

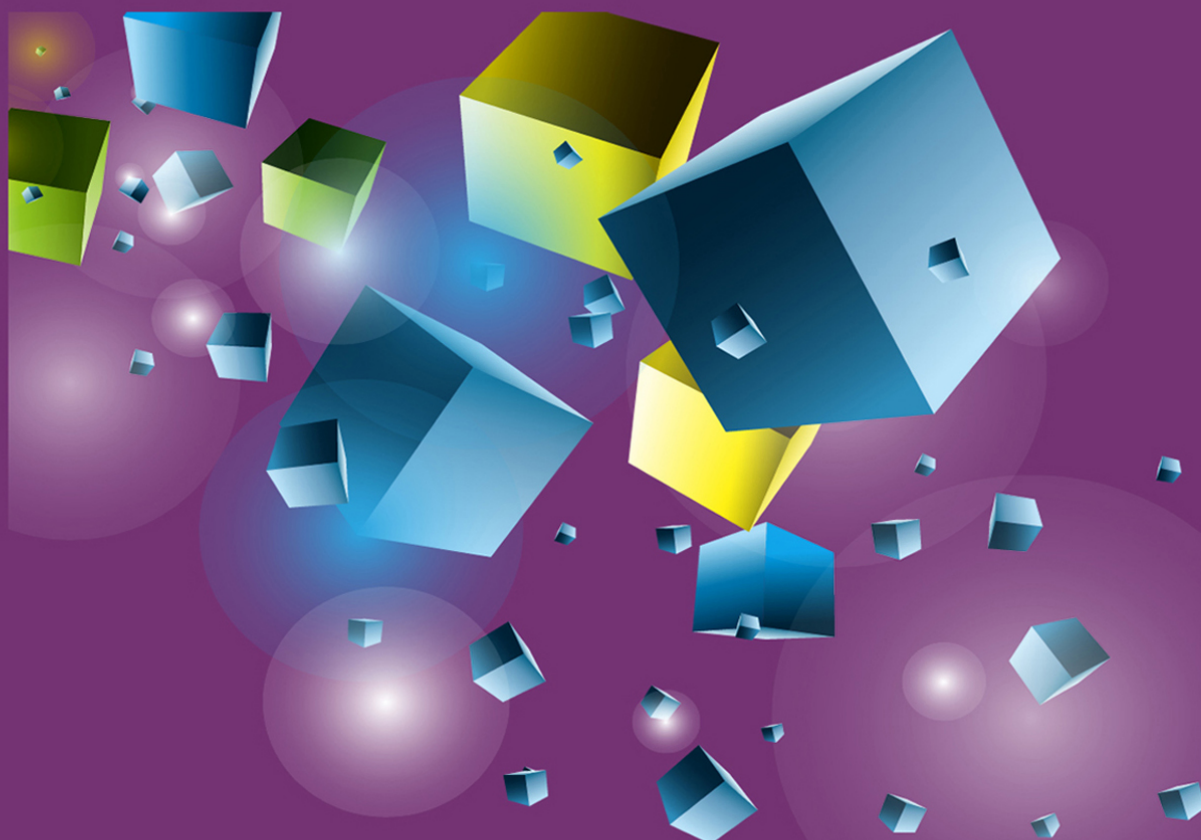
**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
Кафедра інформатики та фізико-математичних дисциплін**

В.С. Морохович

ВИЩА МАТЕМАТИКА. АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

ЧАСТИНА I

Навчальний посібник



**Ужгород
2025**

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
Кафедра інформатики та фізико-математичних дисциплін**

В.С. Морохович

**ВИЩА МАТЕМАТИКА.
АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ**

ЧАСТИНА І

Навчальний посібник

**Ужгород
2025**

УДК 51:512:514.12(075.8)

В 55

Вища математика. Алгебра та аналітична геометрія.
Частина I: навч. посіб. / Укладач В.С. Морохович. Ужгород:
Вид-во УжНУ «Говерла», 2025. 204 с.

ISBN 978-617-8321-59-8

Матеріал навчального посібника систематизований відповідно до навчальної програми дисциплін «Вища математика» і «Алгебра та аналітична геометрія» для технічних спеціальностей закладів вищої освіти. Кожен розділ посібника містить теми, які є базовими для опанування курсу. По кожній темі наведено теоретичні відомості, приклади розв'язування задач, завдання для самостійної роботи студентів. Крім того, у навчальному посібнику подано завдання до модульного контролю і тестові запитання для самоконтролю.

Рецензенти:

Тилищак Олександр Андрійович, доктор фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II;

Млавець Юрій Юрійович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри кібернетики і прикладної математики факультету математики та цифрових технологій ДВНЗ «Ужгородський національний університет».

Рекомендовано до друку та опублікування:
Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
(протокол № 2 від 25 лютого 2025 року);
Редакційно-видавничою радою
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
(протокол № 2 від 21 лютого 2025 року).

ISBN 978-617-8321-59-8

© ДВНЗ «УжНУ», 2025

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	4
РОЗДІЛ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА.....	5
1.1. Матриці та дії над ними.....	5
1.2. Визначники та їх властивості. Способи обчислення визначників	13
1.3. Обернена матриця. Матричні рівняння. Ранг матриці.....	23
1.4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	30
1.5. Метод Гаусса розв'язання довільних систем лінійних рівнянь. Однорідні системи	37
РОЗДІЛ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА.....	46
2.1. Вектори і лінійні операції над ними	46
2.2. Лінійна залежність векторів. Розклад вектора за базисом	56
2.3. Системи координат. Координати вектора. Лінійні операції з векторами в координатній формі.....	64
2.4. Скалярний добуток векторів	73
2.5. Векторний та мішаний добуток векторів	80
РОЗДІЛ 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ ТА В ПРОСТОРІ.....	97
3.1. Пряма на площині	97
3.2. Лінії другого порядку.....	113
3.3. Площина у просторі	129
3.4. Пряма у просторі	142
3.5. Поверхні другого порядку	153
ЗАВДАННЯ ДО МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ	172
ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ	180
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	203

ПЕРЕДМОВА

Сфера діяльності людини постійно розвивається, що призводить до збільшення обсягу спеціалізованої термінології, необхідної для ефективної роботи фахівців у будь-якій галузі. Цей процес супроводжується все більшим проникненням математичних методів у різноманітні сфери наукових досліджень. Від технічних наук, де математика вже давно стала невід'ємним інструментом, до економіки, де математичні моделі використовуються для аналізу складних економічних процесів, – практично в усіх сферах спостерігається тенденція до математизації знань.

Навчальні дисципліни «Вища математика» і «Алгебра та аналітична геометрія» представляють собою ту частину математичних знань, яка тісно пов'язана з дослідженням, моделюванням, проєктуванням, розробкою та побудовою складних систем різного призначення. Зокрема, ці дисципліни є основою для створення та вдосконалення систем захисту інформації, а також систем, призначених для обробки та представлення даних за допомогою комп'ютерних технологій. Лінійна алгебра та аналітична геометрія, як невід'ємні складові цих дисциплін, відіграють визначальну роль у формуванні професійних компетентностей фахівців, які працюють в галузі інформаційних технологій. Розробка та ефективна експлуатація сучасних програмних продуктів, систем управління базами даних, інструментів комп'ютерної графіки, засобів захисту інформації, а також створення математичних моделей реальних об'єктів і процесів вимагають від фахівців глибокого розуміння різних розділів дисципліни.

Алгебра та аналітична геометрія є першим і найважливішим кроком у формуванні математичної освіти студентів, які навчаються за технічними спеціальностями. Глибоке розуміння дисципліни є необхідною умовою для успішного вивчення таких математичних дисциплін, як математичний аналіз, теорія ймовірностей та математична статистика, а також дискретна математика. Мета пропонованого посібника полягає в тому, щоб ознайомити студентів з основними поняттями та методами теорії матриць, систем лінійних алгебраїчних рівнянь та векторної алгебри. Розділ, присвячений аналітичній геометрії, дозволяє студентам встановити зв'язок між геометричними об'єктами, такими як лінії, фігури і поверхні, та їх алгебраїчними описами за допомогою рівнянь з відповідною кількістю змінних.

РОЗДІЛ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1.1. Матриці та дії над ними

1. Поняття матриці. Види матриць

Матрицею називається прямокутна таблиця чисел a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$), яка має m рядків і n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матриці позначають великими латинськими літерами: $A, B, C, \dots$, та скорочено записують наступним чином: $A_{m \times n} = (a_{ij})$, де a_{ij} – елементи матриці.

Матриця називається *нульовою*, якщо всі її елементи дорівнюють нулю, і позначається $O_{m \times n}$.

Матриця називається *квадратною*, якщо кількість стовпців цієї матриці дорівнює кількості її рядків, тобто $m = n$. Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її *порядком*. Елементи a_{ii} , $i = 1, 2, \dots, n$ утворюють *головну діагональ* квадратної матриці, а числа $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ – *побічну діагональ*.

Квадратна матриця називається *діагональною*, якщо всі її елементи окрім елементів головної діагоналі дорівнюють нулю.

Діагональна матриця називається *одиничною*, якщо всі елементи головної діагоналі цієї матриці дорівнюють одиниці. Одиничні матриці позначають літерами E_n або I_n .

Квадратна матриця називається *верхньою трикутною* (*нижньою трикутною*), якщо всі її елементи нижче (вище) головної діагоналі, рівні нулю.

Матриця, яка містить один рядок (стовпець), називається *матрицею-рядком* або *вектор-рядком* (*матрицею-стовпцем* або *вектор-стовпцем*).

Матриця $A_{1 \times n} = (a_{11} a_{12} \dots a_{1n})$ є матрицею-рядком, що містить n елементів, а матриця $B_{m \times 1} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$ є матрицею-стовпцем, що містить m елементів.

Матриця $A_{m \times n}$ називається *східчастою*, якщо крайній елемент кожного рядка знаходиться справа від крайнього елемента попереднього рядка. Наприклад, східчаста матриця розміру 3×4 :

$$A_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Дві матриці $A_{m \times n} = (a_{ij})$ та $B_{m \times n} = (b_{ij})$ називаються рівними між собою, якщо вони однакового розмірів і мають рівні відповідні елементи, тобто $A = B$, якщо $a_{ij} = b_{ij}$.

2. Лінійні дії з матрицями

Розглянемо основні дії над матрицями.

Множення матриці на число (вводиться для будь-яких матриць).

Добутком матриці $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на число $\lambda \in R$, називається матриця $C_{m \times n} = (c_{ij})$, кожен елемент якої дорівнює добутку кожного елемента матриці A на число λ , тобто

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n.$$

Приклад. Для матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$ та числа $\lambda = -2$:

$$\lambda A = -2A = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -14 & 2 \\ 4 & -18 \end{pmatrix}.$$

Матриця $-A = (-1) \cdot A$ називається *протилежною* до матриці A .

Додавання і віднімання матриць (вводиться тільки для матриць однакового розміру).

Сумою (різницею) матриць $A_{m \times n} = (a_{ij})$ та $B_{m \times n} = (b_{ij})$ називається матриця $C_{m \times n} = (c_{ij})$, кожен елемент якої дорівнює сумі (різниці) відповідних елементів матриць A та B , тобто

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, (c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}),$$

де a_{ij} і b_{ij} – відповідно елементи матриць A та B .

Позначається: $C = A + B$, ($C = A - B$).

Приклад. Нехай задано матриці:

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -7 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сформулюємо основні властивості операцій додавання матриць та множення матриці на число:

Для довільних узгоджених матриць A, B, C та чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ виконується:

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A + O = O + A = A$
4. $A + (-A) = (-A) + A = O$
5. $1 \cdot A = A$
6. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
7. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
8. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

3. Множення матриць

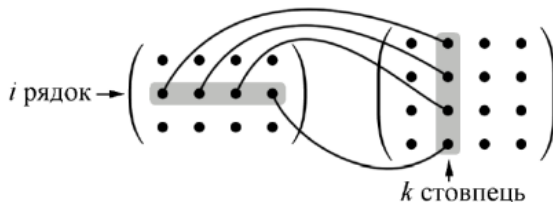
Множення матриць (вводиться тільки для узгоджених матриць).

Матриця A називається *узгодженою* з матрицею B , якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B .

Добутком матриць $A_{m \times n} = (a_{ij})$ та $B_{n \times p} = (b_{jk})$ називається матриця $C_{m \times p} = (c_{ik})$, кожен елемент якої дорівнює сумі добутків елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи k -го стовпця матриці B , тобто

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ k = 1, 2, \dots, p.$$

Схематично це можна проілюструвати наступним чином:



З існування добутку AB не слідує існування добутку BA . У загальному випадку $AB \neq BA$. Якщо $AB = BA$, то матриці A і B називаються *переставними* (або *комутуючими*).

Основні властивості операції добутку матриць:

Для довільних узгоджених матриць A, B, C та числа $\alpha \in \mathbb{R}$ виконується:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
2. $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + A \cdot C$
3. $A \cdot O = O \cdot A = O$
4. $A \cdot E = E \cdot A = A$
5. $\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B)$

Приклад. Знайти AB і BA , якщо:

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування:

$$AB = C_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \text{ де}$$

$$c_{11} = 5 \cdot 6 + 1 \cdot 8 + 4 \cdot (-2) = 30;$$

$$c_{12} = 5 \cdot 7 + 1 \cdot 9 + 4 \cdot (-1) = 40;$$

$$c_{21} = 0 \cdot 6 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot (-2) = 10;$$

$$c_{22} = 0 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot (-1) = 15.$$

$$\text{У результаті, } AB = \begin{pmatrix} 30 & 40 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}.$$

Далі знаходимо $BA = C_{3 \times 3}$:

$$BA = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 45 \\ 40 & 26 & 59 \\ -10 & -4 & -11 \end{pmatrix}.$$

Отже, $AB \neq BA$.

Піднесення до степеня (вводиться тільки для квадратних матриць).

Квадратна матриця A^2 – це результат множення матриці A самої на себе, тобто $A \cdot A$. Аналогічно вводиться поняття k -го степеня матриці A .

Натуральним степенем k квадратної матриці A називається квадратна матриця A^k , яка задається співвідношенням:

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ разів}}.$$

Для $k = 0$ вважають $A_n^0 = E_n$.

Нехай маємо многочлен $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ та квадратну матрицю A . Многочленом p від матриці A називається матриця $p(A)$, яка задається співвідношенням:

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 E,$$

де E – одинична матриця того ж самого порядку, що і матриця A .

Приклад. Знайти значення многочлена $f(A)$ для матриці A , якщо:

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 2; \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування:

Спочатку знайдемо A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -4 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} f(A) &= 3A^2 + 4A - 2E = 3 \begin{pmatrix} 17 & -4 \\ -8 & 9 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 37 & -4 \\ -8 & 29 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Транспонування матриць

Транспонування (вводиться для будь-яких матриць).

Транспонування матриці – перехід від матриці $A = A_{m \times n}$ до матриці $A^T = (A^T)_{n \times m}$, при якому рядки та стовпці матриці міняються місцями зі збереженням порядку, тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

При цьому, матриця A^T називається *транспонованою* до матриці A .

Приклад. До матриці $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ транспонованою буде матриця $B^T = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Властивості операції транспонування:

Для довільних матриць A, B та числа $\alpha \in R$ виконується:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A_{m \times n} + B_{m \times n})^T = A^T + B^T$
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
4. $(A_{m \times n} \cdot B_{n \times p})^T = B^T \cdot A^T$

Квадратна матриця A називається *симетричною*, якщо $A^T = A$.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити лінійні комбінації матриць A, B, C :

а) $2A + 5B$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$;

$$\text{б) } 2A - 3B, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 8 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } -2A - 5B + C, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } 4A + 3B - 2C, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Обчислити добуток матриць:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{д) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{е) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Обчислити вирази, де A, B, C – задані матриці:

а) $3A + B \cdot C$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix};$$

б) $(2A - B) \cdot C^T$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix};$$

в) $5A \cdot (B + C)^T$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -11 & 9 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 10 & -7 \\ -9 & 2 \end{pmatrix};$$

г) $A \cdot B \cdot C$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Чи будуть матриці A і B комутуючими, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Обчислити A^2 , A^3 , якщо:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

6. Обчислити добутки AA^T і $A^T A$. Якщо різниця $AA^T - A^T A$ визначена, знайдіть її.

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Знайти значення многочлена $f(A)$ від матриці A , якщо:

$$\text{а) } f(x) = x^2 - 5x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } f(x) = x^2 - 2x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } f(x) = x^2 - x - 3, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$г) f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 4, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Питання для самоперевірки

1. Що називається матрицею? Як позначають елементи матриці? Якими символами прийнято позначати матрицю?
2. Які є види матриць?
3. Дайте визначення порядку матриці. Яка матриця називається квадратною? Що називається порядком квадратної матриці?
4. Які операції над матрицями називають лінійними?
5. Яку матрицю називають сумою (різницею) двох матриць?
6. Яку матрицю називають добутком матриці на число?
7. Перечисліть властивості лінійних операцій?
8. Як знайти добуток двох матриць? За яких умов існує добуток двох матриць?
9. Яка матриця називається невиродженою?
10. Як за даною матрицею знайти транспоновану матрицю?

1.2. Визначники та їх властивості. Способи обчислення визначників

1. Означення визначників другого і третього порядків та їх обчислення

Будь-якій квадратній матриці можна поставити у відповідність число, що називається її *визначником* або *детермінантом* та позначається $\det A$, ΔA або Δ .

