точок A і B , на вісь l , взята зі знаком «+», якщо напрями відрізка $A'B'$ та осі l

збігаються, і зі знаком «-», якщо вони протилежні (рис. 10). Якщо $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ або $\overrightarrow{AB} \perp l$, то $\text{пр}_l \overrightarrow{AB} = 0$.

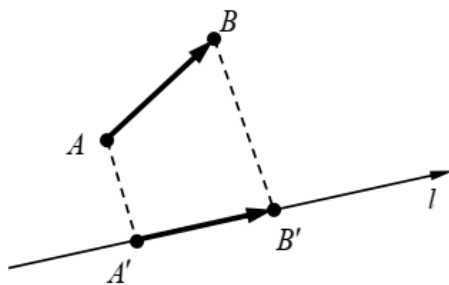


Рис. 10

Кутом між вектором і віссю називають кут між двома променями, які виходять зі спільного початку і напрям одного променя збігається з напрямом заданого вектора, напрям іншого – з напрямом осі (рис. 11): $\angle \varphi = \angle(\vec{a}, l)$. Очевидно, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

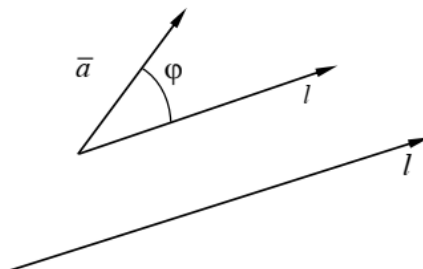


Рис. 11

Зауважимо, що коли вектор $\vec{a}$ і вісь l колінеарні співнаправлені, то $\angle \varphi = 0$; якщо протилежно напрямлені, то $\angle \varphi = 180^\circ$.

Теорема. Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь l дорівнює добутку модуля вектора $\vec{a}$ на косинус кута φ між вектором $\vec{a}$ та віссю l , тобто

$$\text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi.$$

Проекція вектора на вісь додатня (від'ємна), якщо вектор утворює з віссю гострий (тупий) кут, і дорівнює нулю, якщо цей кут – прямий.

Властивості проекції вектора на вісь:

1. Проекції рівних векторів на одну і ту саму вісь є рівними між собою:

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \text{пр}_l \vec{a} = \text{пр}_l \vec{b}.$$

2. Проекція суми векторів на одну і ту ж саму вісь дорівнює сумі їх проекцій на цю вісь (рис. 12), тобто

$$\text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_l \vec{a} + \text{пр}_l \vec{b}.$$

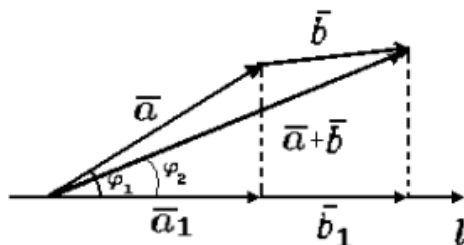


Рис. 12

3. Якщо вектор $\vec{a}$ множиться на будь-яке число α , його проекція на довільну вісь також множиться на число α , тобто

$$\text{пр}_l(\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot \text{пр}_l \vec{a}.$$

Проекцією вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на вектор $\vec{b}$ (рис. 13) називають число, яке знаходять за формулою:

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi.$$

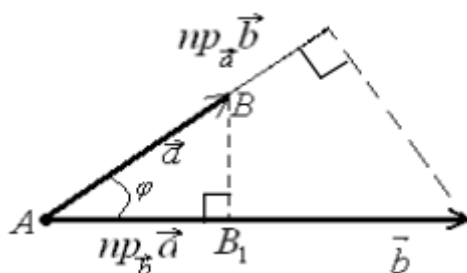


Рис.13

Приклад 3. Знайти $\text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b})$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$ і $\varphi = 30^\circ$.

Розв'язування: За властивостями проекції вектора на вісь маємо:

$$\text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_l \vec{a} + \text{пр}_l \vec{b} = |\vec{a}| \cos \varphi + |\vec{b}| \cos \varphi;$$

$$\text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b}) = 2 \cdot \cos 30^\circ + 4 \cdot \cos 30^\circ = 3\sqrt{3}.$$

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

- За даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати вектор $2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.
- Задано три вектори – $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Побудувати вектори:
 - $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$;
 - $-\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$;
 - $\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$;
 - $-2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$;
 - $-\vec{a} - 3\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$
- Дано $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 17$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 12$. Обчислити $|\vec{a} + \vec{b}|$.
- Три одиничні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють із віссю l кути $\pi/3$, $2\pi/3$ і π відповідно. Знайти проекцію на вісь l вектора $3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$.

5. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, причому $|\vec{a}| = 12$ і $|\vec{b}| = 5$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.
6. На тіло діють дві сили – $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, причому $|\vec{F}_1| = 8$ Н, $|\vec{F}_2| = 6$ Н. Знайти їх рівнодійну, якщо величина кута між ними дорівнює 90° .
7. При якій умові вектори $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$ колінеарні?
8. У прямокутнику $ABCD$ вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Знайти вектори $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}$.
9. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = 120^\circ$. Обчислити $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 5$ і $|\vec{b}| = 3$.
10. Вектор $\vec{a}$ утворює з віссю l кут $\varphi_1 = 60^\circ$, а вектор $\vec{b}$ утворює з тією самою віссю кут $\varphi_2 = 120^\circ$. Знайти проекцію суми $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, де $\vec{c} = 3\vec{a}$, на вісь l , якщо відомо, що $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 4$.

ТЕМА 2. ЛІНІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ВЕКТОРІВ. РОЗКЛАД ВЕКТОРА ЗА БАЗИСОМ

Теоретичні відомості

Надалі нас буде цікавити лінійний простір R^n , який утворюється множиною n -вимірних векторів.

Очевидно, що для узагальнення поняття вектора на площині потрібно відмовитися від тлумачення вектора як напрямленого відрізка, оскільки навіть при $n = 4$ терміни довжина та напрямок втрачають наочність.

Для узагальнення скористаємося тим, що будь-який вектор однозначно визначається своїми координатами: на площині $\vec{a} = (a_x; a_y)$, у просторі $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$. Саме тому можна за аналогією до векторів на площині й у просторі запровадити операції над n -вимірними векторами.

n -вимірним вектором $\vec{x}$ називається упорядкована сукупність n чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ і позначається:

$$\vec{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n).$$

Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ називаються координатами вектора. Упорядкованість означає, що сукупності, які відрізняються перестановкою координат, визначають різні вектори.

Розглянемо множину всіх впорядкованих наборів n дійсних чисел, та введемо на ній операції додавання та множення на число $\lambda \in R$ за наступними правилами:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1; a_2; \dots; a_n) + (b_1; b_2; \dots; b_n) = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; \dots; a_n + b_n);$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_1; \lambda a_2; \dots; \lambda a_n).$$

Множину всіх впорядкованих наборів n дійсних чисел $\vec{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n)$ з введеними операціями додавання та множення на число, називають n -вимірним векторним або алгебраїчним простором та позначають R^n . Очевидно, що для довільних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ з простору R^n та будь-яких дійсних чисел λ, μ виконуються наступні властивості:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;
3. у множині R^n існує нульовий вектор $\vec{0}$ такий, що $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ для будь-якого $\vec{a} \in R^n$;
4. для кожного $\vec{a} \in R^n$ існує протилежний вектор $(-\vec{a}) \in R^n$ такий, що $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$;
5. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;
6. $\lambda (\mu \vec{a}) = (\lambda \mu) \vec{a}$;
7. $(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$;
8. $\lambda (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$.

Розглянемо систему векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називається вектор $\vec{x} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$, де $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – деякі скалярні множники (числа), які називають коефіцієнтами лінійної комбінації.

Отже, лінійні комбінації векторів – це вектори, які одержуються в результаті виконання сукупності лінійних операцій на даними векторами $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називається лінійно незалежною, якщо рівність

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

виконується тільки, коли всі $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називається лінійно залежною, якщо існують такі дійсні числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, хоча б одне з яких не дорівнює нулю, що

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}.$$

Те, що система векторів лінійно залежна, рівносильно твердженню, що хоч би один із векторів цієї системи є лінійною комбінацією інших, тобто лінійно виражається через інші вектори системи.

Властивості лінійної залежності і незалежності векторів:

- 1) Якщо серед векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ є нульовий вектор, то система векторів є лінійно залежною.
- 2) Якщо вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$, ($k \leq n$) системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно залежними, то і всі вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ цієї системи є лінійно залежними.

Система, що складається з одного вектора, лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли цей вектор – нульовий.

Два вектори лінійно залежні лише тоді, коли вони колінеарні. Справді, нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні. Тоді існує таке число $\alpha \neq 0$, що

$$\vec{b} = \alpha \vec{a},$$

а це означає, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ лінійно залежні, і навпаки.

Три вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони компланарні.

Дійсно, нехай вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лінійно залежні, тобто хоча б один з них, наприклад, вектор $\vec{c}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}.$$

Віднесемо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ до спільного початку. Очевидно, що вектори $\alpha \vec{a}$ і $\beta \vec{b}$ лежатимуть в площині векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Їх сума, тобто вектор $\vec{c}$, лежатиме в цій же площині. Отже, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні.

Навпаки, якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – компланарні, то вони мають спільний початок і лежать в одній площині. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ непаралельні, то подання вектора $\vec{c}$ у вигляді лінійної комбінації векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ показано на рис. 14. Отже, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – лінійно залежні.

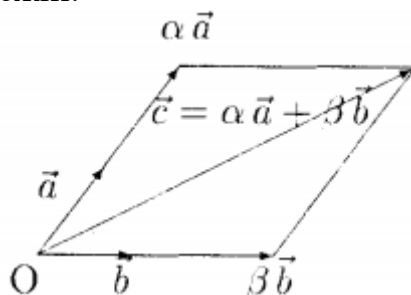


Рис. 14

Якщо ж вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ паралельні, то один з них, наприклад $\vec{a}$, лінійно виражається через другий вектор, тобто $\vec{a} = \beta \vec{b}$. Тоді

$$\vec{a} = \beta \vec{b} + 0 \cdot \vec{c},$$

Тобто вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лінійно залежні.