Визначником (детермінантом) 2-го порядку матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ називається число, яке визначається виразом:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Схема обчислень визначника другого порядку полягає у відшукуванні різниці добутку елементів головної діагоналі та добутку елементів побічної діагоналі.

Визначником (детермінантом) 3-го порядку матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ називається число, яке визначається виразом:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} +$$

$$+ a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}.$$

Обчислення виконуються за *правилом трикутників*: зі знаком “+” беруться добутки елементів головної діагоналі, а також елементів, розміщених на прямих, паралельних головній діагоналі, та елемента, розміщеного у відповідному протилежному куті визначника. Зі знаком “-” беруться добутки елементів, побудовані за таким самим правилом відносно побічної діагоналі визначника.

Схематично це можна проілюструвати наступним чином:

$$\begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

Для обчислення визначників третього порядку використовують також *правило Саррюса*, яке полягає у дописуванні справа від визначника 1-го та 2-го стовпців зі збереженням порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Для знаходження визначника треба утворити зі знаком “+” алгебраїчну суму добутків елементів, розміщених на головній діагоналі визначника, і на діагоналях, паралельних їй, а зі знаком “-” беруться добутки елементів, розміщених на побічній діагоналі, та на діагоналях, паралельних їй.

Приклад. Знайти визначники матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & 5 \\ 7 & 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 5 \cdot (-4) = 6 + 20 = 26;$$

$$\det B = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & 5 \\ 7 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 5 \cdot 7 + 6 \cdot 2 \cdot 4 -$$

$$- 4 \cdot 1 \cdot 7 - 5 \cdot 2 \cdot (-2) - 6 \cdot 0 \cdot (-3) = 6 + 48 - 28 + 20 = 46;$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 -$$

$$- 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 9 = 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 0.$$

Визначником n -го порядку матриці

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ називається число}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)} (-1)^J a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n},$$

де сума береться по всіх можливих перестановках з елементів множини $(1, 2, 3, \dots, n)$, а J – кількість інверсій у відповідній перестановці.

2. Властивості визначників

Основні властивості визначників:

1. Значення визначника не змінюється при транспонуванні (заміні всіх його рядків на відповідні стовпці, і навпаки), тобто $\det A = \det(A^T)$.

2. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.

3. При перестановці двох рядків (стовпців) місцями визначник змінює знак на протилежний.

4. Визначник з двома однаковими рядками (стовпцями) рівний нулю.

5. Спільний множник деякого рядка (стовпця) визначника можна винести за знак визначника. Звідси випливає, що якщо елементи якого-небудь рядка (стовпця) домножити на число λ , то визначник Δ множиться на це ж число λ .

6. Визначник, який містить два пропорційних рядки (стовпця), дорівнює нулю.

7. Якщо елементи деякого рядка (стовпця) визначника є сумою двох доданків, то визначник можна розкласти на суму двох визначників.

8. Визначник не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число. Наприклад, для стовпців визначника ця властивість виражається рівністю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i}a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i}a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni}a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} + \lambda a_{1j}a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} + \lambda a_{2j}a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} + \lambda a_{nj}a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3. Розклад визначників n -го порядку за елементами його довільного рядка або стовпця

Обчислення визначників будь-якого порядку

Якщо обчислення визначників 2-го та 3-го порядків не є складною справою, то знаходження значення визначників вище 3-го порядку вже викликає труднощі. Розглянемо спосіб обчислення визначників будь-якого порядку.

Нехай задано визначник n -го порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n -го порядку називається визначник $(n-1)$ -го порядку, що отримується з даного визначника шляхом викреслювання i -го рядка та j -го стовпця, на перетині яких знаходиться даний елемент a_{ij} .

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника n -го порядку називається його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Приклад. Знайти мінор та алгебраїчне доповнення до елемента

$$a_{21} \text{ визначника } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування:

Елемент визначника $a_{21} = 1$ (знаходиться у другому рядку і в першому стовпці). Отже,

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -1.$$

Розклад визначника за елементами рядка або стовпця (Теорема Лапласа)

Теорема 1. Визначник n -го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на відповідні їм алгебраїчні доповнення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in},$$

$$i = 1, 2, \dots, n;$$

або

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \mathbf{a_{1j}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \mathbf{a_{2j}} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \mathbf{a_{nj}} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n \mathbf{a_{kj}} A_{kj} =$$

$$= \mathbf{a_{1j}} A_{1j} + \mathbf{a_{2j}} A_{2j} + \dots + \mathbf{a_{nj}} A_{nj}, j = 1, 2, \dots, n.$$

Теорема 2. Сума добутків елементів рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = 0, i \neq j.$$

Теорема Лапласа дає змогу обчислити визначник довільного порядку, тобто за її означенням визначник n -го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

Приклад. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 9 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \end{vmatrix}$.

Розв'язування:

Розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 9 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} =$$

$$= (-1) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 8 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 9 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 9 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 8 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 9 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 121 + 62 + 36 = 219.$$

Використовуючи восьму властивість визначників та теорему Лапласа, можна обчислити визначник шляхом зведення його до визначника, що містить довільний рядок (стовпець) тільки з одним відмінним від нуля елементом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ij} \cdot A_{ij}.$$

Обчислення визначника шляхом зведення його до трикутного вигляду:

Визначник, у якого всі елементи, що розташовані вище або нижче головної діагоналі, рівні нулю, називається визначником трикутного вигляду.

Визначник трикутної матриці дорівнює добутку діагональних елементів, тобто

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Будь-який визначник можна звести до трикутного вигляду.

Приклад. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$

Розв'язування:

Зведемо даний визначник до трикутного вигляду. Поміняємо місцями перший і четвертий стовпці, а потім – другий і третій, після чого отримаємо визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 5 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Далі виконаємо наступні операції. До першого стовпця додаємо четвертий стовпець, помножений на (-4) ; до другого стовпця додаємо цей же четвертий стовпець, помножений на (-3) ; до третього стовпця додаємо четвертий стовпець, помножений на (-2) . У результаті отримаємо визначник трикутного вигляду, який рівний добутку його діагональних елементів:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 = 20$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$; є) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} m+a & m-a & a \\ n+a & 2n-a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 0 & \cos \alpha & \operatorname{tg} \alpha \\ \cos \alpha & 0 & \cos \alpha \\ \operatorname{tg} \alpha & \cos \alpha & 0 \end{vmatrix}$.

2. Обчислити визначники за допомогою розкладу по довільному рядку або стовпцю:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$;

$$д) \begin{vmatrix} 5 & 7 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix};$$

$$е) \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Обчислити визначники, використовуючи їх властивості:

$$а) \begin{vmatrix} (a+1)^2 & a^2+1 & a \\ (b+1)^2 & b^2+1 & b \\ (c+1)^2 & c^2+1 & c \end{vmatrix}; \quad б) \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos 2\alpha & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & \cos 2\beta & \cos^2 \beta \\ \sin^2 \gamma & \cos 2\gamma & \cos^2 \gamma \end{vmatrix};$$

$$в) \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & 1 & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & 1 & \cos^2 \beta \\ \sin^2 \gamma & 1 & \cos^2 \gamma \end{vmatrix}.$$

4. У визначниках знайти мінори та алгебраїчні доповнення:

$$а) \text{ всіх елементів другого рядка } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix};$$

$$б) \text{ всіх елементів другого стовпця } \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{vmatrix};$$

$$в) \text{ всіх елементів третього стовпця } \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

5. Нехай $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Знайти визначник матриці $A^2 B^3$.

6. Розв'язати рівняння:

$$а) \begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$б) \begin{vmatrix} x+2 & -3 \\ x-2 & x \end{vmatrix} = 0;$$

$$в) \begin{vmatrix} x-4 & x-8 \\ \sqrt{x}+2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$г) \begin{vmatrix} 2x-1 & x+1 \\ x+2 & x-1 \end{vmatrix} = -6;$$

$$\text{д)} \begin{vmatrix} \sin x & 1 \\ 1 & 2 \cos x \end{vmatrix} = 0; \quad \text{е)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{є)} \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{ж)} \begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Розв'язати нерівності:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14;$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ 3 & \frac{1}{x+2} \end{vmatrix} \geq 1; \quad \text{г)} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1;$$

$$\text{д)} \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0; \quad \text{е)} \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3x^2 & 5 & x \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} > 0.$$

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення визначника (детермінанта) 2-го порядку.
2. Що називається визначником 3-го порядку?
3. Що називається визначником n -го порядку?
4. Як обчислюють визначники матриці 2-го та 3-го порядку?
5. Перечисліть властивості визначників.
6. Доведіть властивість визначника: якщо всі елементи якого-небудь стовпця (рядка) помножити на одне і те саме число k , то значення визначника помножиться на число k .
7. Переконайтесь у справедливості твердження: якщо всі елементи якого-небудь стовпця (рядка) визначника являють собою суму двох доданків, то такий визначник можна записати у вигляді суми двох визначників.
8. Що називається мінором і алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника n -го порядку?
9. Запишіть розклад визначника n -го порядку за елементами будь-якого рядка (стовпця).

1.3. Обернена матриця. Матричні рівняння. Ранг матриці

1. Обернена матриця та її властивості. Знаходження оберненої матриці

Матриця A^{-1} називається *оберненою* до квадратної матриці A , якщо $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, де E – одинична матриця.

Обернена матриця A^{-1} має той самий порядок, що і матриця A .

Квадратна матриця A називається *невиродженою*, якщо $\det A \neq 0$. Якщо $\det A = 0$, то матриця A називається *виродженою*.

Теорема 1. Якщо квадратна матриця A порядку n є невивродженою, то існує єдина обернена до неї матриця A^{-1} , яку можна знайти за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A_{ij})^T = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення відповідних елементів матриці A ; $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Іншими словами, обернена матриця A^{-1} – це транспонована матриця алгебраїчних доповнень елементів матриці A , поділених на визначник матриці A .

Для невивродженої квадратної матриці другого порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ обернену матрицю можна знайти за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix},$$

тобто елементи головної діагоналі треба поміняти місцями, а у елементів бічної діагоналі змінити знаки на протилежні.

Властивості оберненої матриці:

1. $E^{-1} = E$
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
4. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
5. $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

Приклад. Знайти обернену матрицю до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування: Обчислимо визначник заданої матриці, використовуючи будь-який з відомих методів, наприклад, правило трикутника:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 5 - 9 - 6 = -1 \neq 0,$$

тобто A^{-1} існує.

Обчислимо алгебраїчні доповнення до елементів матриці A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

Записуємо матрицю з алгебраїчних доповнень $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$,

транспонуємо її $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, поділивши кожен елемент на

$\det A = -1$, одержимо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Виконуючи перевірку, переконаємося, що обернену матрицю знайдено правильно:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Матричні рівняння

Матричним рівнянням називається рівняння виду:

$$A \cdot X \cdot B = C,$$

де A, B, C – відомі матриці, а X – шукана матриця.

Якщо одна з матриць A або B є одиничною, тоді матричне рівняння матиме вигляд:

$$A \cdot X = C, \text{ або } X \cdot B = C.$$

Шукатимемо розв’язок матричних рівнянь у випадку, коли матриці A і B є квадратними та невиродженими ($\det A \neq 0, \det B \neq 0$). Тоді розв’язки цих рівнянь можна обчислити за формулами:

$$A \cdot X \cdot B = C, \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1};$$

$$A \cdot X = C, \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot C;$$

$$X \cdot B = C, \quad \Rightarrow \quad X = C \cdot B^{-1}.$$

Приклад. Розв’язати матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв’язування:

Матричне рівняння має вид: $A \cdot X = C$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,
 $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$

Його розв’язок шукатимемо за формулою: $X = A^{-1} \cdot C$.

Обчислимо матрицю, обернену до матриці A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$X = A^{-1} \cdot C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 12 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Ранг матриці та методи його обчислення

Розглянемо матрицю

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Виділимо в ній k рядків та k стовпців, $k \leq \min\{m, n\}$.

Мінором порядку k матриці $A_{m \times n}$ називається будь-який визначник k -го порядку, що складається з елементів матриці, які стоять на перетині виділених k рядків та k стовпців.

Матриця $m \times n$ має всього мінорів k -го порядку: $C_m^k \cdot C_n^k = \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Наприклад, у матриці розміру $A_{3 \times 4}$ є 12 мінорів 1-го порядку, 18 мінорів 2-го порядку та 4 мінори 3-го порядку.

Рангом матриці $A_{m \times n}$ називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля, і позначається: r , $r(A)$ або $\text{rang}(A)$.

Мінор, порядок якого визначає ранг матриці, називається *базисним*. У матриці може бути декілька базисних мінорів.

Властивості ранга матриці:

1. $0 \leq r(A) \leq \min(m, n)$, де $\min(m, n)$ – найменше з чисел m та n ;

2. $r(A) = 0$ тоді і тільки тоді, коли всі елементи матриці A дорівнюють нулю;

3. для квадратної матриці порядку n , $r(A) = n$ тоді і тільки тоді, коли матриця A є невідродженою;

4. при транспонуванні матриці її ранг не змінюється;
5. якщо викреслити з матриці нульовий рядок (стовпець), то її ранг не зміниться;
6. ранг матриці не змінюється при елементарних перетвореннях матриці;
7. ранг східчастої матриці дорівнює кількості ненульових рядків.

Існує два методи обчислення рангу матриці.

1. *Метод обвідних мінорів* полягає у обчисленні мінорів матриці, які вибираються певним чином.

Обвідним мінором до мінора порядку k матриці $A_{m \times n}$ називається мінор $(k + 1)$ -го порядку цієї матриці, який цілком містить даний мінор порядку k .

Якщо хоча б один із мінорів 1-го порядку матриці відмінний від нуля ($M_1 \neq 0$), а всі її обвідні мінори 2-го порядку дорівнюють нулю, тоді $r(A) = 1$.

Якщо хоча б один із мінорів 2-го порядку $M_2 \neq 0$, а всі її обвідні мінори 3-го порядку дорівнюють нулю, тоді $r(A) = 2$, і т.д.

Якщо хоча б один із мінорів k -го порядку матриці відмінний від нуля, а всі її мінори $(k + 1)$ -го порядку, які містять даний мінор k -го порядку, дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює k .

Приклад. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Розв'язування: У матриці є мінор 2-го порядку, відмінний від нуля: $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$. До цього мінора у матриці є два обвідних мінори 3-го порядку:

$$M'_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0; \quad M''_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -5 & -3 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Оскільки обидва мінори 3-го порядку дорівнюють нулю, то $r(A) = 2$.

2. *Метод елементарних перетворень*, який полягає у зведенні матриці до східчастого вигляду шляхом елементарних перетворень. Тоді ранг матриці дорівнює кількості ненульових крайніх елементів (або ненульових рядків) матриці, що отримується.

Елементарними перетвореннями матриці $A_{m \times n}$ є:

- 1) перестановка місцями двох рядків (стовпців) матриці;
- 2) множення всіх елементів деякого рядка (стовпця) на число відмінне від нуля;
- 3) додавання до елементів деякого рядка (стовпця) елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне і те саме число.

Матриці $A_{m \times n}$ та $B_{m \times n}$ називаються *еквівалентними*, якщо одна з них може бути отримана з іншої за допомогою елементарних перетворень. Еквівалентність матриць позначають $A \sim B$.

Приклад. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язування: Виконуючи елементарні перетворення над рядками матриці A , знайдемо еквівалентну їй східчасту матрицю:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim [II - 2 \cdot I \rightarrow II] \sim \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -12 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim [III - I \rightarrow III] \sim \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -12 & 6 \\ 0 & 2 & -8 & 4 \end{pmatrix} \sim [3 \cdot III - 2 \cdot II \rightarrow III] \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Кількість ненульових рядків східчастої матриці – два, отже $r(A) = 2$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти обернену матрицю і зробити перевірку:

а) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 10 & 20 & -30 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Знайти обернену матрицю до заданої матриці:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \\ 2 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'язати матричні рівняння:

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; \\ \text{в) } \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \\ \text{д) } X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \\ \text{е) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Обчислити ранг матриці методом елементарних перетворень:

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{pmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 3 & 1 & 5 \\ 9 & 3 & 15 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 4 & 6 & 16 \end{pmatrix}; \\ \text{в) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5. Обчислити ранг матриці методом обвідних мінорів:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Знайти ранг матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. При яких значеннях λ ранг матриці $\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ дорівнює 1?

Питання для самоперевірки

1. Які перетворення матриці називають елементарними?
2. Дайте визначення оберненої матриці. За яких умов існує матриця, обернена даній?
3. У чому полягає алгоритм побудови оберненої матриці?
4. Перечисліть властивості оберненої матриці.
5. Що таке матричні рівняння?
6. Що називається рангом матриці?
7. Які властивості рангу матриці? Властивості рангу матриці.
8. Назвіть методи обчислення рангу матриці.

1.4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

1. Основні означення

Системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), що містить m рівнянь та n невідомих, називається система вигляду:

[illegible]

де числа a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) називаються коефіцієнтами системи, числа b_j ($j = 1, 2, \dots, n$) – вільними членами.

Розв'язком *СЛАР* називається n значень невідомих $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$, при підстановці яких всі рівняння системи перетворюються на тотожності.

СЛАР, у якої кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих ($m = n$), називається *квадратною*.

СЛАР називається *однорідною*, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, тобто $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$. У протилежному випадку система називається *неоднорідною*.

Система називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо вона має більше одного розв'язку. В останньому випадку кожен її розв'язок називається *частинним розв'язком*. Сукупність частинних розв'язків системи називається *загальним розв'язком* цієї системи.

Дві системи називаються *еквівалентними*, якщо вони мають одну і ту саму множину розв'язків.

2. Сумісність системи лінійних рівнянь. Теорема Кронекера-Капеллі

СЛАР зручно записувати у матричній формі:

$$A X = B,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Матриця A називається основною матрицею СЛАР, елементами якої є коефіцієнти системи; B – вектор-стовпцем вільних членів, X – вектор-стовпцем невідомих.

Розширеною матрицею СЛАР (позначається $\bar{A}$ або $(A|B)$) називається основна матриця A системи, доповнена вектор-стовпцем вільних членів B :

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Теорема 1 (Кронекера-Капеллі). Система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці системи дорівнює рангу основної матриці системи, тобто $r(A) = r(\bar{A})$.

При цьому, якщо $r(A) = r(\bar{A}) = n$ (n – кількість невідомих системи), то СЛАР має єдиний розв'язок. Якщо $r(A) = r(\bar{A}) < n$, то система має безліч розв'язків.

3. Розв'язання квадратних СЛАР

Розглянемо квадратну СЛАР:

[illegible]

Квадратна СЛАР називається *невиродженою*, якщо $\det A \neq 0$.

Якщо матриця A системи є невідродженою, то СЛАР є сумісною і має єдиний розв'язок, який можна знайти, застосовуючи один із наступних методів:

1. *Формули Крамера.* Введемо позначення:

Δ – визначник основної матриці СЛАР:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$\Delta_i, i = 1, 2, \dots, n$ – визначники, отримані із визначника Δ заміною його i -го стовпця на вектор-стовпець вільних членів системи.

Зауважимо, що визначник Δ_1 отримується з визначника Δ шляхом заміни першого стовпця стовпцем вільних членів системи

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ визначник } \Delta_2 \text{ отримується з визначника } \Delta$$

ШЛЯХОМ заміни другого стовпця стовпцем вільних членів

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_2 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ и т.д.}$$

Теорема 2. Якщо основна матриця СЛАР є невиродженою ($\det A \neq 0$), то система має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Дослідження квадратної СЛАР на сумісність та визначеність за формулами Крамера:

1. Якщо $\Delta \neq 0$, то система сумісна та визначена, тобто має єдиний розв'язок.

2. Якщо $\Delta = 0$, і існує хоча б один із визначників $\Delta_i \neq 0$, то система несумісна.

3. Якщо $\Delta = 0$, і всі $\Delta_i = 0$, тоді система має безліч розв'язків, тобто є сумісна і невизначена.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь за допомогою формул Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases}$$

Розв'язування:

Обчислимо основний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -12 - 1 + 5 + 6 = -2 \neq 0.$$

Замінивши в Δ послідовно перший, другий та третій стовпці стовпцем із вільних членів, отримаємо:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

За формулами Крамера, знаходимо розв'язок заданої СЛАР:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-2} = 0, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{2}{-2} = -1.$$

2. *Матричний метод.* Квадратну СЛАР можна представити у матричному вигляді:

$$A \cdot X = B,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Оскільки, $\Delta = \det A \neq 0$, то єдиний розв'язок матричного рівняння, еквівалентного СЛАР, можна знайти за формулою:

$$X = A^{-1} \cdot B,$$

де A^{-1} – матриця, обернена до A .

Приклад. Розв'язати СЛАР матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases}$$

Розв'язування:

Маємо:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \det A = -2 \neq 0.$$

Обернена матриця рівна:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Тоді знаходимо

$$X = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$.

Завдання для самостійної роботи

1. За формулами Крамера знайти розв'язок СЛАР, яка задана матрицею A і стовпцем вільних членів B :

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Розв'язати системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) матричним методом;

б) за формулами Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9, \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 7, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 22, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 12 \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -4, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 6, \\ x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -8, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = -7 \end{cases} \quad \text{е) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_3 = 6. \end{cases}$$

3. Дослідити СЛАР на сумісність і, якщо можливо, знайти їх розв'язок:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 - x_3 = 8 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 3, \\ 3x_1 + 15x_2 + 12x_3 = 5 \end{cases}$$

4. Визначити, при яких значеннях a і b система рівнянь: а) має єдиний розв'язок; б) не має розв'язків; в) має безліч розв'язків:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = b, \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + ax_3 = -1. \end{cases}$$

5. Знайти всі значення α , при яких система визначена. Дослідити систему щодо її розв'язків при заданому значенні α :

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + \alpha x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases} \quad \alpha = 0;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 8, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \quad \alpha = 3.$$

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
2. Що називають розв'язком системи лінійних рівнянь?
3. Яку систему лінійних рівнянь називають сумісною, визначено, несумісною?
4. Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі. Яка умова сумісності системи?
5. В якому випадку СЛАР має єдиний розв'язок, безліч розв'язків, не має розв'язків?
6. Запишіть формули Крамера. Коли застосовуються формули Крамера?
7. Що можна сказати про систему лінійних рівнянь, якщо основний визначник дорівнює нулю?
8. У чому полягає матричний спосіб запису і розв'язку систем лінійних рівнянь? Коли він застосовується?

1.5. Метод Гаусса розв'язання довільних систем лінійних рівнянь. Однорідні системи

1. Метод Гаусса розв'язання довільних СЛАР

Метод Гаусса є найбільш універсальним методом розв'язання СЛАР. Він дозволяє одночасно дослідити довільну СЛАР на сумісність та визначеність, і у разі сумісності системи, знайти її загальний розв'язок. Цей метод полягає у послідовному виключенні невідомих з рівнянь системи.

Розглянемо СЛАР, що містить m рівнянь та n невідомих:

[illegible]

Метод Гаусса зручно використовувати, працюючи з розширеною матрицею системи замість самих рівнянь. Розширену матрицю у цьому випадку записують з вертикальною прямою рисою, яка відділяє коефіцієнти біля невідомих від вільних членів. Стовпець вільних членів міняти місцями з іншими стовпцями розширеної матриці не можна.

Випишемо розширену матрицю системи:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

На цьому кроці будемо зводити розширену матрицю системи до східчастого вигляду шляхом елементарних перетворень над рядками матриці. А саме, поставимо на перше місце рівняння, у якого коефіцієнт при невідомій x_1 не дорівнює нулю. Якщо серед коефіцієнтів $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}$ є одиниця, то поставимо відповідне рівняння на місце першого. Далі, виконуючи над рядками розширеної матриці елементарні перетворення, після певної кількості кроків, отримаємо систему східчастого вигляду:

[illegible]

Дана система має такі можливі розв'язки:

1. Якщо система містить рівняння, у якому всі коефіцієнти лівої частини дорівнюють нулю, а вільний член відмінний від нуля ($b_i \neq 0$), то вихідна система *розв'язку не має*, тобто несутісна.

2. Якщо усі праві і ліві частини відповідних рівнянь системи дорівнюють нулю ($b_i = 0$), то маємо тотожності, і ці нульові рядки можна відкинути. Тоді маємо один із двох випадків:

а) кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих ($r = n$) — система має трикутний вигляд:

[illegible]

З останнього рівняння системи знайдемо x_n , і, піднімаючись по системі вгору, знайдемо всі інші невідомі. Отже, в цьому випадку система має *єдиний розв'язок*.

б) кількість рівнянь менша за число невідомих ($r < n$) – система має *безліч розв'язків* і *східчастий* вигляд:

[illegible]

Зауважимо, що система сумісна, оскільки $r(A) = r(\bar{A}) = r$, то r рядків та r стовпців цієї матриці утворюють базисний мінор.

Невідомі, коефіцієнти яких входять до базисного мінору, називаються *головними* або *базисними* (їх число r), а інші $(n - r)$ невідомих називаються *вільними*.

Приклад. Розв'язати СЛАР методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Розв'язування: Переставимо місцями перше і друге рівняння системи. Потім складемо розширену матрицю системи та проведемо необхідні елементарні перетворення рядків:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Отже, СЛАР є сумісна та невизначена, оскільки $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 4 = n$. Випишемо еквівалентну систему та знайдемо її загальний розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3. \end{cases}$$

Оберемо у якості базисних змінних x_1 та x_2 . Перенесемо у праві частини рівнянь вільні змінні x_3, x_4 :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 + 5x_3, \\ x_2 = -3 - 13x_3 + 5x_4. \end{cases}$$

Виразивши x_1, x_2 через x_3 і x_4 , отримаємо загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 8x_3 + 5x_4, \\ x_2 = -3 - 13x_3 + 5x_4, \\ x_3 \\ x_4 \end{cases}$$

де x_3 і x_4 можуть приймати довільні значення.

Якщо $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, то отримаємо частинний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = -3, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

2. Системи однорідних лінійних рівнянь

Нагадаємо, що *однорідною* називається СЛАР, у якої всі вільні члени дорівнюють нулю:

[illegible]

Однорідна СЛАР завжди є сумісною, оскільки у такої системи $r(A) = r(\bar{A})$. Однорідна система завжди має принаймні один розв'язок: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, який називається *нульовим* або *тривіальним* розв'язком СЛАР.

Теорема 1. Для того, щоб однорідна СЛАР мала ненульові розв'язки, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці $r(A)$ був менший за число невідомих n , тобто $r(A) < n$.

Розв'язати однорідну СЛАЛ означає знайти її загальний розв'язок, або переконатися, що вона має лише нульовий розв'язок.

Позначимо розв'язок однорідної системи у вигляді вектор-стовпця:

$$e = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

Якщо $e_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix}$ та $e_2 = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_n \end{pmatrix}$ – розв'язки однорідної СЛАР, то

для довільних $c_1, c_2 \in R$, вектор-стовпець

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 = \begin{pmatrix} c_1 k_1 \\ c_1 k_2 \\ \dots \\ c_1 k_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 k_1 \\ c_2 k_2 \\ \dots \\ c_2 k_n \end{pmatrix}$$

також є розв'язком цієї системи. Отже, довільна лінійна комбінація розв'язків однорідної системи є її розв'язком.

Система розв'язків однорідної СЛАР

$e_1 = \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ \dots \\ k_{1n} \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \\ \dots \\ k_{2n} \end{pmatrix}, \dots, e_s = \begin{pmatrix} k_{s1} \\ k_{s2} \\ \dots \\ k_{sn} \end{pmatrix}$, називається *лінійно незалежною*, якщо матриця $\begin{pmatrix} k_{11} & k_{21} & \dots & k_{s1} \\ k_{12} & k_{22} & \dots & k_{s2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{1n} & k_{2n} & \dots & k_{sn} \end{pmatrix}$ має ранг s .

Система лінійно незалежних розв'язків $e_1, e_2, \dots, e_s$ однорідної СЛАР називається *фундаментальною системою розв'язків* цієї системи, якщо будь-який її розв'язок X є лінійною комбінацією розв'язків $e_1, e_2, \dots, e_s$, тобто $X = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_s e_s$, де $c_1, c_2, \dots, c_s$ – довільні дійсні числа.

Теорема 2 (про структуру загального розв'язку однорідної СЛАР). Якщо ранг основної матриці $r = r(A)$ однорідної СЛАР є меншим за число невідомих n , тобто $r < n$, то будь-яка фундаментальна система розв'язків цієї СЛАР складається з $(n - r)$

розв'язків $e_1, e_2, \dots, e_{n-r}$, причому загальний розв'язок однорідної системи є лінійною комбінацією цих розв'язків:

$$X_{3.0.} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_{n-r} e_{n-r}.$$

Теорема 3 (про структуру загального розв'язку неоднорідної СЛАР). Загальний розв'язок неоднорідної СЛАР дорівнює сумі загального розв'язку відповідної однорідної системи $X_{3.0.}$ та довільного частинного розв'язку $X_{ч.н.}$ неоднорідної СЛАР:

$$X_{3.н.} = X_{3.0.} + X_{ч.н.}$$

Однорідні СЛАР як правило розв'язують методом Гаусса. Інші методи для однорідних СЛАР є неефективними. Для квадратних однорідних СЛАР, обчислюючи визначник системи Δ , можна з'ясувати чи є однорідна СЛАР визначеною, тобто має єдиний нульовий розв'язок ($\Delta \neq 0$), чи вона є невизначеною і має безліч розв'язків ($\Delta = 0$). У випадку, коли квадратна однорідна СЛАР є невизначеною, знайти її загальний розв'язок можна лише методом Гаусса.

Приклад. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язування:

Випишемо основну матрицю системи і зведемо її до східчастого вигляду:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $r(A) = 2$, тобто система має безліч розв'язків. Оскільки $r < n$, то x_1, x_2 – базисні невідомі заданої системи, а x_3, x_4 – вільні невідомі. Тоді

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ -x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_3 - 4x_4, \\ x_2 = -x_3 - x_4. \end{cases}$$

Загальний розв'язок заданої однорідної СЛАР:

$$X_{3.0.} = \begin{pmatrix} -3x_3 - 4x_4 \\ -x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Надаючи вільним змінним x_3 та x_4 різні дійсні значення, отримаємо частинні розв'язки однорідної системи, які складають фундаментальну систему розв'язків даної СЛАР:

$$e_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Позначимо $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$, тоді загальний розв'язок однорідної СЛАР можна представити як лінійну комбінацію розв'язків її фундаментальної системи із відповідними коефіцієнтами C_1, C_2 :

$$X_{3.0.} = \begin{pmatrix} -3x_3 - 4x_4 \\ -x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} C_1 + \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} C_2.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18 \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6 \end{cases} \quad \text{г)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\text{д)} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases} \quad \text{е)} \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -2, \\ 5x_1 + 2x_3 + 5x_4 = -2, \\ 6x_1 + x_2 + 5x_3 + 7x_4 = -4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$$

2. Дослідити СЛАР на сумісність і, якщо можливо, знайти їх розв'язок:

$$\text{а)} \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 + 10x_4 = 8. \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну систему рівнянь:

$$\text{а)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$$

4. Визначити, при якому значенні a система однорідних рівнянь має ненульовий розв'язок:

$$\text{а)} \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ ax_1 - 14x_2 + 15x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 5x_1 + ax_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

5. Знайти загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків однорідних СЛАР:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - 7x_4 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 8x_4 = 0, \\ 2x_1 - 12x_2 + 13x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Питання для самоперевірки

1. У чому полягає розв'язання систем лінійних рівнянь методом Гаусса?
2. Яка система лінійних рівнянь називається однорідною?
3. За якої умови однорідна система лінійних рівнянь має ненульовий розв'язок?
4. Що називається фундаментальною системою розв'язків лінійної системи однорідних рівнянь?
5. Запишіть структуру загального розв'язку однорідної, неоднорідної СЛАР.

РОЗДІЛ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

2.1. Вектори і лінійні операції над ними

1. Основні поняття. Види векторів

При виборі та розробці математичних методів розв'язування прикладних задач конкретного змісту використовують як скалярні, так і векторні величини.

Скалярною величиною, або скаляром, називається величина, яка характеризується за вибраної одиниці вимірювання лише числом. Прикладами скалярних величин можуть бути: довжина, площа, маса, густина, робота, сила струму, температура тощо.

Інші величини, наприклад, переміщення, швидкість, прискорення, сила, визначаються не тільки своїм чисельним значенням, але й напрямом. Такі величини називаються *векторними*. Кожну векторну величину можна зобразити напрямленим відрізком, який називають вектором. Довжина його дорівнює числовому значенню векторної величини, а напрям такий, як і в цієї величини.

Зображення векторних величин напрямленими відрізками (векторами) дає можливість звести ряд дій з векторними величинами до відповідних операцій з векторами.

Вектором називається напрямлений прямолінійний відрізок, тобто відрізок, для якого вказані початок і кінець. Вектор, початком якого є точка A , а кінцем – точка B , позначається символом $\overrightarrow{AB}$. Крім такого позначення, дуже часто вживається позначення вектора однією малою буквою латинського алфавіту з рискою зверху, тобто $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$... (рис. 1).

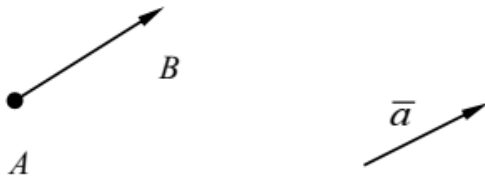


Рис. 1

Вектор $\overrightarrow{BA}$ (його початок в точці B , а кінець в точці A) називається *протилежним* вектору $\overrightarrow{AB}$. Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$, позначається $-\vec{a}$ (рис. 2).

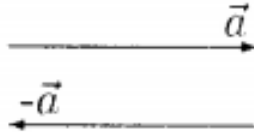


Рис. 2

Довжиною, або модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ називається довжина відрізка AB , яка позначається символом $|\overrightarrow{AB}|$ або $|\vec{a}|$.

Вектор, початок і кінець якого збігаються, називається *нульовим* і позначається $\vec{0}$. Модуль нуль-вектора дорівнює нулю, а його напрям не визначений.

Вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називаються *колінеарними* (рис. 3). Колінеарні вектори можуть бути однаково напрямлені – співнаправлені, які позначають $\vec{a} \uparrow \vec{c}$, і протилежно напрямлені, то їх називають протилежно направленими і позначають $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$. Нульовий вектор вважається колінеарним будь-якому вектору.