Теорема. Будь-які чотири вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ та $\vec{d}$ в просторі є лінійно залежними, тобто один із векторів є лінійною комбінацією трьох інших.

Доведення. Віднесемо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ до спільного початку. Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні, то вони лінійно залежні, тобто у співвідношенні $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = \vec{0}$ хоча б один коефіцієнт відмінний від нуля. Але тоді і вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ також лінійно залежні.

Розглянемо випадок, коли вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – некомпланарні. Проведемо через кінець вектора $\vec{d}$ площину, паралельну попарно векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис. 15). Отримаємо паралелепіпед, діагоналлю якого є вектор $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$. Діагональ OD замикає ламану лінію $OAPD$, тому згідно з правилом додавання векторів маємо: $\vec{d} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PD}$.

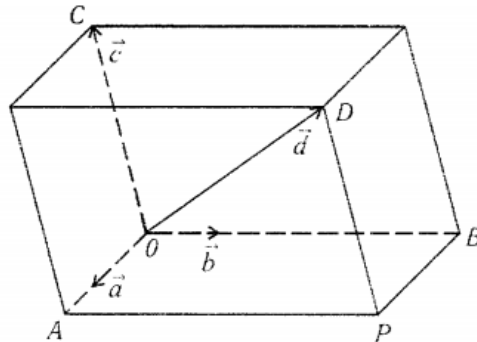


Рис. 15

Оскільки $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PD}$ колінеарні відповідно векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, то існують такі числа α , β , γ , що $\overrightarrow{OA} = \alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{AP} = \beta\vec{b}$, $\overrightarrow{PD} = \gamma\vec{c}$. Отже, отримаємо

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c},$$

а це означає, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ лінійно залежні.

Останнє співвідношення називають розкладом вектора по трьох некомпланарних векторах.

Приклад 1. Чи буде система векторів $\vec{a}_1 = (2; -3; 1)$, $\vec{a}_2 = (3; -1; 5)$, $\vec{a}_3 = (1; -4; 3)$ лінійно незалежною?

Розв'язування: Використовуємо умову лінійної незалежності векторів:

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 = \vec{0},$$

знайдемо значення коефіцієнтів α_1 , α_2 , α_3 .

В умову лінійної незалежності підставимо координати заданих векторів:

$$\alpha_1 (2; -3; 1) + \alpha_2 (3; -1; 5) + \alpha_3 (1; -4; 3) = \vec{0}$$

або

$$(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3; -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3; \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3) = (0; 0; 0).$$

Використовуючи умову рівності двох векторів, одержимо систему лінійних однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Система лінійних однорідних рівнянь має тільки тривіальний розв'язок, коли головний визначник системи $\Delta \neq 0$.

Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 35 \neq 0.$$

Отже, дана однорідна система має нульові розв'язки: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Тому, вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ і $\vec{a}_3$ лінійно незалежні.

Базисом в n -вимірному лінійному просторі називається n лінійно незалежних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, узятих в певному порядку: $\vec{e}_1$ – перший базисний вектор; $\vec{e}_2$ – другий базисний вектор і т.д.

Система n векторів $\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, $\vec{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$, $\dots$, $\vec{a}_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})$ утворює базис в n -вимірному алгебраїчному просторі R^n тоді і тільки тоді, коли визначник, рядками якого є координати векторів системи, не дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Базою, або базисом в просторі називається будь-яка впорядкована трійка некомпланарних векторів.

Якщо в просторі заданий базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, то будь-який вектор $\vec{a}$ можна однозначно подати як лінійну комбінацію базисних векторів, тобто у вигляді

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3.$$

Отже, якщо заданий базис, то кожному вектору можна поставити у відповідність впорядковану трійку чисел – коефіцієнтів розкладу цього вектора по базових векторах. Навпаки, кожній впорядкованій трійці чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ за допомогою базису можна поставити у відповідність вектор $\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$, де $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – базисні вектори.

Базисом на площині називається впорядкована пара неколінеарних векторів.

Якщо на площині вибраний базис, то кожному вектору однозначно відповідає впорядкована пара чисел, і навпаки, кожній впорядкованій парі чисел однозначно відповідає вектор.

Серед всіх векторів, заданих у одновимірному просторі (на прямій) базис складається з одного ненульового вектора.

Якщо $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – базис і $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$, то числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ називаються координатами вектора $\vec{a}$ відносно базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Записують це так: $\vec{a} = \{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3\}$.

Приклад 2. Переконалися, що система векторів $\vec{a} = (3; 4; -3)$, $\vec{b} = (-5; 5; 0)$, $\vec{c} = (2; 1; -4)$ утворює базис у множині всіх векторів простору, і знайти розклад вектора $\vec{d} = (8; -16; 17)$, у цьому базисі.

Розв'язування: Спочатку переконаємось, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є лінійно незалежними тобто утворюють базис. Для цього складемо і обчислимо визначник з координат векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -60 + 15 + 30 - 80 = -95 \neq 0$$

Таким чином визначник $\Delta \neq 0$, тому вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є лінійно незалежними, тобто утворюють базис у множині всіх векторів простору.

Нехай α, β, γ – координати вектора $\vec{d}$ у базисі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, тобто

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}.$$

Розпишемо цю рівність

$$(8; -16; 17) = \alpha (3; 4; -3) + \beta (-5; 5; 0) + \gamma (2; 1; -4),$$

звідки

$$\begin{cases} 3\alpha - 5\beta + 2\gamma = 8, \\ 4\alpha + 5\beta + \gamma = -16, \\ -3\alpha - 4\gamma = 17. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю СЛАР, отримаємо шукані координати вектора $\vec{d}$ в новому базисі: $\alpha = 1, \beta = -3, \gamma = -5$. Отже, розклад вектора $\vec{d}$ за базисом $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ має вигляд:

$$\vec{d} = \vec{a} - 3\vec{b} - 5\vec{c}.$$

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

1. У паралелограмі $ABCD$ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, E – середина сторони CD . Розкласти вектор $\overrightarrow{BE}$ за базисом $\vec{a}, \vec{c}$.
2. У ромбі $ABCD$ діагоналі $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$. Розкласти за цими векторами вектори: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$.

3. У трикутнику ABC точка D ділить сторону AB у відношенні $AD:DB=2:7$. Розкласти вектор $\overrightarrow{CD}$ за векторами $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$.
4. Знайти розклад за базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ діагоналей $\vec{d}_1, \vec{d}_2$ паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{k} - 3\vec{j}$.
5. Перевірити колінеарність векторів $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ і $\vec{b} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$. Знайти їх лінійну залежність.
6. З'ясувати, чи вектори $\vec{a}_1 = (1; 1; 1)$ і $\vec{a}_2 = (1; -1; 2)$ є лінійно залежними.
7. Чи можуть вектори $\vec{a}_1 = (1; 1; 1)$, $\vec{a}_2 = (1; -1; 2)$ і $\vec{a}_3 = (4; 1; 4)$ утворювати базис?
8. При якому значенні α вектори $\vec{a}_1 = (1; 2; -1)$, $\vec{a}_2 = (2; 3; 1)$ і $\vec{a}_3 = (\alpha; 1; 2)$ будуть лінійно залежними?
9. На площині задані вектори $\vec{p} = (2; -3)$, $\vec{q} = (1; 2)$ і $\vec{a} = (9; 4)$. Переконатись, що вектори $\vec{p}$ і $\vec{q}$ утворюють базис на площині і знайти розклад вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{p}, \vec{q}$.
10. Дано три вектори $\vec{a} = (3; -2; 1)$, $\vec{b} = (-1; 1; -2)$, $\vec{c} = (2; 1; -3)$. Знайти розклад вектора $\vec{d} = (11; -6; 5)$ за базисом $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

ТЕМА 3. СИСТЕМИ КООРДИНАТ. КООРДИНАТИ ВЕКТОРА. ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ З ВЕКТОРАМИ В КООРДИНАТНІЙ ФОРМІ

Теоретичні відомості

Зафіксуємо в просторі точку O і виберемо довільну точку M . Радіус-вектором точки M щодо точки O називається вектор $\overrightarrow{OM}$. Виберемо, крім того, за базис трійку некомпланарних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Тоді точці M можна поставити у відповідність впорядковану трійку чисел – координати її радіус-вектора.

Сукупність точки O і базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ називається *декартовою системою координат* $Oe_1e_2e_3$. Точку O називають початком координат. Осі, що проходять через початок координат в напрямі базисних векторів, називають осями координат: першу – віссю абсцис, другу – віссю ординат, третю – віссю аплікату. Площини, які проходять через осі координат, називаються координатними площинами (рис. 16).

Координатами точки M у декартовій системі координат називають координати радіус-вектора цієї точки у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Отже, якщо $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = (x; y; z)$, то точка M має координати x, y, z , що записують так: $M(x; y; z)$.

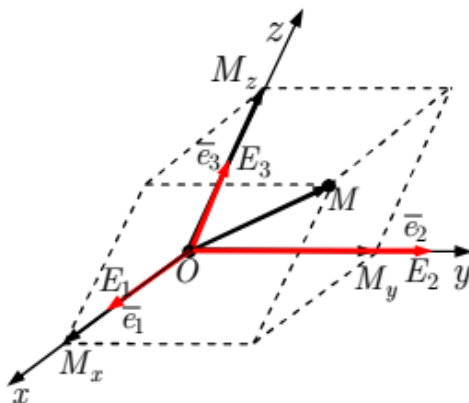


Рис. 16

Декартова система координат називається *прямокутною*, якщо базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – ортонормований, тобто $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$, і кути між базисними векторами прямі. Ортонормований базис позначають через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Тоді $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$. Прямокутну декартову систему координат позначають $Oxyz$, де точка O – початок координат, Ox – вісь абсцис, Oy – вісь ординат, Oz – вісь аплікат.

Розглянемо у просторі прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Виділимо на осях Ox, Oy, Oz одиничні вектори (орти) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ відповідно. Виберемо довільний вектор $\vec{a}$ простору та перенесемо його початок у початок координат $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ (рис. 17).