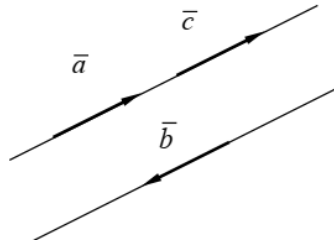


Рис. 3

Вектори вважаються *рівними*, якщо вони колінеарні, мають однакові напрями і довжини (рис. 4).

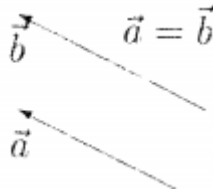


Рис. 4

З означення рівності векторів випливає, що вектор можна переносити паралельно самому собі, а початок вектора поміщати в будь-яку точку O простору. Тому вектори, які вивчаються в геометрії, називаються *вільними*.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається *одичинним* вектором. Якщо напрям одичинного вектора збігається з напрямом $\vec{a}$, то його називають *ортом* вектора $\vec{a}$, і позначають $\vec{a}^0$.

Три вектори називаються *компланарними*, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах.

Якщо серед трьох векторів хоча б один нульовий або два вектори колінеарні, то такі вектори компланарні.

2. Лінійні операції над векторами

Над векторами можна виконувати певні математичні операції. Найпростішими з них є додавання і віднімання векторів, а також множення вектора на число. Як відомо, ці операції називаються лінійними.

Сумою $\vec{a} + \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який з'єднує початок вектора $\vec{a}$ з кінцем вектора $\vec{b}$ за умови, що вектор $\vec{b}$ відкладено від кінця вектора $\vec{a}$ (рис. 5). Це правило додавання векторів називають *правилом трикутника*.

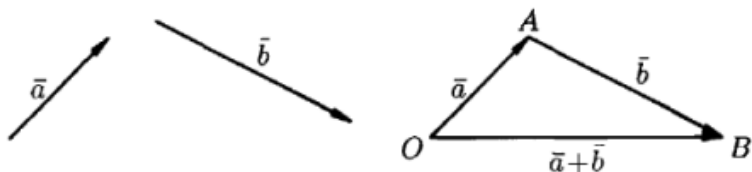


Рис. 5

Суму двох векторів можна побудувати також за *правилом паралелограма* (рис. 6).

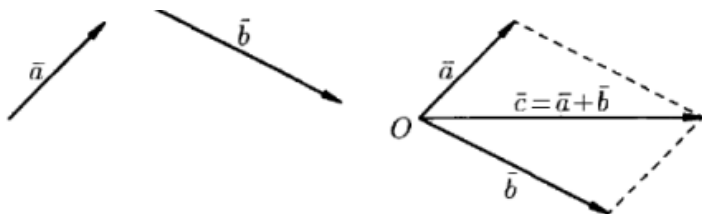


Рис. 6

Для того, щоб додати n векторів потрібно послідовно використовувати правило трикутника. Тоді, вектор суми скінченного числа n векторів, розміщених послідовно, причому так, що початок кожного наступного вектора-доданка збігається з кінцем попереднього вектора-доданка, сполучає початок першого вектора-доданка з кінцем останнього вектора-доданка (рис. 7). Це правило справедливе й у випадку, коли всі n векторів-доданків розташовані на одній прямій.

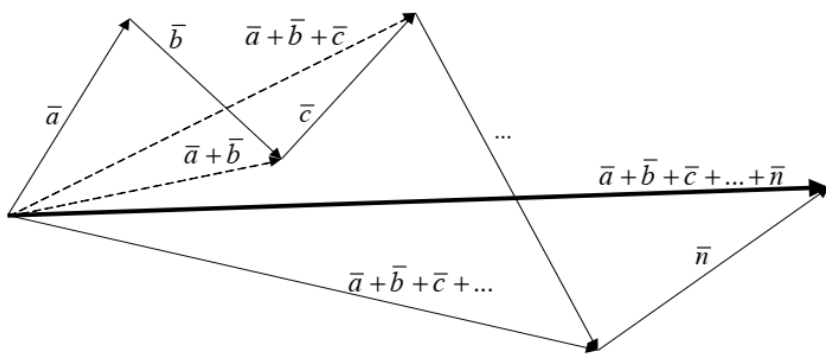


Рис. 7

Додавання векторів має такі властивості:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Правило трикутника додавання векторів дає можливість ввести й операцію віднімання векторів.

Різницею $\vec{a} - \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$, тобто $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ (рис. 8).

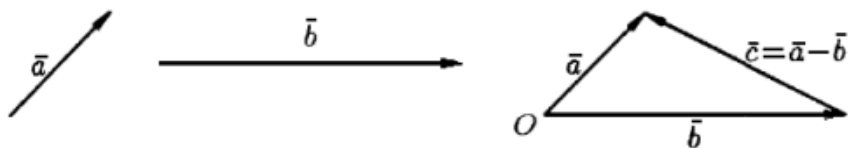


Рис. 8

Зауважимо, що у паралелограмі, побудованому на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, одна направлена діагональ є сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, а інша – різницею (рис. 9).

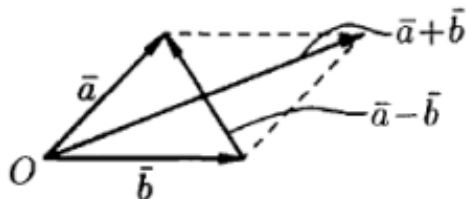
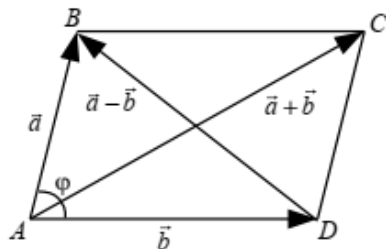


Рис. 9

Приклад. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = 60^\circ$, причому $|\vec{a}| = 5$ і $|\vec{b}| = 8$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Розв'язування: Побудуємо паралелограм $ABCD$ на векторах $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Згідно з визначенням суми та різниці векторів маємо: $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{a} - \vec{b}$.



З $\triangle ABD$ за теоремою косинусів:

$$|\overrightarrow{BD}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2 - 2 |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos \varphi,$$

$$|\overrightarrow{BD}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi,$$

$$|\overrightarrow{BD}|^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 49.$$

Звідси, $|\vec{a} - \vec{b}| = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{49} = 7$.

З $\triangle ACD$ за теоремою косинусів знаходимо:

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 - 2 |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{CD}| \cdot \cos \angle ADC,$$

$$\angle ADC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2 |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cos 120^\circ,$$

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ = 129.$$

$$\text{Значить, } |\vec{a} + \vec{b}| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{129}.$$

Добутком $\alpha \cdot \vec{a}$ вектора $\vec{a} \neq \vec{0}$ на число $\alpha \neq 0$ ($\alpha \in R$) називається вектор $\vec{b}$, який задовольняє такі умови:

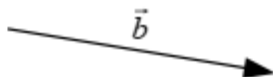
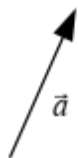
- 1) $\vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{a}$;
- 2) $|\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$;
- 3) вектори $\vec{b}$ і $\vec{a}$ однаково напрямлені, якщо $\alpha > 0$, і протилежні, якщо $\alpha < 0$.

З означення випливає, що коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то $\vec{b} = \alpha \vec{a}$, і навпаки. Якщо $\vec{a}^0$ – одиничний вектор того самого напрямку, що і вектор $\vec{a}$, то $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0$, і навпаки, $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

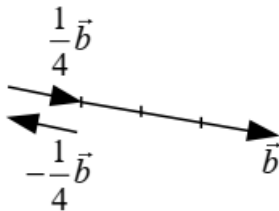
Операція множення вектора на число (скаляр) має наступні властивості:

1. $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$
2. $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$
3. $\alpha \cdot (\beta \vec{a}) = (\alpha \beta) \vec{a}$.

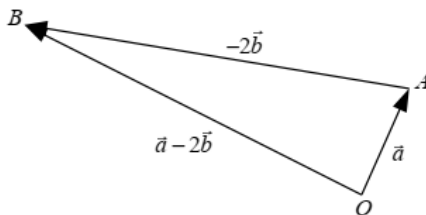
Приклад. За даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати вектори:
а) $-\frac{1}{4}\vec{b}$; б) $\vec{a} - 2\vec{b}$.



Розв'язування: а) Напрямок вектора $-\frac{1}{4}\vec{b}$ протилежний напрямку вектора $\vec{b}$, а його модуль – у 4 рази менший за модуль вектора $\vec{b}$:



б) Вектор $\vec{a} - 2\vec{b}$ запишемо як $\vec{a} + (-2\vec{b})$. За правилом трикутника:



3. Проекція вектора на вісь

Нехай дано вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і вісь l . Проекцією вектора $\vec{a}$ на вісь l ($\text{пр}_l \vec{a}$) називається довжина відрізка $A'B'$ між основами перпендикулярів, опущених з точок A і B , на вісь l , взята зі знаком «+», якщо напрями відрізка $A'B'$ та осі l збігаються, і зі знаком «-», якщо вони протилежні (рис. 10). Якщо $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ або $\overrightarrow{AB} \perp l$, то $\text{пр}_l \overrightarrow{AB} = 0$.

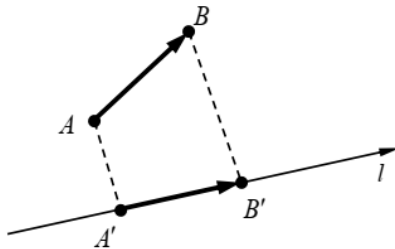


Рис. 10

Кут між вектором і віссю називають кут між двома променями, які виходять зі спільного початку і напрям одного променя збігається з напрямом заданого вектора, напрям іншого – з напрямом осі (рис. 11): $\angle \varphi = \angle(\vec{a}, l)$. Очевидно, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

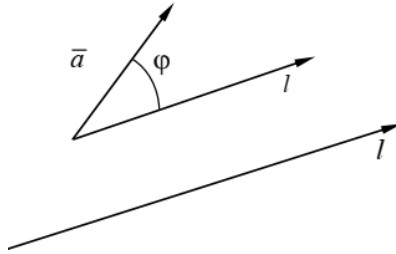


Рис. 11

Зауважимо, що коли вектор $\vec{a}$ і вісь l колінеарні співнапрямлені, то $\angle \varphi = 0$; якщо протилежно напрямлені, то $\angle \varphi = 180^\circ$.

Теорема 1. Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь l дорівнює добутку модуля вектора $\vec{a}$ на косинус кута φ між вектором $\vec{a}$ та віссю l , тобто

$$\text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi.$$

Проекція вектора на вісь додатня (від'ємна), якщо вектор утворює з віссю гострий (тупий) кут, і дорівнює нулю, якщо цей кут – прямий.

Властивості проекції вектора на вісь:

1. Проекції рівних векторів на одну і ту саму вісь є рівними між собою:

$$\vec{a} = \vec{b} \leftrightarrow \text{пр}_l \vec{a} = \text{пр}_l \vec{b}.$$

2. Проекція суми векторів на одну і ту ж саму вісь дорівнює сумі їх проекцій на цю вісь (рис. 12), тобто

$$\text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_l \vec{a} + \text{пр}_l \vec{b}.$$

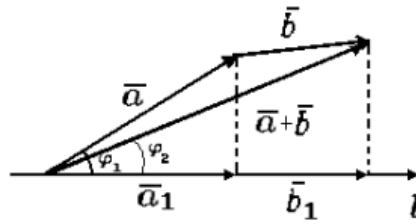


Рис. 12

3. Якщо вектор $\vec{a}$ множиться на будь-яке число α , його проекція на довільну вісь також множиться на число α , тобто

$$\text{пр}_l(\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot \text{пр}_l \vec{a}.$$

Проекцією вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на вектор $\vec{b}$ (рис. 13) називають число, яке знаходять за формулою:

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi.$$

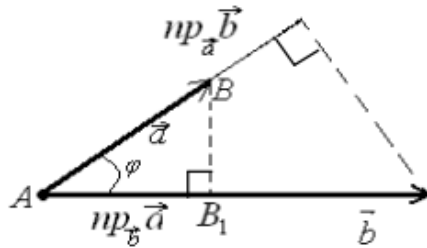


Рис.13

Приклад. Знайти $\text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b})$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$ і $\varphi = 30^\circ$.

Розв'язування: Маємо:

$$\text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_l \vec{a} + \text{пр}_l \vec{b} = |\vec{a}| \cos \varphi + |\vec{b}| \cos \varphi;$$

$$\text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b}) = 2 \cdot \cos 30^\circ + 4 \cdot \cos 30^\circ = 3\sqrt{3}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. За даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати вектор $2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.
2. Задано три вектори $-\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Побудувати вектори:
а) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$; б) $-\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$; в) $\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$;
г) $-2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; д) $-\vec{a} - 3\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$
3. Дано $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 17$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 12$. Обчислити $|\vec{a} + \vec{b}|$.
4. Три одиничні вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють із віссю l кути $\pi/3$, $2\pi/3$ і π відповідно. Знайти проекцію на вісь l вектора $3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$.
5. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, причому $|\vec{a}| = 12$ і $|\vec{b}| = 5$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.
6. На тіло діють дві сили $-\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, причому $|\vec{F}_1| = 8$ Н, $|\vec{F}_2| = 6$ Н. Знайти їх рівнодійну, якщо величина кута між ними дорівнює 90° .
7. При якій умові вектори $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$ колінеарні?
8. У прямокутнику $ABCD$ вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Знайти вектори $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}$.
9. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = 120^\circ$. Обчислити $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 5$ і $|\vec{b}| = 3$.
10. Вектор $\vec{a}$ утворює з віссю l кут $\varphi_1 = 60^\circ$, а вектор $\vec{b}$ утворює з тією самою віссю кут $\varphi_1 = 120^\circ$. Знайти проекцію суми $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, де $\vec{c} = 3\vec{a}$, на вісь l , якщо відомо, що $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 4$.

Питання для самоперевірки

1. Які величини називаються скалярними, векторними? Наведіть приклади.
2. Що таке модуль вектора? Дайте означення одиничного та нульового векторів.
3. Які вектори називаються колінеарними, компланарними, рівними?
4. У чому полягає правило паралелограма при додаванні двох векторів?
5. У чому полягає правило трикутника при додаванні векторів?

6. Опишіть властивості суми двох векторів.
7. Як виконується множення вектора на число? Опишіть його властивості.
8. Що називається скалярною проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l ?
9. Назвіть основні властивості проекцій векторів на вісь.

2.2. Лінійна залежність векторів. Розклад вектора за базисом

1. Узагальнення поняття вектора. n -вимірний векторний простір

Надалі нас буде цікавити лінійний простір R^n , який утворюється множиною n -вимірних векторів.

Очевидно, що для узагальнення поняття вектора на площині потрібно відмовитися від тлумачення вектора як напрямленого відрізка, оскільки навіть при $n=4$ терміни довжина та напрямок втрачають наочність.

Для узагальнення скористаємося тим, що будь-який вектор однозначно визначається своїми координатами: на площині $\vec{a} = (a_x; a_y)$, у просторі $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$. Саме тому можна за аналогією до векторів на площині й у просторі запровадити операції над n -вимірними векторами.

n -вимірним вектором $\vec{x}$ називається упорядкована сукупність n чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ і позначається:

$$\vec{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n).$$

Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ називаються координатами вектора. Упорядкованість означає, що сукупності, які відрізняються перестановкою координат, визначають різні вектори.

Розглянемо множину всіх впорядкованих наборів n дійсних чисел, та введемо на ній операції додавання та множення на число $\lambda \in R$ за наступними правилами:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1; a_2; \dots; a_n) + (b_1; b_2; \dots; b_n) = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; \dots; a_n + b_n);$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_1; \lambda a_2; \dots; \lambda a_n).$$

Множину всіх впорядкованих наборів n дійсних чисел $\vec{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n)$ з введеними операціями додавання та множення на число, називають n -вимірним векторним або алгебраїчним простором та позначають R^n . Очевидно, що для довільних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ з простору R^n та будь-яких дійсних чисел λ, μ виконуються наступні властивості:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;

3. у множині R^n існує нульовий вектор $\vec{0}$ такий, що $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ для будь-якого $\vec{a} \in R^n$;

4. для кожного $\vec{a} \in R^n$ існує протилежний вектор $(-\vec{a}) \in R^n$ такий, що

- $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$;
5. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;
6. $\lambda (\mu \vec{a}) = (\lambda \mu) \vec{a}$;
7. $(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$;
8. $\lambda (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$.

2. Лінійна залежність та незалежність системи векторів

Розглянемо систему векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називається вектор $\vec{x} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$, де $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – деякі скалярні множники (числа), які називають коефіцієнтами лінійної комбінації.

Отже, лінійні комбінації векторів – це вектори, які одержуються в результаті виконання сукупності лінійних операцій на даними векторами $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називається лінійно незалежною, якщо рівність

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

виконується тільки, коли всі $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називається лінійно залежною, якщо існують такі дійсні числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, хоча б одне з яких не дорівнює нулю, що

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}.$$

Те, що система векторів лінійно залежна, рівносильно твердженню, що хоч би один із векторів цієї системи є лінійною комбінацією інших, тобто лінійно виражається через інші вектори системи.

Властивості лінійної залежності та незалежності векторів:

1. Якщо серед векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ є нульовий вектор, то система векторів є лінійно залежною.

2. Якщо вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$, ($k \leq n$) системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ є лінійно залежними, то і всі вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ цієї системи є лінійно залежними.

Система, що складається з одного вектора, лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли цей вектор – нульовий.

Два вектори лінійно залежні лише тоді, коли вони колінеарні. Справді, нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні. Тоді існує таке число $\alpha \neq 0$, що

$$\vec{b} = \alpha \vec{a},$$

а це означає, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ лінійно залежні, і навпаки.

Три вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони компланарні.

Дійсно, нехай вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно залежні, тобто хоча б один з них, наприклад, вектор $\vec{c}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}.$$

Віднесемо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ до спільного початку. Очевидно, що вектори $\alpha \vec{a}$ і $\beta \vec{b}$ лежатимуть в площині векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Їх сума, тобто вектор $\vec{c}$, лежатиме в цій же площині. Отже, вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні.

Навпаки, якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарні, то вони мають спільний початок і лежать в одній площині. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ непаралельні, то подання вектора $\vec{c}$ у вигляді лінійної комбінації векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ показано на рис. 14. Отже, вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – лінійно залежні.

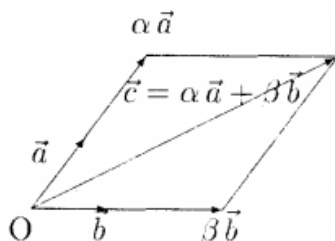


Рис. 14

Якщо ж вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ паралельні, то один з них, наприклад $\vec{a}$, лінійно виражається через другий вектор, тобто $\vec{a} = \beta\vec{b}$. Тоді

$$\vec{a} = \beta\vec{b} + 0 \cdot \vec{c},$$

Тобто вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лінійно залежні.

Теорема 1. Будь-які чотири вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ та $\vec{d}$ в просторі є лінійно залежними, тобто один із векторів є лінійною комбінацією трьох інших.

Доведення. Віднесемо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ до спільного початку. Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні, то вони лінійно залежні, тобто у співвідношенні $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ хоча б один коефіцієнт відмінний від нуля. Але тоді і вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ також лінійно залежні.

Розглянемо випадок, коли вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – некомпланарні. Проведемо через кінець вектора $\vec{d}$ площину, паралельну попарно векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис. 15). Отримаємо паралелепіпед, діагоналю якого є вектор $\vec{OD} = \vec{d}$. Діагональ OD замикає ламану лінію $OAPD$, тому згідно з правилом додавання векторів маємо: $\vec{d} = \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AP} + \vec{PD}$.

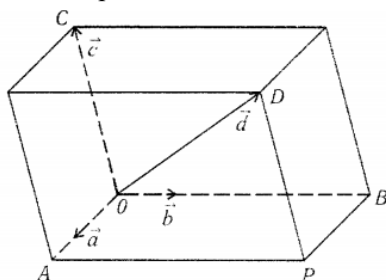


Рис. 15

Оскільки $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PD}$ колінеарні відповідно векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, то існують такі числа α , β , γ , що $\overrightarrow{OA} = \alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{AP} = \beta\vec{b}$, $\overrightarrow{PD} = \gamma\vec{c}$. Отже, отримуємо

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c},$$

а це означає, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ лінійно залежні.

Останнє співвідношення називають розкладом вектора по трьох некомпланарних векторах.

Приклад. Чи буде система векторів $\vec{a}_1 = (2; -3; 1)$, $\vec{a}_2 = (3; -1; 5)$, $\vec{a}_3 = (1; -4; 3)$ лінійно незалежною?

Розв'язування: Використовуємо умову лінійної незалежності векторів:

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 = \vec{0},$$

знайдемо значення коефіцієнтів α_1 , α_2 , α_3 .

В умову лінійної незалежності підставимо координати заданих векторів:

$$\alpha_1(2; -3; 1) + \alpha_2(3; -1; 5) + \alpha_3(1; -4; 3) = \vec{0}$$

або

$$(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3; -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3; \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3) = (0; 0; 0).$$

Використовуючи умову рівності двох векторів, одержимо систему лінійних однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Система лінійних однорідних рівнянь має тільки тривіальний розв'язок, коли головний визначник системи $\Delta \neq 0$.

Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 35 \neq 0.$$

Отже, дана однорідна система має нульові розв'язки: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Тому, вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ і $\vec{a}_3$ лінійно незалежні.

3. Базис векторного простору. Розклад вектора за базисом

Базисом в n -вимірному лінійному просторі називається n лінійно незалежних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, узятих в певному порядку: $\vec{e}_1$ – перший базисний вектор; $\vec{e}_2$ – другий базисний вектор і т.д.

Система n векторів $\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, $\vec{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$, $\dots$, $\vec{a}_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})$ утворює базис в n -вимірному алгебраїчному просторі R^n тоді і тільки тоді, коли визначник, рядками якого є координати векторів системи, не дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Базою, або базисом в просторі називається будь-яка впорядкована трійка некопланарних векторів.

Якщо в просторі заданий базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, то будь-який вектор $\vec{a}$ можна однозначно подати як лінійну комбінацію базисних векторів, тобто у вигляді

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3.$$

Отже, якщо заданий базис, то кожному вектору можна поставити у відповідність впорядковану трійку чисел – коефіцієнтів розкладу цього вектора по базових векторах. Навпаки, кожній впорядкованій трійці чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ за допомогою базису можна поставити у відповідність вектор $\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$, де $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – базисні вектори.

Базисом на площині називається впорядкована пара неколінеарних векторів.

Якщо на площині вибраний базис, то кожному вектору однозначно відповідає впорядкована пара чисел, і навпаки, кожній впорядкованій парі чисел однозначно відповідає вектор.

Серед всіх векторів, заданих у одновимірному просторі (на прямій) базис складається з одного ненульового вектора.

Якщо $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – базис і $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$, то числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ називаються координатами вектора $\vec{a}$ відносно базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Записують це так: $\vec{a} = \{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3\}$.

Приклад. Переконайтеся, що система векторів $\vec{a} = (3; 4; -3)$, $\vec{b} = (-5; 5; 0)$, $\vec{c} = (2; 1; -4)$ утворює базис у множині всіх векторів простору, і знайти розклад вектора $\vec{d} = (8; -16; 17)$, у цьому базисі.

Розв’язування. Спочатку переконаємось, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є лінійно незалежними тобто утворюють базис. Для цього складемо і обчислимо визначник з координат векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -60 + 15 + 30 - 80 = -95 \neq 0$$

Таким чином визначник $\Delta \neq 0$, тому вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є лінійно незалежними, тобто утворюють базис у множині всіх векторів простору.

Нехай α, β, γ – координати вектора $\vec{d}$ у базисі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, тобто

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}.$$

Розпишемо цю рівність

$$(8; -16; 17) = \alpha (3; 4; -3) + \beta (-5; 5; 0) + \gamma (2; 1; -4), \text{ звідки}$$

$$\begin{cases} 3\alpha - 5\beta + 2\gamma = 8, \\ 4\alpha + 5\beta + \gamma = -16, \\ -3\alpha - 4\gamma = 17. \end{cases}$$

Розв’язуючи цю СЛАР, отримаємо шукані координати вектора $\vec{d}$ в новому базисі: $\alpha = 1, \beta = -3, \gamma = -5$. Отже, розклад вектора $\vec{d}$ за базисом $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ має вигляд:

$$\vec{d} = \vec{a} - 3\vec{b} - 5\vec{c}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. У паралелограмі $ABCD$ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, E – середина сторони CD . Розкласти вектор $\overrightarrow{BE}$ за базисом $\vec{a}, \vec{c}$.
2. У ромбі $ABCD$ діагоналі $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$. Розкласти за цими векторами вектори: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$.
3. У трикутнику ABC точка D ділить сторону AB у відношенні $AD:DB=2:7$. Розкласти вектор $\overrightarrow{CD}$ за векторами $\overrightarrow{CA} = \vec{b}, \overrightarrow{CB} = \vec{a}$.
4. Знайти розклад за базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ діагоналей $\vec{d}_1, \vec{d}_2$ паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}, \vec{b} = 3\vec{k} - 3\vec{j}$.
5. Перевірити колінеарність векторів $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ і $\vec{b} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$. Знайти їх лінійну залежність.
6. З'ясувати, чи вектори $\vec{a}_1 = (1; 1; 1)$ і $\vec{a}_2 = (1; -1; 2)$ є лінійно залежними.
7. Чи можуть вектори $\vec{a}_1 = (1; 1; 1), \vec{a}_2 = (1; -1; 2)$ і $\vec{a}_3 = (4; 1; 4)$ утворювати базис?
8. При якому значенні α вектори $\vec{a}_1 = (1; 2; -1), \vec{a}_2 = (2; 3; 1)$ і $\vec{a}_3 = (\alpha; 1; 2)$ будуть лінійно залежними?
9. На площині задані вектори $\vec{p} = (2; -3), \vec{q} = (1; 2)$ і $\vec{a} = (9; 4)$. Переконатись, що вектори $\vec{p}$ і $\vec{q}$ утворюють базис на площині і знайти розклад вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{p}, \vec{q}$.
10. Дано три вектори $\vec{a} = (3; -2; 1), \vec{b} = (-1; 1; -2), \vec{c} = (2; 1; -3)$. Знайти розклад вектора $\vec{d} = (11; -6; 5)$ за базисом $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Питання для самоперевірки

1. Що таке лінійна комбінація векторів?
2. Яка система векторів називається лінійно залежною, лінійно незалежною?
3. Властивості лінійної залежності і незалежності векторів.
4. Дайте визначення базису в n -вимірному лінійному просторі.
5. Що називається базисом на площині?
6. Що називається базисом в просторі?
7. Що таке розкладання вектора за певним базисом?

2.3. Системи координат. Координати вектора. Лінійні операції з векторами в координатній формі

1. Прямокутна декартова система координат

Зафіксуємо в просторі точку O і виберемо довільну точку M . Радіус-вектором точки M щодо точки O називається вектор $\overrightarrow{OM}$. Виберемо, крім того, за базис трійку некомпланарних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Тоді точці M можна поставити у відповідність впорядковану трійку чисел – координати її радіус-вектора.

Сукупність точки O і базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ називається *декартовою системою координат* $Oe_1e_2e_3$. Точку O називають початком координат. Осі, що проходять через початок координат в напрямі базисних векторів, називають осями координат: першу – віссю абсцис, другу – віссю ординат, третю – віссю аплікат. Площини, які проходять через осі координат, називаються координатними площинами (рис. 16).

Координатами точки M у декартовій системі координат називають координати радіус-вектора цієї точки у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Отже, якщо $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = (x; y; z)$, то точка M має координати x, y, z , що записують так: $M(x; y; z)$.

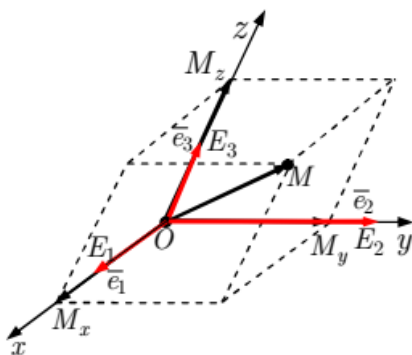


Рис. 16

Декартова система координат називається *прямокутною*, якщо базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – ортонормований, тобто $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$, і кути між базисними векторами прямі. Ортонормований базис позначають через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Тоді $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$. Прямокутну декартову систему координат позначають $Oxyz$, де точка O – початок координат, Ox – вісь абсцис, Oy – вісь ординат, Oz – вісь аплікат.

2. Координати вектора в прямокутній системі координат. Напрямні косинуси

Розглянемо у просторі прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Виділимо на осях Ox , Oy , Oz одиничні вектори (орти) $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ відповідно. Виберемо довільний вектор $\vec{a}$ простору та перенесемо його початок у початок координат $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ (рис. 17).

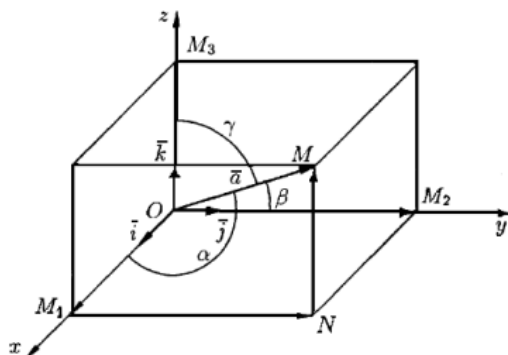


Рис. 17

Знайдемо проєкції вектора $\vec{a}$ на координатні осі. Для цього проведемо через кінець M вектора $\overrightarrow{OM}$ площини, паралельні координатним площинам. Точки перетину цих площин з координатними осями позначимо M_1 , M_2 та M_3 відповідно. Отримаємо прямокутний паралелепіпед, однією з діагоналей якого є вектор $\overrightarrow{OM}$. Тоді $\text{пр}_{Ox}\vec{a} = |\overrightarrow{OM_1}|$, $\text{пр}_{Oy}\vec{a} = |\overrightarrow{OM_2}|$ та $\text{пр}_{Oz}\vec{a} = |\overrightarrow{OM_3}|$. Крім того,

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}.$$

Але $\overrightarrow{OM_1} = |\overrightarrow{OM_1}| \cdot \vec{i}$; $\overrightarrow{OM_2} = |\overrightarrow{OM_2}| \cdot \vec{j}$; $\overrightarrow{OM_3} = |\overrightarrow{OM_3}| \cdot \vec{k}$. Позначимо $|\overrightarrow{OM_1}| = a_x$, $|\overrightarrow{OM_2}| = a_y$ та $|\overrightarrow{OM_3}| = a_z$. Тоді

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Ця рівність називається *розкладом вектора по ортах координатних осей*, а числа a_x , a_y , a_z – координатами вектора. Таким чином, координати вектора є його проєкції на відповідні координатні осі. Вектор $\vec{a}$, який задано своїми координатами в $Oxyz$, часто

записують у скороченій формі: $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$. Слід відзначити, що базисні орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ у координатній формі мають такий запис: $\vec{i} = (1; 0; 0), \vec{j} = (0; 1; 0), \vec{k} = (0; 0; 1)$.

За відомими координатами вектора можна знайти його модуль. Оскільки $\vec{a}$ є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда, то

$$|\overrightarrow{OM}|^2 = |\overrightarrow{OM_1}|^2 + |\overrightarrow{OM_2}|^2 + |\overrightarrow{OM_3}|^2,$$

тобто

$$|\vec{a}|^2 = |a_x|^2 + |a_y|^2 + |a_z|^2,$$

звідти

$$|\vec{a}| = \sqrt{|a_x|^2 + |a_y|^2 + |a_z|^2}.$$

Отже, модуль вектора дорівнює квадратному кореню з суми квадратів його проєкцій на координатні осі.

Кути, які утворює вектор з додатними напрямними координатних осей Ox, Oy, Oz , позначаються α, β, γ відповідно (рис. 19). Числа $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ називають *напрямними косинусами* вектора $\vec{a}$. Оскільки a_x, a_y, a_z є проєкціями вектора $\vec{a}$ на координатні осі, то згідно з означенням проєкції вектора на вісь, маємо:

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha, a_y = |\vec{a}| \cdot \cos \beta, a_z = |\vec{a}| \cdot \cos \gamma.$$

Звідси випливає, що:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Напрямні косинуси вектора задовольняють співвідношення:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{a_x^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{a_y^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{a_z^2}{|\vec{a}|^2} = \frac{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 1,$$

тобто

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Слід відзначити, що координати орта $\vec{a}^0$ вектора $\vec{a}$ є напрямні косинуси вектора, тобто $\vec{a}^0 = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$.

Приклад. Знайти модуль вектора $\vec{a} = 20\vec{i} + 30\vec{j} - 60\vec{k}$ і його напрямні косинуси.

Розв'язування: Модуль вектора $\vec{a}$ знайдемо за формулою:

$$|\vec{a}| = \sqrt{|a_x|^2 + |a_y|^2 + |a_z|^2} = \sqrt{20^2 + 30^2 + (-60)^2} = 70.$$

Напрямні косинуси вектора:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{20}{70} = \frac{2}{7}; \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}; \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{-60}{70} = -\frac{6}{7}.$$

3. Лінійні операції з векторами в координатній формі

Нехай вектори $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ та $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ задані своїми проекціями на осі координат, або

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}.$$

Лінійні операції над векторами зводяться до відповідних лінійних операцій над їх проекціями.

Рівність векторів. Якщо два вектори рівні. То рівні також і їхні проекції на будь-яку вісь, а отже, рівні їхні координати. Тому з рівності $\vec{a} = \vec{b}$ випливає:

$$a_x = b_x, \quad a_y = b_y, \quad a_z = b_z.$$

Колінеарність векторів. Умовою колінеарності двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є рівність $\vec{a} = \alpha\vec{b}$, тобто

$$a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \alpha b_x\vec{i} + \alpha b_y\vec{j} + \alpha b_z\vec{k}.$$

Звідси отримаємо, що $a_x = \alpha b_x$, $a_y = \alpha b_y$, $a_z = \alpha b_z$, а отже

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \alpha.$$

Таким чином, умовою колінеарності двох векторів є пропорційність їхніх відповідних координат.

Сума та різниця двох векторів. Сума або різниця двох векторів дорівнює сумі або різниці відповідних координат:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$$

або

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z).$$

Добуток вектора на число. Щоб помножити вектор на число, необхідно помножити на це число його координати:

$$\lambda \vec{a} = \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k}$$

або

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z).$$

Приклад. Знайти модуль вектора $\vec{a}$, якщо $\vec{a} = 3\vec{b} - 2\vec{c} + \vec{d}$, де $\vec{c} = (-4; 3; -1)$, $\vec{b} = (-3; -7; 0)$, $\vec{d} = (2; 1; -8)$.