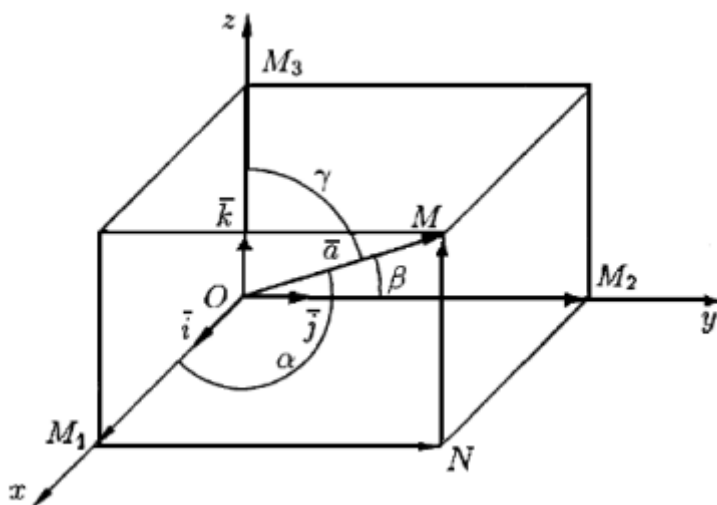


Рис. 17

Знайдемо проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі. Для цього проведемо через кінець M вектора $\overrightarrow{OM}$ площину, паралельну координатним площинам. Точки перетину цих площин з координатними осями позначимо M_1, M_2 та M_3 відповідно. Отримаємо прямокутний паралелепіпед, однією з діагоналей якого є вектор $\overrightarrow{OM}$. Тоді $\text{пр}_{Ox} \vec{a} = |\overrightarrow{OM_1}|$, $\text{пр}_{Oy} \vec{a} = |\overrightarrow{OM_2}|$ та $\text{пр}_{Oz} \vec{a} = |\overrightarrow{OM_3}|$. Крім того,

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}.$$

Але $\overrightarrow{OM_1} = |\overrightarrow{OM_1}| \cdot \vec{i}$; $\overrightarrow{OM_2} = |\overrightarrow{OM_2}| \cdot \vec{j}$; $\overrightarrow{OM_3} = |\overrightarrow{OM_3}| \cdot \vec{k}$. Позначимо $|\overrightarrow{OM_1}| = a_x$, $|\overrightarrow{OM_2}| = a_y$ та $|\overrightarrow{OM_3}| = a_z$. Тоді

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Ця рівність називається *розкладом вектора по ортах координатних осей*, а числа a_x , a_y , a_z – координатами вектора. Таким чином, координати вектора є його проекції на відповідні координатні осі. Вектор $\vec{a}$, який задано своїми координатами в Охуз, часто записують у скороченій формі: $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$. Слід відзначити, що базисні орти $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ у координатній формі мають такий запис: $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

За відомими координатами вектора можна знайти його модуль. Оскільки $\vec{a}$ є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда, то

$$|\overrightarrow{OM}|^2 = |\overrightarrow{OM_1}|^2 + |\overrightarrow{OM_2}|^2 + |\overrightarrow{OM_3}|^2,$$

тобто

$$|\vec{a}|^2 = |a_x|^2 + |a_y|^2 + |a_z|^2,$$

звідти

$$|\vec{a}| = \sqrt{|a_x|^2 + |a_y|^2 + |a_z|^2}.$$

Отже, модуль вектора дорівнює квадратному кореню з суми квадратів його проекцій на координатні осі.

Кути, які утворює вектор з додатними напрямними координатних осей Ох, Оу, Оз, позначаються α , β , γ відповідно (рис. 19). Числа $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ називають *напрямними косинусами* вектора $\vec{a}$. Оскільки a_x , a_y , a_z є проекціями вектора $\vec{a}$ на координатні осі, то згідно з означенням проекції вектора на вісь, маємо:

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha, a_y = |\vec{a}| \cdot \cos \beta, a_z = |\vec{a}| \cdot \cos \gamma.$$

Звідси випливає, що:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Напрямні косинуси вектора задовольняють співвідношення:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{a_x^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{a_y^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{a_z^2}{|\vec{a}|^2} = \frac{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 1,$$

тобто

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Слід відзначити, що координати орта $\vec{a}^0$ вектора $\vec{a}$ є напрямні косинуса вектора, тобто $\vec{a}^0 = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$.

Приклад 1. Знайти модуль вектора $\vec{a} = 20\vec{i} + 30\vec{j} - 60\vec{k}$ і його напрямні косинуси.

Розв'язування: Модуль вектора $\vec{a}$ знайдемо за формулою:

$$|\vec{a}| = \sqrt{|a_x|^2 + |a_y|^2 + |a_z|^2} = \sqrt{20^2 + 30^2 + (-60)^2} = 70.$$

Напрямні косинуси вектора:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{20}{70} = \frac{2}{7}; \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}; \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{-60}{70} = -\frac{6}{7}.$$

Лінійні операції з векторами в координатній формі

Нехай вектори $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ та $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ задані своїми проекціями на осі координат, або

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}.$$

Лінійні операції над векторами зводяться до відповідних лінійних операцій над їх проекціями.

Рівність векторів. Якщо два вектори рівні. То рівні також і їхні проекції на будь-яку вісь, а отже, рівні їхні координати. Тому з рівності $\vec{a} = \vec{b}$ випливає:

$$a_x = b_x, \quad a_y = b_y, \quad a_z = b_z.$$

Колінеарність векторів. Умовою колінеарності двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є рівність $\vec{a} = \alpha\vec{b}$, тобто

$$a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \alpha b_x\vec{i} + \alpha b_y\vec{j} + \alpha b_z\vec{k}.$$

Звідси отримаємо, що $a_x = \alpha b_x$, $a_y = \alpha b_y$, $a_z = \alpha b_z$, а отже

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \alpha.$$

Таким чином, умовою колінеарності двох векторів є пропорційність їхніх відповідних координат.

Сума та різниця двох векторів. Сума або різниця двох векторів дорівнює сумі або різниці відповідних координат:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$$

або

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z).$$

Добуток вектора на число. Щоб помножити вектор на число, необхідно помножити на це число його координати:

$$\lambda \vec{a} = \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k}$$

або

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z).$$

Приклад 2. Знайти модуль вектора $\vec{a}$, якщо $\vec{a} = 3\vec{b} - 2\vec{c} + \vec{d}$, де $\vec{c} = (-4; 3; -1)$, $\vec{b} = (-3; -7; 0)$, $\vec{d} = (2; 1; -8)$.

Розв'язування: Знайдемо координати вектора $\vec{a}$, виконуючи дії з векторами $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$. Спочатку знайдемо вектори $3\vec{b}$ та $2\vec{c}$:

$$3\vec{b} = (-9; -21; 0); \quad 2\vec{c} = (-8; 6; -2).$$

Відшукаємо координати вектра $\vec{a} = 3\vec{b} - 2\vec{c} + \vec{d}$:

$$\vec{a} = (-9 + 8 + 2; -21 - 6 + 1; 0 + 2 - 8) = (1; -26; -6).$$

Знайдемо модуль вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-26)^2 + (-6)^2} = \sqrt{713}.$$

Приклад 3. Знайти α , β , при яких вектори $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} + \alpha\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \beta\vec{j} + 3\vec{k}$ колінеарні.

Розв'язування: Оскільки за умовою колінеарності двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, їх координати пропорційні:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{\beta} = \frac{\alpha}{3}.$$

З рівності $\frac{1}{2} = \frac{3}{\beta}$ знайдемо $\beta = 6$. Аналогічно знаходимо α : $\frac{1}{2} = \frac{\alpha}{3}$, звідси $\alpha = 1,5$.

Координати вектора, заданого двома точками

Нехай у прямокутній системі координат дано дві точки $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AB}$ (рис. 18).

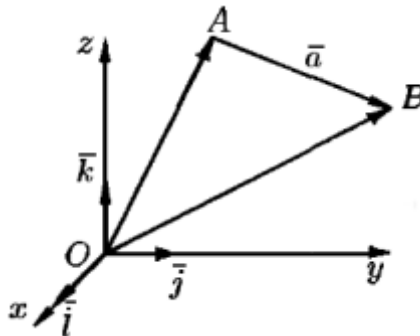


Рис. 18

Маємо $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2, z_2)$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Отже,

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Тобто, координати будь-якого вектора є різницею відповідних координат його кінця та початку.

Запишемо формулу для довжини вектора $\overrightarrow{AB}$, тобто відстані між двома точками:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Приклад 4. Обчислити периметр трикутника ABC з вершинами $A(8; 0; 7)$, $B(10; 2; 8)$, $C(10; -2; 8)$.

Розв'язування: Знайдемо довжини сторін трикутника ABC :

$$\begin{aligned} AB = |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \\ &= \sqrt{(10 - 8)^2 + (2 - 0)^2 + (8 - 7)^2} = 3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC = |\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2} = \\ &= \sqrt{(10 - 10)^2 + (-2 - 2)^2 + (8 - 8)^2} = 4; \end{aligned}$$

$$AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2} =$$

$$= \sqrt{(10-8)^2 + (-2-0)^2 + (8-7)^2} = 3.$$

Отже, периметр трикутника ABC :

$$P = AB + BC + AC = 3 + 4 + 3 = 10.$$

Поділ відрізка в даному відношенні

За допомогою радіус-векторів можна розв'язати задачу про ділення відрізка в даному відношенні.

Нехай точка $M(x; y; z)$ розташована на відрізку M_1M_2 між точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 19), і ділить його на два відрізки M_1M та MM_2 у відношенні λ , тобто $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$.

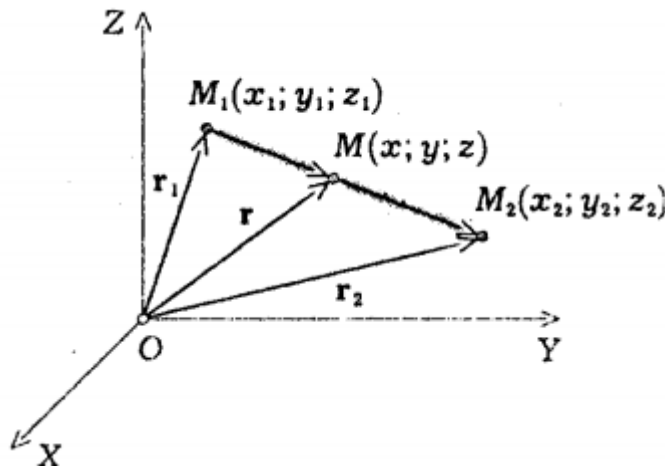


Рис. 19

З огляду на колінеарність векторів $\overrightarrow{M_1M}$ і $\overrightarrow{MM_2}$, маємо $\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2}$, а оскільки $\overrightarrow{M_1M} = r - r_1$, а $\overrightarrow{MM_2} = r_2 - r$, то

$$r - r_1 = \lambda \cdot (r_2 - r).$$

Розв'язуючи дану рівність відносно r , одержуємо:

$$r = \frac{r_1 + \lambda r_2}{1 + \lambda}.$$

Враховуючи, що радіус-вектори r_1 і r_2 дорівнюють:

$$r_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, r_2 = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k},$$

одержимо формули для координат точки $M(x; y; z)$ через координати точок, які обмежують поділений у відношенні λ відрізок:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Якщо $\lambda > 0$, то точка $M(x; y; z)$ знаходиться на відрізку M_1M_2 між точками M_1 і M_2 ; якщо $\lambda < 0$, то точка M розташована ззовні відрізку M_1M_2 .

Якщо $\lambda = 1$, то точка M ділить відрізок M_1M_2 навпіл, тоді для координат середини відрізку матимемо:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Приклад 5. Дано вершини $A(2; 2; 2)$, $B(6; 5; 0)$, $C(0; 3; 8)$ паралелограма $ABCD$. Знайти вершину D .

Розв'язування: нехай точка O – точка перетину діагоналей паралелограма. Діагоналі паралелограма, як відомо, в точці перетину діляться навпіл.

Тоді, оскільки точка O є серединою відрізку AC , то згідно з формулами для знаходження координат середини відрізку маємо:

$$x_O = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2 + 0}{2} = 1,$$

$$y_O = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2 + 3}{2} = 2,5,$$

$$z_O = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{2 + 8}{2} = 5,$$

тобто координати точки перетину діагоналей паралелограма будуть $O(1; 2,5; 5)$.

Точка O є також серединою відрізку BD . Оскільки координати точок B і O відомі, то можна знайти координати точки D :

$$x_O = \frac{x_B + x_D}{2}, \quad y_O = \frac{y_B + y_D}{2}, \quad z_O = \frac{z_B + z_D}{2},$$

або

$$1 = \frac{6 + x_D}{2}, \quad 2,5 = \frac{5 + y_D}{2}, \quad 5 = \frac{0 + z_D}{2},$$

звідки $x_D = -4$, $y_D = 0$, $z_D = 10$, тобто $D(-4; 0; 10)$.

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

1. Задано вектори $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} - 3\vec{j}$. Обчислити координати векторів: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.
2. Визначити α і β . При яких вектори $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ і $\vec{b} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - \beta\vec{k}$ колінеарні. Написати лінійну залежність між векторами для знайдених α і β .

3. Перевірити, що чотири точки є вершинами трапеції $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(-1; 1; -3)$, $D(3; -5; 3)$.
4. Відомо $|\vec{a}| = 2$ і кути, які цей вектор утворює з координатними осями: $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$. Обчислити проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі.
5. Вершини трикутника ABC мають координати $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 0; 4)$, $C(3; 6; 7)$. Знайти довжину медіани, проведеної до сторони AC .
6. Обчислити напрямні косинуси вектора $\vec{a} = (12; -15; -16)$.
7. Знайти орт вектора $\vec{a} = (-2; 6; -3)$.
8. Знайти вектор $\vec{b}$, який колінеарний вектору $\vec{a} = (1; -2; -2)$, утворює з віссю Oy гострий кут і має довжину $|\vec{b}| = 15$.
9. Задані координати трьох вершин $A(0; 1; -1)$, $B(1; 0; 2)$, $C(2; 3; 0)$ паралелограма $ABCD$. Знайти координати точки D .
10. Знайти координати точки M перетину медіан трикутника ABC , якщо $A(1; 2; 3)$, $B(0; 1; 1)$, $C(-1; 0; 1)$.

ТЕМА 4. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Теоретичні відомості

Розглянемо два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, приведені до одного початку (рис. 20). *Кутом між векторами* називається найменший кут, на який необхідно повернути будь-який з них до суміщення їх напрямів. Будемо позначати його $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$. Згідно зі сказаним, $\varphi \in [0, \pi]$.

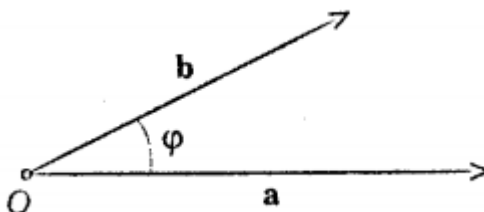


Рис. 20

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними (позначається $\vec{a} \cdot \vec{b}$ або $(\vec{a}, \vec{b})$), тобто

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi,$$

де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

З означення проекції вектора на вісь випливає, що $|\vec{a}| \cdot \cos \varphi = \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$, $|\vec{b}| \cdot \cos \varphi = \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$, тоді

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b},$$

Тобто скалярний добуток двох векторів дорівнює модулю одного з них, помноженому на проекцію другого вектора на вісь співнапрявлену з першим вектором.

Властивості скалярного добутку:

1) Скалярний добуток не залежить від порядку співмножників (комутативність):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

Ця властивість випливає з означення скалярного добутку.

2) Числовий множник можна виносити за знак скалярного добутку (асоціативність):

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Дійсно, користуючись відповідною властивістю проекцій вектора, маємо:

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}}(\lambda \vec{a}) = |\vec{b}| \cdot \lambda \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \lambda \cdot |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Дана властивість має й обернену інтерпретацію: щоб помножити скалярний добуток на числовий множник, достатньо помножити на цей множник будь-який з перемножуваних векторів.

3) Скалярний добуток будь-якого вектора на суму двох векторів дорівнює сумі скалярних добутків цього вектора на кожний з векторів доданків (дистрибутивність):

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

$$\text{Дійсно, } \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \text{пр}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} + \vec{a} \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

4) Скалярний добуток вектора самого на себе дорівнює квадрату його модуля, тобто:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

Оскільки кут $\varphi = 0^\circ$, то $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$.

Скалярний добуток вектора самого на себе називається скалярним квадратом і позначається $\vec{a}^2$. Згідно з цим, дана властивість матиме вигляд:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2,$$

звідки можна записати

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$$

Якщо вектор $\vec{a}$ є не нульовим вектором, то можна зробити висновок, що скалярний добуток будь-якого вектора самого на себе є завжди величиною додатною, тобто

$$\vec{a} \cdot \vec{a} > 0.$$

Крім того, з властивості випливає, що $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$.

5) Скалярний добуток двох векторів дорівнює нулю, коли вектори взаємно перпендикулярні або хоча б один зі співмножників є нуль-вектором.

Дійсно, коли вектори перпендикулярні ($\vec{a} \perp \vec{b}$), то кут між ними дорівнює $\varphi = 90^\circ$, а оскільки $\cos 90^\circ = 0$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0.$$

Якщо принаймні один зі співмножників дорівнює нуль-вектору, то це твердження випливає безпосередньо, оскільки $|\vec{0}| = 0$. Слід також відзначити, що оскільки напрям нуль-вектора невизначений, то його також можна вважати перпендикулярним будь-якому вектору. Враховуючи це, дану властивість можна записати так:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Зокрема з властивості випливає, що $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$.

Скалярний добуток векторів у координатній формі

Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані своїми координатами:

$$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z), \quad \vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$$

або

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k},$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні попарно перпендикулярні базисні вектори, тобто $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$; $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$.

Тоді, враховуючи дані рівності, скалярний добуток рівний:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x (\vec{i} \cdot \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \cdot \vec{j}) + \\ &+ a_x b_z (\vec{i} \cdot \vec{k}) + a_y b_x (\vec{j} \cdot \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \cdot \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \cdot \vec{k}) + a_z b_x (\vec{k} \cdot \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \cdot \vec{j}) + \\ &+ a_z b_z (\vec{k} \cdot \vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \end{aligned}$$

Отже,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

тобто скалярний добуток двох векторів у координатній формі дорівнює сумі добутків їхніх відповідних координат.

Якщо розглядати скалярний добуток вектора самого на себе, то маємо:

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

Оскільки $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$, то одержимо формулу для знаходження довжини вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

тобто, довжина вектора дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його координат.

В окремому випадку скалярного добутку одиничного вектора самого на себе, який у координатній формі має вигляд $\vec{e} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$, одержимо:

$$1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma.$$

Приклад 1. Довести, що чотирикутник з вершинами $A_1(-5; 3; 4)$, $A_2(-1; -7; 5)$, $A_3(6; -5; -3)$, $A_4(2; 5; -4)$ є квадрат.

Розв'язування: Знаходимо координати векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{A_4A_3}$ і $\overrightarrow{A_1A_4}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (-1 + 5; -7 - 3; 5 - 4) = (4; -10; 1);$$

$$\overrightarrow{A_2A_3} = (6 + 1; -5 + 7; -3 - 5) = (7; 2; -8);$$

$$\overrightarrow{A_4A_3} = (6 - 2; -5 - 5; -3 + 4) = (4; -10; 1);$$

$$\overrightarrow{A_1A_4} = (2 + 5; 5 - 3; -4 - 4) = (7; 2; -8).$$

Порівнюючи координати векторів бачимо, що:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_4A_3}, \quad \overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{A_1A_4},$$

а оскільки

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{4^2 + (-10)^2 + 1^2} = \sqrt{117},$$

$$|\overrightarrow{A_2A_3}| = \sqrt{7^2 + 2^2 + (-8)^2} = \sqrt{117},$$

тоді

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = |\overrightarrow{A_2A_3}| = |\overrightarrow{A_4A_3}| = |\overrightarrow{A_1A_4}|.$$

Тому

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| \cdot |\overrightarrow{A_2A_3}| = 4 \cdot 7 + (-10) \cdot 2 + 1 \cdot (-8) = 0,$$

то

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| \perp |\overrightarrow{A_2A_3}|.$$

Отже, чотирикутник $A_1A_2A_3A_4$ є квадрат.