Розв'язування: Знайдемо координати вектора $\vec{a}$, виконуючи дії з векторами $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$. Спочатку знайдемо вектори $3\vec{b}$ та $2\vec{c}$:

$$3\vec{b} = (-9; -21; 0); \quad 2\vec{c} = (-8; 6; -2).$$

Відшукаємо координати вектора $\vec{a} = 3\vec{b} - 2\vec{c} + \vec{d}$:

$$\vec{a} = (-9 + 8 + 2; -21 - 6 + 1; 0 + 2 - 8) = (1; -26; -6).$$

Знайдемо модуль вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-26)^2 + (-6)^2} = \sqrt{713}.$$

Приклад. Знайти α , β , при яких вектори $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} + \alpha\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \beta\vec{j} + 3\vec{k}$ колінеарні.

Розв'язування: Оскільки за умовою колінеарності двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, їх координати пропорційні:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{\beta} = \frac{\alpha}{3}.$$

З рівності $\frac{1}{2} = \frac{3}{\beta}$ знайдемо $\beta = 6$. Аналогічно знаходимо $\alpha: \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{3}$, звідси $\alpha = 1,5$.

4. Найпростіші задачі аналітичної геометрії

Координати вектора, заданого двома точками

Нехай у прямокутній системі координат дано дві точки $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AB}$ (рис. 18).

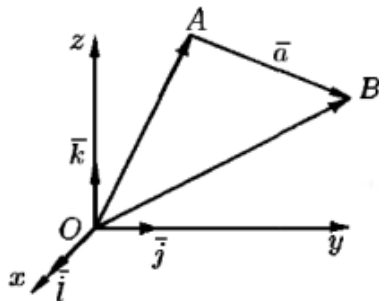


Рис. 18

Маємо $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2, z_2)$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Отже, $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Тобто, координати будь-якого вектора є різницею відповідних координат його кінця та початку.

Запишемо формулу для довжини вектора $\overrightarrow{AB}$, тобто відстані між двома точками:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Приклад. Обчислити периметр трикутника ABC з вершинами $A(8; 0; 7)$, $B(10; 2; 8)$, $C(10; -2; 8)$.

Розв'язування: Знайдемо довжини сторін трикутника ABC :

$$\begin{aligned} AB &= |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \\ &= \sqrt{(10 - 8)^2 + (2 - 0)^2 + (8 - 7)^2} = 3; \end{aligned}$$

$$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2} =$$

$$= \sqrt{(10 - 10)^2 + (-2 - 2)^2 + (8 - 8)^2} = 4;$$

$$\begin{aligned} AC &= |\vec{AC}| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2} = \\ &= \sqrt{(10 - 8)^2 + (-2 - 0)^2 + (8 - 7)^2} = 3. \end{aligned}$$

Отже, периметр трикутника ABC :

$$P = AB + BC + AC = 3 + 4 + 3 = 10.$$

Поділ відрізка в даному відношенні

За допомогою радіус-векторів можна розв'язати задачу про ділення відрізка в даному відношенні.

Нехай точка $M(x; y; z)$ розташована на відрізку M_1M_2 між точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 19), і ділить його на два відрізки M_1M та MM_2 у відношенні λ , тобто $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$.

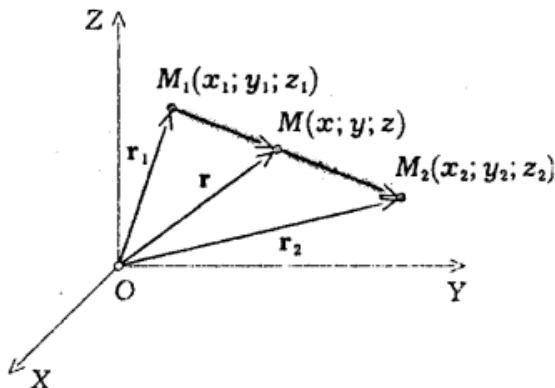


Рис. 19

З огляду на колінеарність векторів $\vec{M_1M}$ і $\vec{MM_2}$, маємо $\vec{M_1M} = \lambda \vec{MM_2}$, а оскільки $\vec{M_1M} = r - r_1$, а $\vec{MM_2} = r_2 - r$, то

$$r - r_1 = \lambda \cdot (r_2 - r).$$

Розв'язуючи дану рівність відносно r , одержуємо:

$$r = \frac{r_1 + \lambda r_2}{1 + \lambda}.$$

Враховуючи, що радіус-вектори r_1 і r_2 дорівнюють:

$$r_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, r_2 = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k},$$

одержимо формули для координат точки $M(x; y; z)$ через координати точок, які обмежують поділений у відношенні λ відрізок:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Якщо $\lambda > 0$, то точка $M(x; y; z)$ знаходиться на відрізку $M_1 M_2$ між точками M_1 і M_2 ; якщо $\lambda < 0$, то точка M розташована ззовні відрізка $M_1 M_2$.

Якщо $\lambda = 1$, то точка M ділить відрізок $M_1 M_2$ навпіл, тоді для координат середини відрізка матимемо:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Приклад. Дано вершини $A(2; 2; 2)$, $B(6; 5; 0)$, $C(0; 3; 8)$ паралелограма $ABCD$. Знайти вершину D .

Розв'язування: нехай точка O – точка перетину діагоналей паралелограма. Діагоналі паралелограма, як відомо, в точці перетину діляться навпіл.

Тоді, оскільки точка O є серединою відрізка AC , то згідно з формулами для знаходження координат середини відрізка маємо:

$$x_O = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2+0}{2} = 1,$$

$$y_O = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2+3}{2} = 2,5,$$

$$z_O = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{2+8}{2} = 5,$$

тобто координати точки перетину діагоналей паралелограма будуть $O(1; 2,5; 5)$.

Точка O є також серединою відрізка BD . Оскільки координати точок B і O відомі, то можна знайти координати точки D :

$$x_O = \frac{x_B + x_D}{2}, \quad y_O = \frac{y_B + y_D}{2}, \quad z_O = \frac{z_B + z_D}{2},$$

або

$$1 = \frac{6 + x_D}{2}, \quad 2,5 = \frac{5 + y_D}{2}, \quad 5 = \frac{0 + z_D}{2},$$

звідки $x_D = -4$, $y_D = 0$, $z_D = 10$, тобто $D(-4; 0; 10)$.

Завдання для самостійної роботи

1. Задано вектори $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} - 3\vec{j}$. Обчислити координати векторів: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

2. Визначити α і β . При яких вектори $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ і $\vec{b} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - \beta\vec{k}$ колінеарні. Написати лінійну залежність між векторами для знайдених α і β .

3. Перевірити, що чотири точки є вершинами трапеції $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(-1; 1; -3)$, $D(3; -5; 3)$.

4. Відомо $|\vec{a}| = 2$ і кути, які цей вектор утворює з координатними осями: $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$. Обчислити проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі.

5. Вершини трикутника ABC мають координати $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 0; 4)$, $C(3; 6; 7)$. Знайти довжину медіани, проведеної до сторони AC .

6. Обчислити напрямні косинуси вектора $\vec{a} = (12; -15; -16)$.

7. Знайти орт вектора $\vec{a} = (-2; 6; -3)$.

8. Знайти вектор $\vec{b}$, який колінеарний вектору $\vec{a} = (1; -2; -2)$, утворює з віссю Oy гострий кут і має довжину $|\vec{b}| = 15$.

9. Задані координати трьох вершин $A(0; 1; -1)$, $B(1; 0; 2)$, $C(2; 3; 0)$ паралелограма $ABCD$. Знайти координати точки D .

10. Знайти координати точки M перетину медіан трикутника ABC , якщо $A(1; 2; 3)$, $B(0; 1; 1)$, $C(-1; 0; 1)$

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення прямокутної декартової системи координат у просторі.
2. Як виконуються лінійні операції над векторами в координатній формі?
3. Запишіть формулу довжини вектора в координатній формі.
4. Як виконуються лінійні операції над векторами в координатній формі?
5. Що таке напрямні косинуси вектора?
6. Яка умова колінеарності векторів?
7. Як записати вектор у координатній формі, якщо відомі координати його початку $A(x_1, y_1, z_1)$ і кінця $B(x_2, y_2, z_2)$?
8. За якою формулою обчислюється довжина відрізка, заданого координатами його кінців?
9. Як визначають координати точки, що поділяє даний відрізок у заданому відношенні?

2.4. Скалярний добуток векторів

1. Скалярний добуток двох векторів, його властивості

Розглянемо два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, приведені до одного початку (рис. 20). *Кутом між векторами* називається найменший кут, на який необхідно повернути будь-який з них до суміщення їх напрямів. Будемо позначати його $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$. Згідно зі сказаним, $\varphi \in [0, \pi]$.

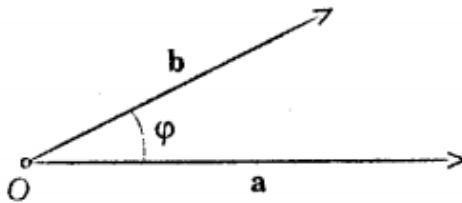


Рис. 20

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними (позначається $\vec{a} \cdot \vec{b}$ або $(\vec{a}, \vec{b})$), тобто

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi,$$

де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

З означення проекції вектора на вісь випливає, що $|\vec{a}| \cdot \cos \varphi = \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$, $|\vec{b}| \cdot \cos \varphi = \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$, тоді

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b},$$

Тобто скалярний добуток двох векторів дорівнює модулю одного з них, помноженому на проекцію другого вектора на вісь співнапрявлену з першим вектором.

Властивості скалярного добутку:

1. *Скалярний добуток не залежить від порядку співмножників (комутативність):*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

Ця властивість випливає з означення скалярного добутку.

2. *Числовий множник можна виносити за знак скалярного добутку (асоціативність):*

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Дійсно, користуючись відповідною властивістю проекцій вектора, маємо:

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}}(\lambda \vec{a}) = |\vec{b}| \cdot \lambda \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \lambda \cdot |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Дана властивість має й обернену інтерпретацію: щоб помножити скалярний добуток на числовий множник, достатньо помножити на цей множник будь-який з перемножуваних векторів.

3. *Скалярний добуток будь-якого вектора на суму двох векторів дорівнює сумі скалярних добутків цього вектора на кожний з векторів доданків (дистрибутивність):*

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Дійсно,

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \text{пр}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} + \vec{a} \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

4. Скалярний добуток вектора самого на себе дорівнює квадрату його модуля, тобто:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

Оскільки кут $\varphi = 0^\circ$, то $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$.

Скалярний добуток вектора самого на себе називається скалярним квадратом і позначається $\vec{a}^2$. Згідно з цим, дана властивість матиме вигляд:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2,$$

звідки можна записати

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$$

Якщо вектор $\vec{a}$ є не нульовим вектором, то можна зробити висновок, що скалярний добуток будь-якого вектора самого на себе є завжди величиною додатною, тобто

$$\vec{a} \cdot \vec{a} > 0.$$

Крім того, з властивості випливає, що $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$.

5. Скалярний добуток двох векторів дорівнює нулю, коли вектори взаємно перпендикулярні або хоча б один зі співмножників є нуль-вектором.

Дійсно, коли вектори перпендикулярні ($\vec{a} \perp \vec{b}$), то кут між ними дорівнює $\varphi = 90^\circ$, а оскільки $\cos 90^\circ = 0$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0.$$

Якщо принаймні один зі співмножників дорівнює нуль-вектору, то це твердження випливає безпосередньо, оскільки $|\vec{0}| = 0$. Слід також відзначити, що оскільки напрям нуль-вектора невизначений, то його також можна вважати перпендикулярним будь-якому вектору. Враховуючи це, дану властивість можна записати так:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Зокрема з властивості випливає, що $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$.

2. Скалярний добуток векторів у координатній формі

Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані своїми координатами:

$$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z), \quad \vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$$

або

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k},$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні попарно перпендикулярні базисні вектори, тобто $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$; $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$.

Тоді, враховуючи дані рівності, скалярний добуток рівний

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x (\vec{i} \cdot \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \cdot \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \cdot \vec{k}) + a_y b_x (\vec{j} \cdot \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \cdot \vec{j}) + \\ &\quad + a_y b_z (\vec{j} \cdot \vec{k}) + a_z b_x (\vec{k} \cdot \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \cdot \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \cdot \vec{k}) = \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \end{aligned}$$

Отже,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

тобто скалярний добуток двох векторів у координатній формі дорівнює сумі добутків їхніх відповідних координат.

Якщо розглядати скалярний добуток вектора самого на себе, то маємо:

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

Оскільки $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$, то одержимо формулу для знаходження довжини вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

тобто, довжина вектора дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його координат.

В окремому випадку скалярного добутку одиничного вектора самого на себе, який у координатній формі має вигляд $\vec{e} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$, одержимо:

$$1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma.$$

Приклад. Довести, що чотирикутник з вершинами $A_1(-5; 3; 4)$, $A_2(-1; -7; 5)$, $A_3(6; -5; -3)$, $A_4(2; 5; -4)$ є квадрат.

Розв'язування: Знаходимо координати векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{A_4A_3}$ і $\overrightarrow{A_1A_4}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (-1 + 5; -7 - 3; 5 - 4) = (4; -10; 1);$$

$$\overrightarrow{A_2A_3} = (6 + 1; -5 + 7; -3 - 5) = (7; 2; -8);$$

$$\overrightarrow{A_4A_3} = (6 - 2; -5 - 5; -3 + 4) = (4; -10; 1);$$

$$\overrightarrow{A_1A_4} = (2 + 5; 5 - 3; -4 - 4) = (7; 2; -8).$$

Порівнюючи координати векторів бачимо, що: $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_4A_3}$,
 $\overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{A_1A_4}$,

а оскільки

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{4^2 + (-10)^2 + 1^2} = \sqrt{117},$$

$$|\overrightarrow{A_2A_3}| = \sqrt{7^2 + 2^2 + (-8)^2} = \sqrt{117},$$

тоді

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = |\overrightarrow{A_2A_3}| = |\overrightarrow{A_4A_3}| = |\overrightarrow{A_1A_4}|.$$

Тому

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| \cdot |\overrightarrow{A_2A_3}| = 4 \cdot 7 + (-10) \cdot 2 + 1 \cdot (-8) = 0,$$

то

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| \perp |\overrightarrow{A_2A_3}|.$$

Отже, чотирикутник $A_1A_2A_3A_4$ є квадрат.

3. Застосування скалярного добутку векторів

1. Умова перпендикулярності двох векторів

Оскільки скалярний добуток двох взаємно перпендикулярних векторів дорівнює нулю, то для $\vec{a} \perp \vec{b}$ одержимо:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

2. Кут між двома векторами

З означення скалярного добутку випливає вираз для знаходження кута між двома векторами:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

У координатній формі ця формула матиме вигляд:

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

3. Проекція вектора на вектор

Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ обчислюється за формулою:

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

4. Робота сталої сили

Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно з точки A в точку B під дією сталої сили $\vec{F}$, що утворює кут φ з напрямком $\overrightarrow{AB}$. З фізики відомо, що робота A сили $\vec{F}$ при переміщенні $\overrightarrow{AB}$ дорівнює:

$$A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB},$$

або

$$A = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \varphi.$$

Приклад. Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 4\vec{q}$, якщо $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, $\varphi = (\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.

Розв'язування: Діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, утворюють вектори $\vec{a} + \vec{b} = 3\vec{p} + 3\vec{q}$ і $\vec{a} - \vec{b} = \vec{p} - 5\vec{q}$.

Знайдемо спочатку $|\vec{a} + \vec{b}|^2$. Використовуючи властивості скалярного добутку, отимаємо:

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b})^2 = (3\vec{p} + 3\vec{q})^2 = 9\vec{p}^2 + 18\vec{p} \cdot \vec{q} + 9\vec{q}^2 = \\ &= 9|\vec{p}|^2 + 18|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \cos \varphi + 9|\vec{q}|^2 = 9 \cdot 1 + 18 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot 4 = 63, \end{aligned}$$

звідки

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}.$$

Аналогічно знаходимо $|\vec{a} - \vec{b}|^2$:

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{p} - 5\vec{q})^2 = \vec{p}^2 - 10\vec{p} \cdot \vec{q} + 25\vec{q}^2 = \\ &= |\vec{p}|^2 - 10|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \cos \varphi + 25|\vec{q}|^2 = 1 - 10 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 25 \cdot 4 = 91, \end{aligned}$$

Отже, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{91}$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти довжину вектора $\vec{c} = 4\vec{b} - \vec{a}$, якщо відомо, що $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.

2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Відомо, що $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$. Обчислити:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \vec{a} \cdot \vec{b}; & \text{б) } \vec{a}^2; & \text{в) } (\vec{a} + \vec{b})^2; \\ \text{г) } (\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b}); & & \text{д) } (2\vec{a} + 3\vec{b})^2. \end{array}$$

3. Дано довжини векторів $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$. Визначити, при якому α вектори $\alpha\vec{a} + \vec{b}$ і $\alpha\vec{a} - \vec{b}$ взаємно перпендикулярні.

4. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Відомо, що $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$. Обчислити кут між векторами $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{q} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

5. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = \vec{m} + 4\vec{n}$ на вектор $\vec{b} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

6. Знайти довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, якщо $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$.

7. Знайти величину внутрішнього кута трикутника ABC при вершині A і довжину висоти, проведеної з вершини B , якщо $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$, $C(5; 2; 6)$.

8. Обчислити роботу, яку виконує сила $\vec{F}(3; -1; -4)$, коли її точка прикладання рухаючись прямолінійно переміщується з положення $A(-2; 5; 6)$ в положення $B(-1; 7; -3)$.

9. Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до осі Oz і задовольняє умовам $\vec{x} \cdot \vec{a} = 9$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -4$.

10. Дано вершини чотирикутника $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$, $D(-5; -5; 3)$. Довести, що його діагоналі AC і BD взаємно перпендикулярні.

Питання для самоперевірки

1. Що називається скалярним добутком двох векторів?
2. Як виражається скалярний добуток через проекції одного вектора на інший?
3. Які властивості скалярного добутку?
4. Що таке скалярний квадрат вектора і чому він дорівнює?
5. Як виражається скалярний добуток через координати векторів в декартовій системі координат?
6. Яка умова перпендикулярності двох векторів, заданих координатами?
7. Запишіть формулу косинуса кута між двома векторами через їх скалярний добуток.

2.5. Векторний та мішаний добуток векторів

1. Векторний добуток двох векторів, його властивості

Впорядкована трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, які виходять із спільного початку, називається *правою*, якщо з кінця третього вектора $\vec{c}$ найкоротший перехід від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ здійснюється проти

годинникової стрілки, і *лівою*, якщо найкоротший перехід від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ здійснюється за годинниковою стрілкою (рис. 21).

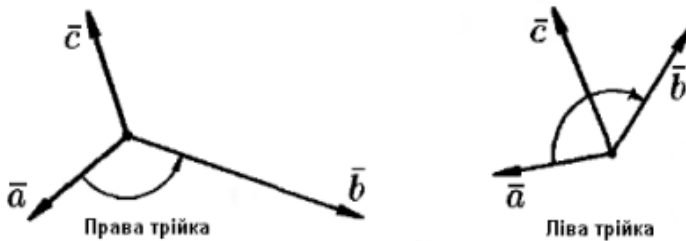


Рис. 21

Якщо умовно позначимо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ відповідно перший, другий, третій, то при перестановці будь-яких векторів, які знаходяться поруч, наприклад $\vec{a}$ і $\vec{b}$ або $\vec{b}$ і $\vec{c}$, ліва трійка векторів переходить у праву, і навпаки.

Трійку векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ будемо позначати у фігурних дужках: $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

Декартова система координат називається *правою (лівою)*, якщо базисні вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ утворюють праву (ліву) впорядковану трійку векторів. Таким чином, слід мати на увазі, що існують ліві та праві декартові системи координат. Надалі будемо користуватися правою системою координат.

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє такі умови:

- 1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
- 2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
- 3) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів.

Векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають $\vec{a} \times \vec{b}$ або $[\vec{a}, \vec{b}]$. З означення випливає, що модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 22).

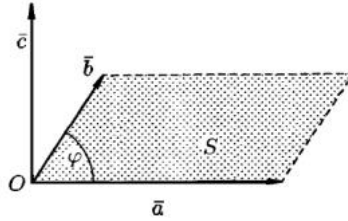


Рис. 22

З означення векторного добутку безпосередньо випливають наступні співвідношення для ортів координатних осей:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$$

Властивості векторного добутку:

1. При перестановці місцями векторів-співмножників векторний добуток двох векторів змінює знак на протилежний (антикомутативність):

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

Справді, вектори $\vec{a} \times \vec{b}$ і $\vec{b} \times \vec{a}$ мають однакові довжини (модулі):

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{a}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi.$$

Вони колінеарні, оскільки обидва перпендикулярні до площини, що визначається векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Їх напрями протилежні, бо трійки $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ та $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{b} \times \vec{a}\}$ різної орієнтації, одна з них є правою, а інша лівою (рис. 23). Таким чином, $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

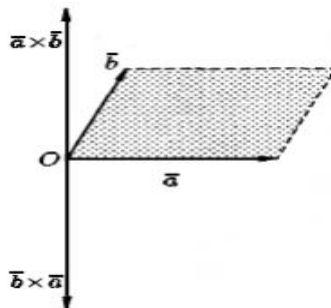


Рис. 23

2. Векторний добуток двох векторів дорівнює нульовому вектору тоді, коли вектори-множники колінеарні, тобто $\vec{a} \parallel \vec{b}$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Дійсно, якщо вектори колінеарні, то кут φ між ними буде дорівнювати 0° або 180° . Тоді $\sin \varphi = 0$, звідки модуль векторного добутку, а отже, і сам векторний добуток буде дорівнювати нулю.

Зовсім очевидно, що коли $|\vec{a}| = 0$ або $|\vec{b}| = 0$, тоді $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

3. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, то модуль їх векторного добутку дорівнює добутку їх модулів, і навпаки:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \quad \leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Ця властивість є очевидним наслідком означення векторного добутку, оскільки $\sin 90^\circ = 1$.

4. Скалярний множник виноситься за знак векторного добутку (асоціативність):

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b}).$$

Доведемо рівність $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$.

Дійсно, якщо $\lambda > 0$, то обидва вектори в цій рівності мають один і той же напрям (рис. 24а) та один і той же модуль $\lambda |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Якщо $\lambda < 0$ (рис. 24б), то вектор $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}$ матиме модуль $\lambda |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$, але буде напрямлений протилежно вектору $\vec{a} \times \vec{b}$, хоча такий самий напрям і такий самий модуль матиме й вектор $\lambda (\vec{a} \times \vec{b})$, отриманий з вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ множенням на від'ємне число λ .

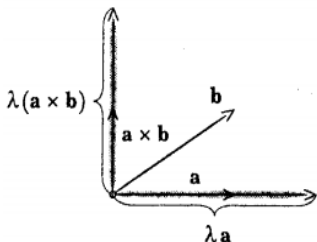


Рис. 24а

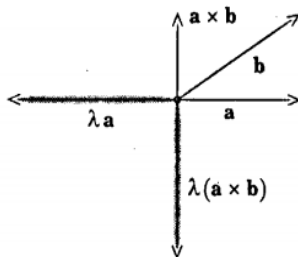


Рис. 24б

Аналогічно доводиться й рівність $\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

Наслідком даної властивості є можливість одночасного винесення скалярних множників у обох векторів-співмножників за знак векторного добутку:

$$(\lambda_1 \vec{a}) \times (\lambda_2 \vec{b}) = \lambda_1 \lambda_2 (\vec{a} \times \vec{b}).$$

5. *Векторний добуток вектора на суму двох інших векторів дорівнює сумі векторних добутків даного вектора на кожний з векторів доданків (дистрибутивність):*

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Нехай задані три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Розглянемо векторний добуток векторів $\vec{b}$ та $\vec{c}$, тобто $\vec{b} \times \vec{c}$.

Якщо вектор $\vec{b}$ векторно помножити на вектор $\vec{c}$, а вектор $\vec{a}$ також векторно помножити на векторний добуток $\vec{b} \times \vec{c}$, то отримаємо вектор $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$, який називається *подвійним векторним добутком*.

Для довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ справедливе співвідношення:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Приклад. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} - 2\vec{b}$ і $3\vec{a} + \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, а кут φ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 30° .

Розв'язування: Користуючись властивостями векторного добутку, маємо:

$$\begin{aligned} (\vec{a} - 2\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b}) &= 3(\vec{a} \times \vec{a}) + (\vec{a} \times \vec{b}) - 6(\vec{b} \times \vec{a}) - 2(\vec{b} \times \vec{b}) = \\ &= 3 \cdot 0 + (\vec{a} \times \vec{b}) + 6(\vec{a} \times \vec{b}) - 2 \cdot 0 = 7(\vec{a} \times \vec{b}). \end{aligned}$$

$$S = |7(\vec{a} \times \vec{b})| = 7|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin 30^\circ = 7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 7.$$

2. Векторний добуток векторів у координатній формі

Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані у просторі своїми координатами, тобто

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + \\ &+ a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + \\ &+ a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}). \end{aligned}$$

Користуючись означенням і властивостями векторного добутку, маємо:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j};$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}; \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}; \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j};$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = 0; \quad \vec{j} \times \vec{j} = 0; \quad \vec{k} \times \vec{k} = 0.$$

Ураховуючи дані вирази і групуючи відповідні члени рівності, одержимо:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}. \end{aligned}$$

Цю рівність зручно переписати у наступній операторній формі:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Таким чином, векторний добуток двох векторів у координатній формі є визначник, елементами першого рядка якого є координатні орти, а елементи другого та третього рядків – координати відповідно першого та другого векторів-співмножників.

Для випадку, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ розташовані на площині, наприклад $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ і $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$, векторний добуток двох векторів матиме вигляд:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & 0 \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Тобто, векторний добуток двох векторів, розташованих в одній з координатних площин, колінеарний координатній осі, яка перпендикулярна даній площині.

Приклад. Знайти векторний добуток векторів $\vec{a} = (1; 0; -\frac{1}{4})$ і $\vec{b} = (4; -12; -5)$.

Розв'язування: За формулою векторного добутку двох векторів у координатній формі маємо:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 4 & -12 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ -12 & -5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \vec{j} + \\ &+ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -12 \end{vmatrix} \vec{k} = -3\vec{i} + 4\vec{j} - 12\vec{k} \end{aligned}$$

або

$$\vec{c} = (-3; 4; -12).$$

3. Застосування векторного добутку

1. Встановлення колінеарності двох векторів

З властивості векторного добутку маємо: $\vec{a} \parallel \vec{b}$ тоді, коли $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, тобто

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \parallel \vec{b}$$

2. Обчислення площі паралелограма та трикутника, побудованого на двох векторах

Нехай задані точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$. Розглянемо вектори $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$. Згідно з означенням векторного добутку модуль векторного добутку $|\vec{AB} \times \vec{AC}|$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$, тобто

$$S_{\text{паралелограма}} = |\vec{AB} \times \vec{AC}|.$$

або у координатній формі

$$S_{\text{паралелограма}} = \text{mod} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix},$$

де *mod* означає модуль визначника.

Якщо потрібно знайти площу трикутника ABC , то вона дорівнює половині площі отриманого паралелограма, тобто

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|.$$

3. Визначення моменту сили відносно точки

Якщо на тіло закріплене в точці O діє сила $\vec{F}$, прикладена в точці A , то тіло обертається навколо осі l . Причому, моментом сили $\vec{F}$ відносно точки O називається вектор $\vec{M} = |\vec{F}| \cdot h$, де h – плече, тобто відстань від точки, відносно якої шукають момент сили до лінії дії сили (рис. 25).

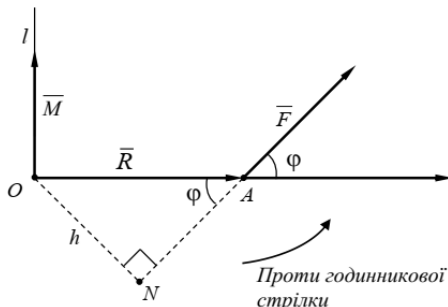


Рис. 25

Виразимо плече h через вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{R}$, де $\vec{R}$ – радіус-вектор точки A , в яку прикладена сила $\vec{F}$:

$$h = |\overrightarrow{OA}| \cdot \sin \varphi = |\vec{R}| \sin \varphi,$$

тоді

$$|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot |\vec{R}| \sin \varphi,$$

тобто

$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}.$$

Приклад. Знайти висоту паралелограма, проведену з вершини B до сторони AD , якщо вершини паралелограма знаходяться в точках: $A(2; -1; 1)$, $B(2; -6; 5)$, $C(-1; 3; 1)$, $D(-1; 8; -3)$.

Розв'язування: З формули $S_{ABCD} = h \cdot |\overrightarrow{AD}|$, знайдемо висоту паралелограма (рис. 26):

$$h = \frac{S_{ABCD}}{|\overrightarrow{AD}|}.$$

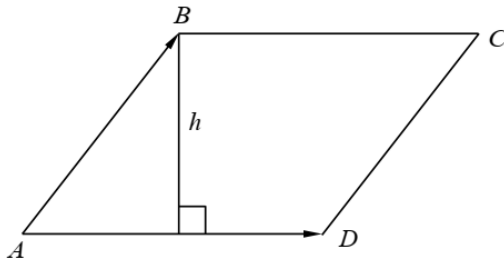


Рис. 26

Як відомо, $S_{ABCD} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$, тоді $h = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AD}|}$.

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} = (0; -5; 4); \overrightarrow{AD} = (-3; 9; -4).$$

Тоді їх векторний добуток рівний:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -5 & 4 \\ -3 & 9 & -4 \end{vmatrix} = -16\vec{i} - 12\vec{j} - 15\vec{k}.$$

Отже,

$$h = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AD}|} = \frac{\sqrt{(-16)^2 + (-12)^2 + (-15)^2}}{\sqrt{(-3)^2 + 9^2 + (-4)^2}} = \frac{\sqrt{625}}{\sqrt{106}} = \frac{25}{\sqrt{106}}.$$

4. Мішаний добуток векторів, його властивості та застосування

Нехай дано три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Помножимо векторно вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і отримаємо вектор: $\vec{a} \times \vec{b}$.

Скалярний добуток вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$ називається *векторно-скалярним* або *мішаним добутком векторів* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і позначається: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ або $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Мішаний добуток як результат скалярного множення векторів $\vec{a} \times \vec{b}$ і $\vec{c}$ є скалярною величиною (числом).

Геометричний зміст мішаного добутку трьох векторів: *мішаний добуток некопланарних векторів* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *дорівнює об'ємові паралелепіпеда, побудованого на цих векторах (віднесених до спільного початку), взятому зі знаком «+», якщо ця трійка векторів права, і зі знаком «-», якщо вектори утворюють ліву трійку:*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \pm V,$$

де V – об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Дійсно, розглянемо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, які утворюють праву трійку векторів (рис. 27).

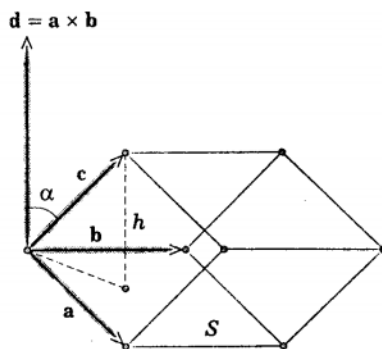


Рис. 27

Оскільки вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ є правою трійкою векторів, то, згідно з означенням векторного добутку, вектор $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ утворює з вектором $\vec{c}$ гострий кут.

Площа S основи паралелепіпеда дорівнює модулю векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$. Висота паралелепіпеда h дорівнює проекції вектора $\vec{c}$ на напрям вектора $\vec{d}$: $h = |\vec{c}| \cos \alpha$. Тому $V = S \cdot h = |\vec{d}| \cdot |\vec{c}| \cos \alpha$.

З іншого боку, мішаний добуток, згідно з його означенням, має те саме значення:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{c} = |\vec{d}| \cdot |\vec{c}| \cos \alpha.$$

Таким чином, для правої трійки векторів $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = V$.

Знак мішаного добутку збігається зі знаком $\cos \alpha$. Якщо α – тупий кут, тоді $\cos \alpha$ приймає від'ємне значення, тобто трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – ліва, тому $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -V$. Отже, $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \pm V$.

Користуючись мішаним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ можна обчислити об'єм трикутної піраміди (тетраедра), побудованої на тих же векторах. Об'єм трикутної піраміди дорівнює одній шостій об'єму паралелепіпеда, побудованого на ребрах, що збігаються в одній вершині, тобто:

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

Властивості мішаного добутку трьох векторів:

1. *Мішаний добуток не змінюється після циклічної перестановки векторів-співмножників, тобто:*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}.$$

Дійсно, після такої перестановки не змінюється ні об'єм побудованого на цих векторах паралелепіпеда, ні їхня взаємна орієнтація, через що їх мішаний добуток матиме ту саму величину й той самий знак.

2. *Мішаний добуток не змінюється, якщо поміняти місцями знаки векторного та скалярного добутків, тобто:*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Дійсно, якщо розглянути скалярний добуток двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b} \times \vec{c}$, то згідно з властивістю комутативності, матимемо:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a},$$

тоді, користуючись першою властивістю мішаного добутку, одержимо дане співвідношення.

3. *Після перестановки будь-яких двох векторів-співмножників мішаний добуток змінює знак на протилежний, тобто:*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b},$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c},$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}.$$

Дійсно, така перестановка рівнозначна перестановці векторів-співмножників у векторному добутку, що змінює його знак. Користуючись першою та другою властивостями мішаного добутку, маємо:

$$\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = -\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c},$$

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = -\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = -(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c},$$

$$\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) = -\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

4. Мішаний добуток трьох векторів дорівнює нулю, якщо:

а) хоча б один з перемножуваних векторів є нуль-вектором;

б) два з перемножуваних векторів колінеарні;

в) три перемножувані вектори компланарні.

Виконання всіх трьох пунктів цієї властивості впливає безпосередньо з умов перетворення на нуль скалярного й векторного добутків двох векторів та використання попередніх властивостей мішаного добутку. Через невизначеність напряму нуль-вектора всі пункти цієї властивості мішаного добутку можна об'єднати та сформулювати так: мішаний добуток трьох векторів дорівнює нулю, якщо ці вектори компланарні.