Застосування скалярного добутку векторів:

1. Умова перпендикулярності двох векторів

Оскільки скалярний добуток двох взаємно перпендикулярних векторів дорівнює нулю, то для $\vec{a} \perp \vec{b}$ одержимо:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

2. Кут між двома векторами

З означення скалярного добутку випливає вираз для знаходження кута між двома векторами:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

У координатній формі ця формула матиме вигляд:

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

3. Проекція вектора на вектор

Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ обчислюється за формулою:

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

4. Робота сталої сили

Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно з точки A в точку B під дією сталої сили $\vec{F}$, що утворює кут φ з напрямком $\overrightarrow{AB}$. З фізики відомо, що робота A сили $\vec{F}$ при переміщенні $\overrightarrow{AB}$ дорівнює:

$$A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB},$$

або

$$A = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \varphi.$$

Приклад 2. Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 4\vec{q}$, якщо $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, $\varphi = (\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{3}$.

Розв'язування: Діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, утворюють вектори $\vec{a} + \vec{b} = 3\vec{p} + 3\vec{q}$ і $\vec{a} - \vec{b} = \vec{p} - 5\vec{q}$.

Знайдемо спочатку $|\vec{a} + \vec{b}|^2$. Використовуючи властивості скалярного добутку, отимаємо:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = (3\vec{p} + 3\vec{q})^2 = 9\vec{p}^2 + 18\vec{p} \cdot \vec{q} + 9\vec{q}^2 =$$

$$= 9|\vec{p}|^2 + 18|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \cos \varphi + 9|\vec{q}|^2 = 9 \cdot 1 + 18 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot 4 = 63,$$

звідки

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}.$$

Аналогічно знаходимо $|\vec{a} - \vec{b}|^2$:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{p} - 5\vec{q})^2 = \vec{p}^2 - 10\vec{p} \cdot \vec{q} + 25\vec{q}^2 =$$

$$= |\vec{p}|^2 - 10|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \cos \varphi + 25|\vec{q}|^2 = 1 - 10 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 25 \cdot 4 = 91,$$

Отже, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{91}$.

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

- Знайти довжину вектора $\vec{c} = 4\vec{b} - \vec{a}$, якщо відомо, що $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60^\circ$.
- Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Відомо, що $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$. Обчислити:
 - $\vec{a} \cdot \vec{b}$;
 - $\vec{a}^2$;
 - $(\vec{a} + \vec{b})^2$;
 - $(\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b})$;
 - $(2\vec{a} + 3\vec{b})^2$.

3. Дано довжини векторів $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$. Визначити, при якому α вектори $\alpha\vec{a} + \vec{b}$ і $\alpha\vec{a} - \vec{b}$ взаємно перпендикулярні.
4. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Відомо, що $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$. Обчислити кут між векторами $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{q} = 2\vec{a} - \vec{b}$.
5. Знайти проєкцію вектора $\vec{a} = \vec{m} + 4\vec{n}$ на вектор $\vec{b} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.
6. Знайти довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, якщо $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$.
7. Знайти величину внутрішнього кута трикутника ABC при вершині A і довжину висоти, проведеної з вершини B , якщо $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$, $C(5; 2; 6)$.
8. Обчислити роботу, яку виконує сила $\vec{F}(3; -1; -4)$, коли її точка прикладання рухаючись прямолінійно переміщується з положення $A(-2; 5; 6)$ в положення $B(-1; 7; -3)$.
9. Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до осі Oz і задовольняє умовам $\vec{x} \cdot \vec{a} = 9$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -4$.
10. Дано вершини чотирикутника $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$, $D(-5; -5; 3)$. Довести, що його діагоналі AC і BD взаємно перпендикулярні.

ТЕМА 5. ВЕКТОРНИЙ ТА МІШАНИЙ ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ

Теоретичні відомості

Впорядкована трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, які виходять із спільного початку, називається *правою*, якщо з кінця третього вектора $\vec{c}$ найкоротший перехід від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ здійснюється проти годинникової стрілки, і *лівою*, якщо найкоротший перехід від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ здійснюється за годинниковою стрілкою (рис. 21).

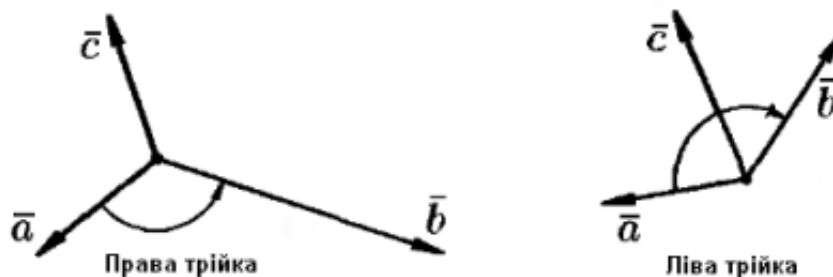


Рис. 21

Якщо умовно позначимо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ відповідно перший, другий, третій, то при перестановці будь-яких векторів, які знаходяться поруч, наприклад $\vec{a}$ і $\vec{b}$ або $\vec{b}$ і $\vec{c}$, ліва трійка векторів переходить у праву, і навпаки.

Трійку векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ будемо позначати у фігурних дужках: $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

Декартова система координат називається *правою (лівою)*, якщо базисні вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ утворюють праву (ліву) впорядковану трійку векторів. Таким чином, слід мати на увазі, що існують ліві та праві декартові системи координат. Надалі будемо користуватися правою системою координат.

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє такі умови:

- 1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
- 2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
- 3) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку векторів.

Векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають $\vec{a} \times \vec{b}$ або $[\vec{a}, \vec{b}]$. З означення випливає, що модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 22).

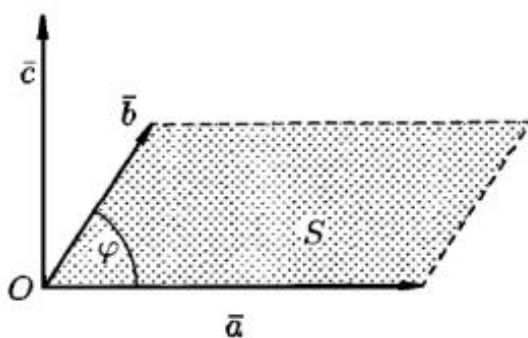


Рис. 22

З означення векторного добутку безпосередньо випливають наступні співвідношення для ортів координатних осей:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$$

Нехай задані три вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$. Розглянемо векторний добуток векторів $\vec{b}$ та $\vec{c}$, тобто $\vec{b} \times \vec{c}$.

Якщо вектор $\vec{b}$ векторно помножити на вектор $\vec{c}$, а вектор $\vec{a}$ також векторно помножити на векторний добуток $\vec{b} \times \vec{c}$, то отримаємо вектор $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$, який називається *подвійним векторним добутком*.

Для довільних векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ справедливе співвідношення:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Властивості векторного добутку:

1. При перестановці місцями векторів-співмножників векторний добуток двох векторів змінює знак на протилежний (антикомутативність):

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

Справді, вектори $\vec{a} \times \vec{b}$ і $\vec{b} \times \vec{a}$ мають однакові довжини (модулі):

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{a}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi.$$

Вони колінеарні, оскільки обидва перпендикулярні до площини, що визначається векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Їх напрями протилежні, бо трійки $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ та $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{b} \times \vec{a}\}$ різної орієнтації, одна з них є правою, а інша лівою (рис. 23). Таким чином, $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

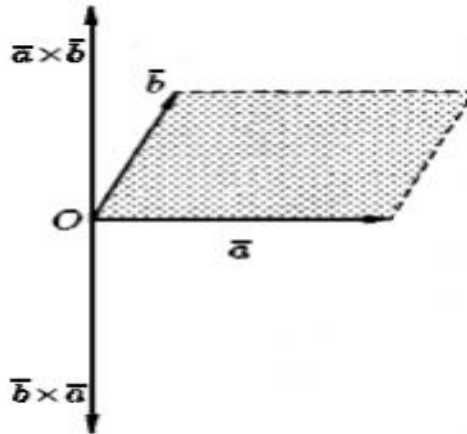


Рис. 23

2. Векторний добуток двох векторів дорівнює нульовому вектору тоді, коли вектори-множники колінеарні, тобто $\vec{a} \parallel \vec{b}$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Дійсно, якщо вектори колінеарні, то кут φ між ними буде дорівнювати 0° або 180° . Тоді $\sin \varphi = 0$, звідки модуль векторного добутку, а отже, і сам векторний добуток буде дорівнювати нулю.

Зовсім очевидно, що коли $|\vec{a}| = 0$ або $|\vec{b}| = 0$, тоді $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

3. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, то модуль їх векторного добутку дорівнює добутку їх модулів, і навпаки:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \quad \leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Ця властивість є очевидним наслідком означення векторного добутку, оскільки $\sin 90^\circ = 1$.

4. Скалярний множник виноситься за знак векторного добутку (асоціативність):

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Доведемо рівність $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

Дійсно, якщо $\lambda > 0$, то обидва вектори в цій рівності мають один і той же напрям (рис. 24а) та один і той же модуль $\lambda |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$, де φ – кут між векторами

$\vec{a}$ і $\vec{b}$. Якщо $\lambda < 0$ (рис. 24б), то вектор $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ матиме модуль $\lambda |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$, але буде напрямлений протилежно вектору $\vec{a} \times \vec{b}$, хоча такий самий напрям і такий самий модуль матиме й вектор $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$, отриманий з вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ множенням на від'ємне число λ .

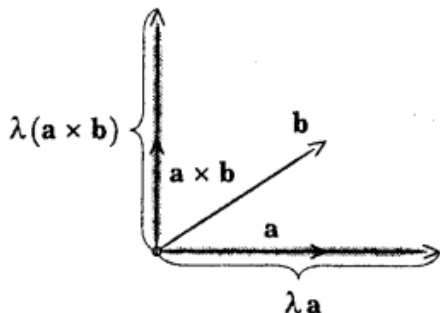


Рис. 24а

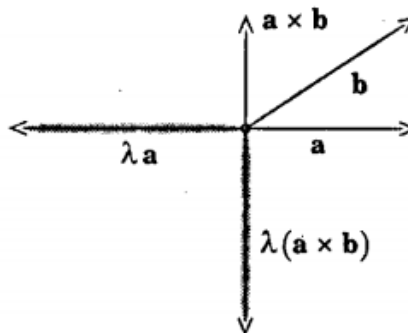


Рис. 24б

Аналогічно доводиться й рівність $\vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

Наслідком даної властивості є можливість одночасного винесення скалярних множників у обох векторів-співмножників за знак векторного добутку:

$$(\lambda_1\vec{a}) \times (\lambda_2\vec{b}) = \lambda_1\lambda_2(\vec{a} \times \vec{b}).$$

5. *Векторний добуток вектора на суму двох інших векторів дорівнює сумі векторних добутків даного вектора на кожний з векторів доданків (дистрибутивність):*

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Приклад 1. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} - 2\vec{b}$ і $3\vec{a} + \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, а кут φ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 30° .

Розв'язування: Користуючись властивостями векторного добутку, маємо:

$$\begin{aligned} (\vec{a} - 2\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b}) &= 3(\vec{a} \times \vec{a}) + (\vec{a} \times \vec{b}) - 6(\vec{b} \times \vec{a}) - 2(\vec{b} \times \vec{b}) = \\ &= 3 \cdot 0 + (\vec{a} \times \vec{b}) + 6(\vec{a} \times \vec{b}) - 2 \cdot 0 = 7(\vec{a} \times \vec{b}). \end{aligned}$$

$$S = |7(\vec{a} \times \vec{b})| = 7|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin 30^\circ = 7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 7.$$

Векторний добуток векторів у координатній формі

Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані у просторі своїми координатами, тобто

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + \\ &+ a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + \\ &+ a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}).\end{aligned}$$

Користуючись означенням і властивостями векторного добутку, маємо:

$$\begin{aligned}\vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k}; \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}; \\ \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k}; \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}; \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}; \\ \vec{i} \times \vec{i} &= 0; \quad \vec{j} \times \vec{j} = 0; \quad \vec{k} \times \vec{k} = 0.\end{aligned}$$

Ураховуючи дані вирази і групуючи відповідні члени рівності, одержимо:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.\end{aligned}$$

Цю рівність зручно переписати у наступній операторній формі:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Таким чином, векторний добуток двох векторів у координатній формі є визначник, елементами першого рядка якого є координатні орти, а елементи другого та третього рядків – координати відповідно першого та другого векторів-співмножників.

Для випадку, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ розташовані на площині, наприклад $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ і $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$, векторний добуток двох векторів матиме вигляд:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & 0 \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Тобто, векторний добуток двох векторів, розташованих в одній з координатних площин, колінеарний координатній осі, яка перпендикулярна даній площині.

Приклад 2. Знайти векторний добуток векторів $\vec{a} = \left(1; 0; -\frac{1}{4}\right)$ і $\vec{b} = (4; -12; -5)$.

Розв'язування: За формулою векторного добутку двох векторів у координатній формі маємо:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 4 & -12 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ -12 & -5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -12 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= -3\vec{i} + 4\vec{j} - 12\vec{k}\end{aligned}$$

або

$$\vec{c} = (-3; 4; -12).$$

Застосування векторного добутку:

1. Встановлення колінеарності двох векторів

З властивості векторного добутку маємо:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \text{ тоді, коли } \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0},$$

тобто

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \parallel \vec{b}$$

2. Обчислення площі паралелограма та трикутника, побудованого на двох векторах

Нехай задані точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$. Розглянемо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Згідно з означенням векторного добутку модуль векторного добутку $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, тобто

$$S_{\text{паралелограма}} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

або у координатній формі

$$S_{\text{паралелограма}} = \text{mod} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix},$$

де *mod* означає модуль визначника.

Якщо потрібно знайти площу трикутника ABC , то вона дорівнює половині площі отриманого паралелограма, тобто

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

3. Визначення моменту сили відносно точки

Якщо на тіло закріплене в точці O діє сила $\vec{F}$, прикладена в точці A , то тіло обертається навколо осі l . Причому, моментом сили $\vec{F}$ відносно точки O називається вектор $\vec{M} = |\vec{F}| \cdot h$, де h – плече, тобто відстань від точки, відносно якої шукають момент сили до лінії дії сили (рис. 25).

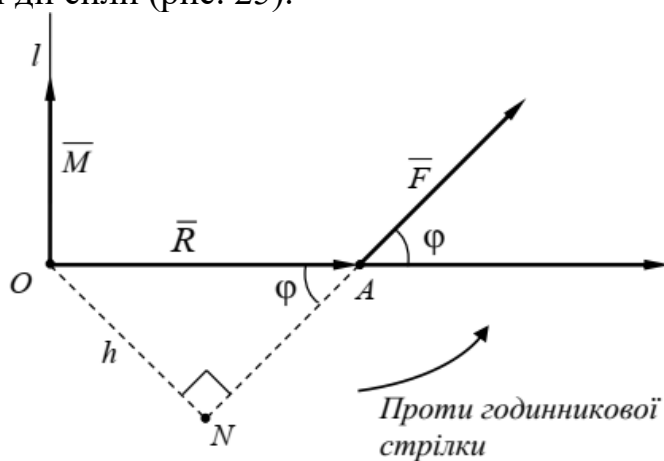


Рис. 25

Виразимо плече h через вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{R}$, де $\vec{R}$ – радіус-вектор точки A , в яку прикладена сила $\vec{F}$:

$$h = |\overrightarrow{OA}| \cdot \sin \varphi = |\vec{R}| \sin \varphi,$$

тоді

$$|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot |\vec{R}| \sin \varphi,$$

тобто

$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}.$$

Приклад 3. Знайти висоту паралелограма, проведену з вершини B до сторони AD , якщо вершини паралелограма знаходяться в точках: $A(2; -1; 1)$, $B(2; -6; 5)$, $C(-1; 3; 1)$, $D(-1; 8; -3)$.

Розв'язування: З формули $S_{ABCD} = h \cdot |\overrightarrow{AD}|$, знайдемо висоту паралелограма (рис. 26):

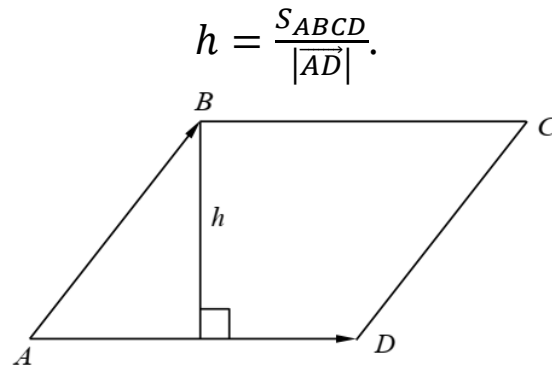


Рис. 26

Як відомо, $S_{ABCD} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$, тоді $h = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AD}|}$.

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} = (0; -5; 4); \quad \overrightarrow{AD} = (-3; 9; -4).$$

Тоді їх векторний добуток рівний:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -5 & 4 \\ -3 & 9 & -4 \end{vmatrix} = -16\vec{i} - 12\vec{j} - 15\vec{k}.$$

Отже,

$$h = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AD}|} = \frac{\sqrt{(-16)^2 + (-12)^2 + (-15)^2}}{\sqrt{(-3)^2 + 9^2 + (-4)^2}} = \frac{\sqrt{625}}{\sqrt{106}} = \frac{25}{\sqrt{106}}.$$

Мішаний добуток векторів, його властивості та застосування

Нехай дано три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Помножимо векторно вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і отримаємо вектор: $\vec{a} \times \vec{b}$.

Скалярний добуток вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$ називається *векторно-скалярним* або *мішаним добутком векторів* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і позначається: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ або $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Мішаний добуток як результат скалярного множення векторів $\vec{a} \times \vec{b}$ і $\vec{c}$ є скалярною величиною (числом).

Геометричний зміст мішаного добутку трьох векторів: *мішаний добуток некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ дорівнює об'ємові паралелепіпеда, побудованого на цих векторах (віднесених до спільного початку), взятому зі знаком «+», якщо ця трійка векторів права, і зі знаком «-», якщо вектори утворюють ліву трійку:*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \pm V,$$

де V – об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Дійсно, розглянемо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, які утворюють праву трійку векторів (рис. 27).

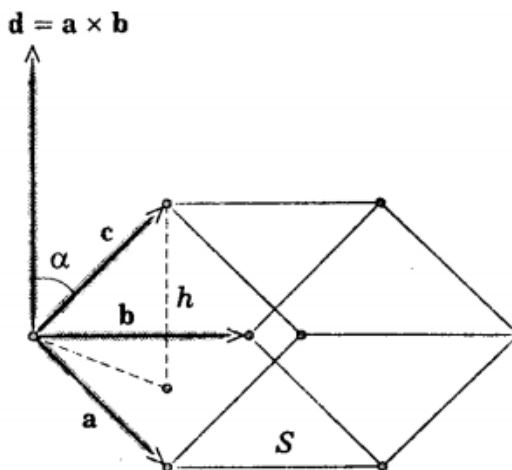


Рис. 27

Оскільки вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ є правою трійкою векторів, то, згідно з означенням векторного добутку, вектор $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ утворює з вектором $\vec{c}$ гострий кут.

Площа S основи паралелепіпеда дорівнює модулю векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$. Висота паралелепіпеда h дорівнює проекції вектора $\vec{c}$ на напрям вектора $\vec{d}$: $h = |\vec{c}| \cos \alpha$. Тому $V = S \cdot h = |\vec{d}| |\vec{c}| \cos \alpha$.

З іншого боку, мішаний добуток, згідно з його означенням, має те саме значення:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{c} = |\vec{d}| |\vec{c}| \cos \alpha.$$

Таким чином, для правої трійки векторів $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = V$.

Знак мішаного добутку збігається зі знаком $\cos \alpha$. Якщо α – тупий кут, тоді $\cos \alpha$ приймає від'ємне значення, тобто трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – ліва, тому $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -V$. Отже, $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \pm V$.

Користуючись мішаним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ можна обчислити об'єм трикутної піраміди (тетраедра), побудованої на тих же векторах. *Об'єм трикутної піраміди дорівнює одній шостій об'єму паралелепіпеда, побудованого на ребрах, що збігаються в одній вершині, тобто:*

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

Властивості мішаного добутку трьох векторів:

1. Мішаний добуток не змінюється після циклічної перестановки векторів-співмножників, тобто:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}.$$

Дійсно, після такої перестановки не змінюється ні об'єм побудованого на цих векторах паралелепіпеда, ні їхня взаємна орієнтація, через що їх мішаний добуток матиме ту саму величину й той самий знак.

2. Мішаний добуток не змінюється, якщо поміняти місцями знаки векторного та скалярного добутоків, тобто:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Дійсно, якщо розглянути скалярний добуток двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b} \times \vec{c}$, то згідно з властивістю комутативності, матимемо:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a},$$

тоді, користуючись першою властивістю мішаного добутку, одержимо дане співвідношення.

3. Після перестановки будь-яких двох векторів-співмножників мішаний добуток змінює знак на протилежний, тобто:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b},$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c},$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}.$$

Дійсно, така перестановка рівнозначна перестановці векторів-співмножників у векторному добутку, що змінює його знак. Користуючись першою та другою властивостями мішаного добутку, маємо:

$$\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = -\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c},$$

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = -\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = -(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c},$$

$$\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) = -\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

4. Мішаний добуток трьох векторів дорівнює нулю, якщо:
- а) хоча б один з перемножуваних векторів є нуль-вектором;
 - б) два з перемножуваних векторів колінеарні;
 - в) три перемножувані вектори компланарні.

Виконання всіх трьох пунктів цієї властивості впливає безпосередньо з умов перетворення на нуль скалярного й векторного добутків двох векторів та використання попередніх властивостей мішаного добутку. Через невизначеність напрямку нуль-вектора всі пункти цієї властивості мішаного добутку можна об'єднати та сформулювати так: мішаний добуток трьох векторів дорівнює нулю, якщо ці вектори компланарні.

5. Мішаний добуток трьох векторів задовольняє закон дистрибутивності, тобто:

$$(\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{d})) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{a} \times \vec{d}) \cdot \vec{c},$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{d}.$$

Ця властивість виконується й у тому випадку, коли будь-який зі співмножників складається з будь-якої кількості векторів.

6. Мішаний добуток трьох векторів задовольняє закон асоціативності, тобто:

$$(\vec{a} \times (\lambda \vec{b})) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\lambda \vec{c}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Дану властивість можна перефразувати наступним чином: сталий множник будь-якого з векторів-співмножників можна виносити за знак мішаного добутку.

Мішаний добуток векторів у координатній формі

Нехай вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ задані у просторі своїми координатами, тобто

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}, \quad \vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}.$$

Тоді

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = [(a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}] \cdot (c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}) = (a_y b_z - a_z b_y) c_x - (a_x b_z - a_z b_x) c_y + (a_x b_y - a_y b_x) c_z.$$

Отже,

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Таким чином, мішаний добуток трьох векторів, записаний у координатній формі, дорівнює значенню визначника, складеного з координат векторів зі збереженням порядку.

Деякі застосування мішаного добутку векторів:

1. *Визначення орієнтації векторів у просторі.* Для трьох заданих векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$: якщо $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} > 0$, то ці вектори утворюють праву трійку; якщо $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} < 0$, то ці вектори утворюють ліву трійку.

2. *Умова компланарності векторів.* Три ненульових вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$, тобто

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

3. *Знаходження об'ємів паралелепіпеда та трикутної піраміди:*

Нехай задано чотири точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, $M_4(x_4; y_4; z_4)$. Тоді

$$\vec{a} = \overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1),$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{M_1 M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1),$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{M_1 M_4} = (x_4 - x_1; y_4 - y_1; z_4 - z_1).$$

Якщо на цих векторах, як на ребрах, що збігаються в одній вершині, побудувати паралелепіпед, то його об'єм буде дорівнювати абсолютній величині мішаного добутку даних векторів, тобто:

$$V_{\text{паралелепіпеда}} = \text{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Об'єм піраміди відповідно буде дорівнювати:

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6} \text{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Приклад 4. Довести, що точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$ і $D(2; 1; 3)$ лежать в одній площині.

Розв'язування: Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} = (-1; -1; 6), \overrightarrow{AC} = (-2; 0; 2), \overrightarrow{AD} = (1; -1; 4).$$

Мішаний добуток

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -2 + 12 - 2 - 8 = 0.$$

Отже, вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$ – компланарні, а тому точки A , B , C і D лежать в одній площині.

Приклад 5. Дано вершини трикутної піраміди $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(-5; -4; 8)$. Знайти об'єм піраміди і довжину висоти h , опущеної з вершини D .

Розв'язування: Об'єм піраміди можна знайти за формулою $V = \frac{S_{\text{осн}} \cdot h}{3}$, звідки

$$h = \frac{3V}{S_{\text{осн}}}.$$

Складемо три вектори, які мають спільний початок: $\overrightarrow{AB} = (2; -2; -3)$, $\overrightarrow{AC} = (4; 0; 6)$, $\overrightarrow{AD} = (-7; -7; 7)$.

Тоді з властивостей векторного добутку маємо:

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = \\ &= -12 \vec{i} - 24 \vec{j} + 8 \vec{k}, \end{aligned}$$

то

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = 28.$$

Отже, $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14$.

Об'єм піраміди:

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (84 + 84 + 84 + 56) = \frac{154}{3} = 51\frac{1}{3}.$$

Таким чином,

$$h = \frac{3V}{S_{\text{осн}}} = \frac{3 \cdot \frac{154}{3}}{14} = 11.$$

Завдання для аудиторної і самостійної роботи

1. Знайти модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 10$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$.
2. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB} = 6\vec{a} - 3\vec{b}$ і $\overrightarrow{AC} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$.
3. Задано вектори $\vec{a} = (1; 0; -2)$, $\vec{b} = (0; 1; 1)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$ і $\vec{d} = (-1; 2; 0)$. Обчислити: 1) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{d} - \vec{c})$; 2) $(\vec{a} - \vec{b}) \times (3\vec{c} + 2\vec{d})$.
4. Дано вершини трикутника $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$. Обчислити довжину висоти, опущеної з вершини B на сторону AC .
5. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$.
6. Знайти вектор $\vec{x}$, який перпендикулярний до вектора $\vec{a} = (2; -3; -1)$ та до вектора $\vec{b} = (1; -2; 3)$ і задовольняє умову $\vec{x} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.
7. Обчислити висоту паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.
8. Перевірити, чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, якщо $\vec{a} = (3; 2; 2)$, $\vec{b} = (2; -1; 3)$, $\vec{c} = (8; 3; 7)$.
9. Довести, що чотири точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$ належать одній площині.
10. На векторах $\vec{a} = (3; 2; 0)$, $\vec{b} = (2; 3; 0)$, $\vec{c} = (1; 2; 3)$ побудований паралелепіпед. Обчислити його об'єм V , площу грані S , утворену векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, і висоту h , проведену на цю грань.

САМОСТІЙНІ РОБОТИ

Тема «Вектори і лінійні операції над ними. Лінійна залежність векторів. Розклад вектора за базисом. Системи координат. Координати вектора»

Варіант 1

1. Знайти координати, довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$, його орт, якщо відомо, що $A(2; -3; -5)$, $B(-1; 3; 2)$.
2. Відомо, що $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$.
3. При яких значеннях p і q вектори $\vec{a} = (p; 1; -2)$ та $\vec{b} = (2; q; -1)$ колінеарні?
4. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = (\sqrt{2}; -4; 6)$ на вісь, яка складає з координатними осями Ox і Oz кути $\alpha = 45^\circ$ і $\gamma = 60^\circ$ відповідно, а з віссю Oy – тупий кут β .
5. Довести, що вектори $\vec{p} = \vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{q} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{r} = -\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k}$ не компланарні і знайти розклад вектора $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ за векторами $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$.

Варіант 2

1. Задано вектори $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ і $\vec{b} = (-1; 4; 5)$. Знайти проекцію вектора $3\vec{a} - 2\vec{b}$ на вісь вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(1; -2; 3)$ і $B(4; 2; 3)$.
2. Відомо, що $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Знайти $|\vec{a} - \vec{b}|$.
3. Перевірити, що точки $A(2; 4; 1)$, $B(3; 7; 5)$, $C(4; 10; 9)$ лежать на одній прямій?
4. Вектор $\vec{a}$ утворює з координатними осями Ox , Oy відповідно кути $\alpha = \frac{\pi}{3}$ і $\beta = \frac{2\pi}{3}$. Знайти його координати, якщо $|\vec{a}| = 2$.
5. Довести, що вектори $\vec{a} = (5; 4; 3)$, $\vec{b} = (-3; -1; 2)$, $\vec{c} = (-3; 1; 3)$ утворюють базис тривимірного векторного простору та розкласти вектор $\vec{d} = (12; 9; 10)$ за цим базисом.

**Тема «Скалярний добуток векторів.
Векторний та мішаний добуток векторів»**

Варіант 1

1. Задано три послідовні вершини паралелограма $ABCD$: $A(2; -2; 1)$, $B(1; 0; 2)$ і $C(0; -1; 3)$. Знайти довжину висоти паралелограма, що опущена з вершини B на сторону AD .
2. Задано вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, які задовольняють умові $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = 0$. Обчислити $\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 1$.
3. При якому значенні β : а) вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні; б) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a} = (0; -4; 1)$, $\vec{b} = (-5; \beta; 1)$, $\vec{c} = (1; 2; 3)$?
4. Знайти координати вектора $\vec{c}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (4; -2; -3)$ та $\vec{b} = (0; 1; 3)$, утворює з віссю Oz тупий кут і $|\vec{c}| = 26$.
5. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, якщо $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$, $C(1; 2; 4)$, $D(-1; 1; 1)$.

Варіант 2

1. Обчислити $|\vec{a} \times \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$.
2. При якому значенні β точки $A(-3; 5; 2)$, $B(5; 3; -1)$, $C(-1; 3; -3)$, $D(\beta; -5; 1)$ лежать в одній площині?
3. Знайти вектор $\vec{r}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (3; 1; 2)$ та $\vec{b} = (1; 3; 2)$ і задовольняє умові $\vec{r} \cdot \vec{c} = 8$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.
4. При якому α площа паралелограма, що побудований на векторах $\vec{a} = (1; -2; -3)$ і $\vec{b} = (\alpha; 0; 4)$, буде дорівнювати $5\sqrt{5}$ кв. од.
5. Задано вектори $\vec{a} = (3; 1; 2)$, $\vec{b} = (-4; 3; -1)$, $\vec{c} = (2; 3; 4)$, $\vec{d} = (14; 14; 20)$. Визначити: а) орієнтацію трійки векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$; б) об'єм трикутної піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

- Знайти довжину вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(2;4;7)$, $B(-1;3;8)$.
 - 3,5
 - $\sqrt{11}$
 - 5
 - $\sqrt{7}$
- Які з векторів колінеарні?
 - $\vec{a}=(2;-2)$, $\vec{b}=(1;2)$
 - $\vec{a}=(3;-1)$, $\vec{b}=(3;1)$
 - $\vec{a}=(-1;-2)$, $\vec{b}=(2;4)$
 - $\vec{a}=(3;1)$, $\vec{b}=(6;-1)$
- Знайти вектор $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $\vec{a}=(4;-2;1)$, $\vec{b}=(2;-1;3)$.
 - $\vec{c}=(2;-1;-7)$
 - $\vec{c}=(-2;-2;7)$
 - $\vec{c}=(1;-2;3)$
 - $\vec{c}=(2;1;7)$
- Дано чотирикутник $ABCD$. Знайти $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
 - $\overrightarrow{AD}$
 - $\overrightarrow{CD}$
 - $\overrightarrow{AC}$
 - $\overrightarrow{BD}$
- Знайти скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо $\vec{a}=(2;5;-3)$, $\vec{b}=(-1;3;4)$.
 - 4
 - 1
 - 6
 - 12
- Які з векторів перпендикулярні?
 - $\vec{a}=(4;-2)$, $\vec{b}=(1;2)$
 - $\vec{a}=(-3;-1)$, $\vec{b}=(3;-1)$
 - $\vec{a}=(-2;3)$, $\vec{b}=(1;2)$
 - $\vec{a}=(3;1)$, $\vec{b}=(6;-1)$
- Дано $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -5$. Знайти $\cos \varphi$.
 - $\frac{1}{4}$

- 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 3) -1
- 4) $-\frac{5}{12}$

8. Дано вектори $\vec{a}=(-3;-1;2)$, $\vec{b}=(3;-1;4)$. Знайти $\cos \varphi$.

- 1) 0
- 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 3) -1
- 4) $\frac{1}{2}$

9. Дано $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=6$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$. Знайти $(\vec{a}+2\vec{b})(3\vec{a}-\vec{b})$.

- 1) $\frac{3}{2}$
- 2) 0
- 3) 4
- 4) -3

10. Знайти початок вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $\overrightarrow{AB}=(-3;2;7)$, $B(4;-1;5)$.

- 1) $A(-7;3;2)$
- 2) $A(7;-3;-2)$
- 3) $A(4;-1;5)$
- 4) $A(3;-2;-7)$

11. Дано вектори $\vec{a}=(2;-1;3)$, $\vec{b}=(-2;4;-1)$. Знайти векторний добуток $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$.

- 1) $\vec{c}=(6;5;-1)$
- 2) $\vec{c}=(-11;-4;6)$
- 3) $\vec{c}=(-2;-3;-5)$
- 4) $\vec{c}=(11;4;-6)$

12. При якому значенні λ вектори $\vec{a}=(-3;-1;2)$ і $\vec{b}=(3;-1;\lambda)$ перпендикулярні?

- 1) -2
- 2) 4
- 3) -4
- 4) 7

13. Дано вектори $\vec{a}=(2;5;-3)$, $\vec{b}=(2;4;-3)$. Знайти $|3\vec{a}-2\vec{b}|$.

- 1) 62

- 2) 8
- 3) -6
- 4) $\sqrt{62}$

14. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a}=(2;4;-3)$, $\vec{b}=(2;-2;1)$, $\vec{c}=(5;-1;-2)$.

- 1) 5
- 2) 26
- 3) 22
- 4) -12

15. Знайти вектор $\vec{c} = \frac{3}{2}\vec{a} - 2\vec{b}$, якщо $\vec{a}=(4;-2;6)$, $\vec{b}=(1;2;-3)$.

- 1) $\vec{c}=(4;-7;15)$
- 2) $\vec{c}=(-4;-7;-15)$
- 3) $\vec{c}=(-4;-7;15)$
- 4) $\vec{c}=(15;-7;4)$

16. Для вектора $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$, у якого $|\vec{a}|=13$, $a_y=12$, $a_z=4$, знайти a_x .

- 1) ± 3
- 2) 1
- 3) ± 5
- 4) -7

17. Дано вектор $\vec{a}=(4;5;-3)$. Знайти координати орта $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$.

- 1) $\vec{a}_0 = \left(-\frac{4}{5}; -1; \frac{3}{5}\right)$
- 2) $\vec{a}_0 = (4;5;-3)$
- 3) $\vec{a}_0 = \left(\frac{4}{5\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{3}{5\sqrt{2}}\right)$
- 4) $\vec{a}_0 = \left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}; -1\right)$

18. Дано вектори $\vec{a}=(4;1;-2)$, $\vec{b}=(-1;2;2)$. Знайти проекцію $np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$.

- 1) 3
- 2) -6
- 3) 6
- 4) -2

19. Знайти скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=7$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

- 1) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$
- 2) $-14\sqrt{2}$
- 3) $14\sqrt{2}$
- 4) 14

20. Знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(4; -2; 3)$, $B(1; 2; -2)$.

- 1) $\overrightarrow{AB} = (-5; 4; -3)$
- 2) $\overrightarrow{AB} = (1; 2; -3)$
- 3) $\overrightarrow{AB} = (-3; 4; -5)$
- 4) $\overrightarrow{AB} = (3; -4; 5)$

21. У якому випадку мішаний добуток трьох векторів $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ дорівнює нулю?

- 1) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ взаємно перпендикулярні
- 2) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лінійно незалежні
- 3) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – компланарні
- 4) вектор $\vec{a} + \vec{b}$ перпендикулярний до вектора $\vec{c}$.

22. Відомо, що $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ як на сторонах, дорівнює:

- 1) 4
- 2) $4\sqrt{2}$
- 3) $4\sqrt{3}$
- 4) 8

23. Знайти вектор $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$, якщо $A(1; -4; 0)$, $B(-1; 2; -3)$, $C(1; -2; 1)$.

- 1) $(1; 4; -8)$
- 2) $(2; -4; 4)$
- 3) $(-2; 2; 5)$
- 4) $(4; -10; 7)$

24. Довжина якого з векторів дорівнює $|\vec{a}| = 5$?

- 1) $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$
- 2) $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\sqrt{3}\vec{k}$
- 3) $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\sqrt{3}\vec{k}$
- 4) $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$

25. Нехай задано вектори $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ та $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$. Ці вектори будуть паралельні, якщо:

- 1) $a_1b_1 = a_2b_2 = a_3b_3$

$$2) \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

$$3) \frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2} \neq \frac{a_3}{b_3}$$

26. Визначити $2\vec{a} - 3\vec{b}$ для векторів $\vec{a} = (3; -4; 1)$ і $\vec{b} = (-1; 2; 6)$:

- 1) $(9; -14; -16)$
- 2) $(3; -2; -16)$
- 3) $(-3; -14; -16)$

27. Знайти довжину вектора $\vec{MN}$, якщо $M(-5; 9; 2)$, $N(5; 4; 12)$.

- 1) 15
- 2) 10
- 3) 25
- 4) -10

28. При якому цілому значенні параметра m вектори $\vec{a} = (4; -5; -6)$ та $\vec{b} = (-8; 2m; 12)$ колінеарні?

- 1) 5
- 2) -0,5
- 3) -2
- 4) 1

29. У якому випадку $\text{pr}_l \vec{a} = 0$?

- 1) вектор $\vec{a}$ паралельний до осі l
- 2) вектор $\vec{a}$ утворює з віссю l кут 30°
- 3) вектор $\vec{a}$ утворює з віссю l кут 45°
- 4) вектор $\vec{a}$ перпендикулярний до осі l

30. Які три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис у тривимірному просторі?

- 1) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють у просторі базис, якщо вони лінійно залежні
- 2) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють у просторі базис, якщо їх мішаний добуток $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$
- 3) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють у просторі базис, якщо $\vec{a} \parallel \vec{b} \parallel \vec{c}$
- 4) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють у просторі базис, якщо вони лінійно незалежні.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вища математика: Збірник задач: навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін.; за ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. К.: А.С.К., 2005. 480 с.
2. Гриньов Б.В., Кириченко І.К. Вища алгебра: підручник для вищих техн. закладів / За ред. О.М. Литвина. Х.: Гімназія, 2008. 164 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навч. посібник. К.: А.С.К., 2005. 648 с.
4. Конспект лекцій з аналітичної геометрії та лінійної алгебри для студентів технічних факультетів / Уклад.: З.П. Ординська, І.В. Орловський, М.К. Руновська. К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2014. 176 с.
5. Лубенська Т.В., Чупаха Л.Д. Збірник задач з лінійної, векторної та аналітичної геометрії: навч. посібник. К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. 212 с.
6. Математика в технічному університеті: підручник. Том 1 / І.В. Алексєєва, В.О. Гайдей, О.О. Диховичний, Л.Б. Федорова; за ред. О.І. Клесова. К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. 496 с.
7. Рудавський Ю.К., Костробій П.П., Луник Х.П., Уханська Д.В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. підручник. Л.: Видавництво «Бескид Біт», 2002. 262 с.
8. Сердюк І.В. Практикум з курсу «Алгебра і геометрія». Векторна алгебра: навч. посібник / І.В. Сердюк, О.Б. Ахієзер, О.І. Дунаєвська, А.О. Нікульченко, А.Ю. Стрельнікова. Х.: «НТМТ», 2022. 88 с.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять з дисципліни
«АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»
для студентів спеціальності 121 Інженерія програмного забезпечення

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Формат 60x84/16. Гарнітура Times New Roman
Ум.друк.арк. 3,13. Зам. № 23.

Редакційно-видавничий відділ ДВНЗ «УжНУ»
88000, м. Ужгород, вул. Заньковецької, 89
E-mail: dep-editors@uzhnu.edu.ua