5. Мішаний добуток трьох векторів задовольняє закон дистрибутивності, тобто:

$$(\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{d})) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{a} \times \vec{d}) \cdot \vec{c},$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{d}.$$

Ця властивість виконується й у тому випадку, коли будь-який зі співмножників складається з будь-якої кількості векторів.

6. Мішаний добуток трьох векторів задовольняє закон асоціативності, тобто:

$$(\vec{a} \times (\lambda \vec{b})) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\lambda \vec{c}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Дану властивість можна перефразувати наступним чином: сталий множник будь-якого з векторів-співмножників можна виносити за знак мішаного добутку.

Мішаний добуток векторів у координатній формі

Нехай вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ задані у просторі своїми координатами, тобто

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}, \quad \vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= [(a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}] \cdot \\
 &\cdot (c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}) = (a_y b_z - a_z b_y)c_x - (a_x b_z - a_z b_x)c_y + \\
 &+ (a_x b_y - a_y b_x)c_z.
 \end{aligned}$$

Отже,

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Таким чином, мішаний добуток трьох векторів, записаний у координатній формі, дорівнює значенню визначника, складеного з координат векторів зі збереженням порядку.

Деякі застосування мішаного добутку векторів:

1. *Визначення орієнтації векторів у просторі.* Для трьох заданих векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$: якщо $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} > 0$, то вектори утворюють праву трійку; якщо $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} < 0$, то ці вектори утворюють ліву трійку.

2. *Умова компланарності векторів.* Три ненульових вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$, тобто

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

3. *Знаходження об'ємів паралелепіпеда та трикутної піраміди:*

Нехай задано чотири точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, $M_4(x_4; y_4; z_4)$. Тоді

$$\vec{a} = \overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1),$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{M_1 M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1),$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{M_1 M_4} = (x_4 - x_1; y_4 - y_1; z_4 - z_1).$$

Якщо на цих векторах, як на ребрах, що збігаються в одній вершині, побудувати паралелепіпед, то його об'єм буде дорівнювати абсолютній величині мішаного добутку даних векторів, тобто:

$$V_{\text{паралелепіпеда}} = \text{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Об'єм піраміди відповідно буде дорівнювати:

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6} \text{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Приклад. Довести, що точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$ і $D(2; 1; 3)$ лежать в одній площині.

Розв'язування: Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} = (-1; -1; 6), \overrightarrow{AC} = (-2; 0; 2), \overrightarrow{AD} = (1; -1; 4).$$

Мішаний добуток

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -2 + 12 - 2 - 8 = 0.$$

Отже, вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$ – компланарні, а тому точки A , B , C і D лежать в одній площині.

Приклад. Дано вершини трикутної піраміди $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(-5; -4; 8)$. Знайти об'єм піраміди і довжину висоти h , опущеної з вершини D .

Розв'язування: Об'єм піраміди можна знайти за формулою $V = \frac{S_{\text{осн}} \cdot h}{3}$, звідки

$$h = \frac{3V}{S_{\text{осн}}}.$$

Складемо три вектори, які мають спільний початок: $\overrightarrow{AB} = (2; -2; -3)$, $\overrightarrow{AC} = (4; 0; 6)$, $\overrightarrow{AD} = (-7; -7; 7)$.

Тоді з властивостей векторного добутку маємо:

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = \\ &= -12 \vec{i} - 24 \vec{j} + 8 \vec{k}, \end{aligned}$$

тоді

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = 28.$$

$$\text{Отже, } S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14.$$

Об'єм піраміди:

$$\begin{aligned} V_{\text{піраміди}} &= \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{6} \cdot (84 + 84 + 84 + 56) = \frac{154}{3} = 51 \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$h = \frac{3V}{S_{\text{осн}}} = \frac{3 \cdot \frac{154}{3}}{14} = 11.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 10$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$.
2. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB} = 6\vec{a} - 3\vec{b}$ і $\overrightarrow{AC} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{6}$.

3. Задано вектори $\vec{a} = (1; 0; -2)$, $\vec{b} = (0; 1; 1)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$ і $\vec{d} = (-1; 2; 0)$. Обчислити:

а) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{d} - \vec{c})$;

б) $(\vec{a} - \vec{b}) \times (3\vec{c} + 2\vec{d})$.

4. Дано вершини трикутника $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$. Обчислити довжину висоти, опущеної з вершини B на сторону AC .

5. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$.

6. Знайти вектор $\vec{x}$, який перпендикулярний до вектора $\vec{a} = (2; -3; -1)$ та до вектора $\vec{b} = (1; -2; 3)$ і задовольняє умову $\vec{x} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.

7. Обчислити висоту паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

8. Перевірити, чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, якщо $\vec{a} = (3; 2; 2)$, $\vec{b} = (2; -1; 3)$, $\vec{c} = (8; 3; 7)$.

9. Довести, що чотири точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$ належать одній площині.

10. На векторах $\vec{a} = (3; 2; 0)$, $\vec{b} = (2; 3; 0)$, $\vec{c} = (1; 2; 3)$ побудований паралелепіпед. Обчислити його об'єм V , площу грані S , утворену векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, і висоту h , проведену на цю грань.

Питання для самоперевірки

1. Що називають векторним добутком двох векторів?
2. Які основні властивості векторного добутку?
3. Як знайти векторний добуток за відомими координатами векторів?
4. Який геометричний зміст модуля векторного добутку?
5. Що називають мішаним добутком трьох векторів?
6. Який геометричний зміст модуля мішаного добутку?
7. Як знайти мішаний добуток за заданими координатами векторів?
8. Які основні властивості мішаного добутку?

РОЗДІЛ 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ ТА В ПРОСТОРИ

3.1. Пряма на площині

1. Лінія на площині та її рівняння

Рівнянням лінії L в декартовій системі координат на площині називається рівняння

$$F(x, y) = 0,$$

яке задовольняють координати x і y кожної точки цієї лінії і не задовольняють координати жодної точки, яка не лежить на цій лінії.

Як зрозуміло з означення, сама лінія L розглядається як множина точок, координати x , y яких задовольняють рівняння лінії.

Дане рівняння має безліч розв'язків, тобто безліч пар значень x і y , які задовольняють це рівняння. Кожній такій парі відповідає точка на площині. Проте, якщо обмежитись лише дійсними розв'язками, то рівняння лінії може мати їх безліч, скінченну кількість або не мати жодного розв'язку. В останньому випадку кажуть, що таке рівняння визначає уявну лінію. Наприклад, рівняння $x^2 + 2y^2 = 0$ визначає тільки одну точку $O(0; 0)$, тому що це єдина пара чисел, які задовольняють дане рівняння. Рівняння $x^2 + 2y^2 + 7 = 0$ не має жодного дійсного розв'язку, тобто воно визначає уявну лінію.

Часто доводиться розв'язувати таку задачу: дано рівняння двох ліній:

$$F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0.$$

Знайти точки їх перетину.

Шукані точки, якщо вони існують, належать обом лініям. Тому їх координати повинні задовольняти рівняння обох ліній. Отже, щоб знайти координати всіх точок перетину, треба розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

Якщо дана система не має дійсних розв'язків, то лінії, задані цими рівняннями, не перетинаються.

Криву на площині можна задавати за допомогою двох рівнянь:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in T, \end{cases}$$

де x та y – координати довільної точки $M(x, y)$ кривої, а t – змінна, що називається параметром і пробігає множину значень T . Параметр t визначає положення кожної точки $M(x, y)$ кривої на площині Oxy . Таке задання кривої на площині називається *параметричним*.

Лінію на площині можна задати також *векторним* рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(t)$, де t – скалярний параметр. Кожному значенню параметра t_0 відповідає радіус-вектор $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$. При зміні значення параметра t , кінець радіус-вектора буде описувати на площині криву (рис. 28).

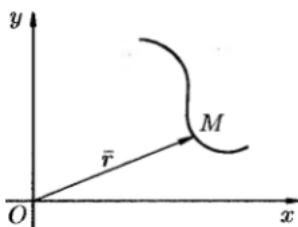


Рис. 28

Векторному рівнянню лінії $\vec{r} = \vec{r}(t)$ у системі координат Oxy відповідають два скалярних рівняння, тобто рівняння проєкцій на осі координат векторного рівняння лінії є її параметричні рівняння.

Векторне рівняння кривої та її параметричні рівняння мають механічний зміст. Якщо точка рухається на площині, то вказані рівняння називаються рівняннями руху, а крива – траєкторією точки. При цьому параметр t – це час.

Якщо на площині задана полярна система координат, то рівняння кривої можна задати у полярній системі координат. Рівняння виду $f(r, \varphi) = 0$ називається *рівнянням даної кривої у полярній системі координат*, якщо всі точки $M(r, \varphi)$ кривої задовольняють це рівняння.

Отже, кожній кривій на площині відповідає рівняння $F(x, y) = 0$, і навпаки, кожному рівнянню $F(x, y) = 0$ відповідає якась крива на площині, властивості якої визначаються її рівнянням.

Задання ліній за допомогою їх рівнянь, приводить до класифікації ліній залежно від властивостей цих рівнянь. Усі лінії розподіляють на *алгебраїчні* й *трансцендентні*.

Алгебраїчною лінією називається така лінія, яка зображується в декартових координатах алгебраїчним рівнянням:

$$F(x, y) = 0,$$

де $F(x, y)$ є многочлен від змінних x і y .

Степінь многочлена $F(x, y)$, що знаходиться у лівій частині рівняння алгебраїчної лінії, називається *порядком* лінії. Прикладами алгебраїчних ліній є лінії, задані рівняннями:

$$x + y - 1 = 0, \quad x^2 + y^2 - 4 = 0, \quad x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

Лінії, які не є алгебраїчними, називаються *трансцендентними*. Прикладами трансцендентних ліній можуть бути лінії:

$$5^{xy} + x - y = 0, \quad y - \operatorname{tg} x = 0, \quad y = \log_a x.$$

Алгебраїчна лінія залишається алгебраїчною в кожній декартовій системі координат, причому при перетворенні координат порядок її теж не змінюється. Тому доцільно класифікувати алгебраїчні лінії залежно від порядку їх рівнянь.

В аналітичній геометрії вивчаються алгебраїчні лінії і притому лише першого і другого порядків, тобто лінії, які в декартовій системі зображуються рівняннями:

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0$$

і

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Таким чином, лінію на площині можна задати геометрично як сукупність точок з певними геометричними властивостями і аналітично – за допомогою рівняння. У зв'язку з цим виникають дві типи для аналітичної геометрії задачі: скласти рівняння лінії, яка задана геометрично, і навпаки, встановити геометричний образ лінії, заданої аналітично.

Приклад.

1. Рівняння $y = 2x - 1$ визначає на площині пряму лінію.
2. Рівняння $x^2 - y^2 = 0$ або $(x + y)(x - y) = 0$ визначають дві прямі – бісектриси координатних кутів.
3. Рівняння $x^2 + y^2 = 0$ задовольняє лише одна точка $O(0; 0)$.
4. Рівняння $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не визначає ніякого геометричного місця точок, оскільки для будь-яких значень x і y маємо $x^2 + y^2 + 1 > 0$.

2. Пряма на площині. Різні види рівнянь прямої на площині

Найпростішою лінією на площині є пряма. Вона задається алгебраїчним рівнянням першого порядку відносно змінних x і y . Розглянемо різні види її рівняння.

Канонічне і параметричне рівняння прямої

Положення прямої на площині відносно системи координат можна задати будь-якою точкою $M_0(x_0, y_0)$, що належить цій прямій, і напрямком прямої, тобто вектором $\vec{s} = (m; n)$, колінеарним цій прямій (рис. 29). Ненульовий вектор $\vec{s}$, який паралельний прямій, називається *напрямним вектором прямої*.

Через точку $M_0(x_0, y_0)$ можна провести одну і тільки одну пряму, паралельну вектору $\vec{s}$. Складемо її рівняння.

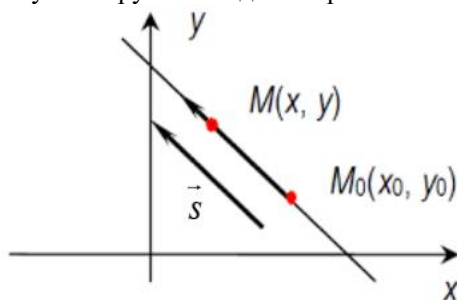


Рис. 29

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка прямої. Тоді вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ колінеарний вектору $\vec{s} = (m; n)$, тобто координати цих векторів пропорційні:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

Останнє співвідношення називають *канонічним* рівнянням прямої на площині. Запишемо канонічне рівняння прямої у вигляді

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = t,$$

де $t \in \mathbb{R}$ – параметр, то тримаємо *параметричне* рівняння прямої на площині:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt \end{cases}$$

Нехай пряма на площині проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно до осі Ox , тоді $\vec{s} = (m; 0)$. З рівняння $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{0}$ отримаємо рівняння цієї прямої $y - y_0 = 0$. Аналогічно $x = x_0$ – рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно до осі Oy .

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай пряма задана точкою $M_0(x_0, y_0)$ і кутом α , який вона утворює з додатним напрямком осі Ox (рис. 30). Її канонічне рівняння $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}$, якщо $m \neq 0$, можна записати у вигляді

$$y - y_0 = \frac{n}{m} (x - x_0).$$

Позначивши $\frac{n}{m} = k$, отримаємо *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$* :

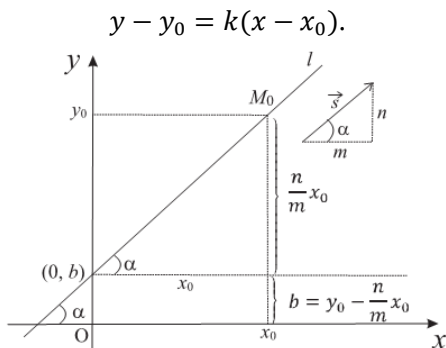


Рис. 30

Оскільки $m = \text{пр}_{Ox}\vec{s} = |\vec{s}| \cos \alpha$, $n = \text{пр}_{Oy}\vec{s} = |\vec{s}| \sin \alpha$, то тримаємо, що $\frac{n}{m} = \text{tg } \alpha = k$.

Якщо прийняти, що $y_0 - kx_0 = b$, то отримаємо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:

$$y = kx + b.$$

Число $\text{tg } \alpha = k$, тобто тангенс кута α нахилу прямої до додатного напрямку осі Ox , називається *кутовим коефіцієнтом* прямої. Величина b є *ординатою* точки перетину прямої з віссю Oy .

Якщо пряма проходить через початок координат, то $b = 0$, тоді рівняння набуває вигляду $y = kx$. Якщо пряма паралельна осі Ox , то $\alpha = 0$, а отже $y = b$. Якщо пряма паралельна осі Oy , то $\alpha = \frac{\pi}{2}$, і кутовий коефіцієнт k не існує. В цьому випадку рівняння прямої буде мати вигляд: $x = a$, де a – абсциса точки перетину прямої з віссю Ox .

Приклад. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $A(4; -2)$ під кутом 135° до додатного напрямку осі Ox .

Розв'язування: Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Знаходимо число $k = \text{tg } \alpha = \text{tg } 135^\circ = -1$ і, підставляючи в рівняння координати точки $A(4; -2)$, отримаємо:

$$y + 2 = -1(x - 4)$$

або

$$y = 2 - x.$$

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай пряма проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$. Розглянемо довільну точку $M(x, y)$ прямої. Складемо два вектори $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1)$ та $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Очевидно, вектори $\overrightarrow{M_1M}$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$ колінеарні, а звідси випливає, що їх координати пропорційні, тому

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Отже, отримали рівняння прямої, що проходить через дві точки.

Приклад. Через точки $M_1(-1, 2)$ і $M_2(2, 3)$ проведена пряма. Знайти точки перетину цієї прямої з осями координат.

Розв'язування: Згідно із рівняння прямої, що проходить через дві точки, маємо:

$$\frac{x+1}{2+1} = \frac{y-2}{3-2} \quad \text{або} \quad \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1},$$

тобто

$$3(y - 2) = x + 1,$$

звідси

$$y = \frac{x}{3} + \frac{7}{3}.$$

Точка перетину отриманої прямої з віссю Ox має координати: $y = 0$, $x = -7$, а з віссю Oy : $x = 0$, $y = \frac{7}{3}$. Отже, маємо дві точки $(0, \frac{7}{3})$ і $(-7, 0)$, які і є шуканими.

Рівняння прямої «у відрізках»

Нехай пряма перетинає вісь Ox у точці $M_1(a, 0)$, а вісь Oy – у точці $M_2(0, b)$ (рис. 31).

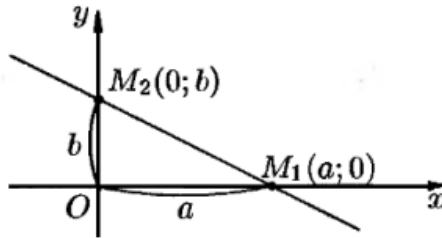


Рис. 31

Тоді рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(a, 0)$ і $M_2(0, b)$ приймає вигляд:

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0},$$

тобто

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Це рівняння називається *рівнянням прямої «у відрізках»*, оскільки числа a та b показують, які відрізки відтинає пряма від координатних осей.

Приклад. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1, 1)$ і відтинає від координатного кута трикутник, площа якого дорівнює 2 кв. од.

Розв'язування: Запишемо рівняння шуканої прямої «у відрізках»:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Нам потрібно знайти значення параметрів a і b . Точка $M_0(1, 1)$ лежить на шуканій прямій, тому її координати задовольняють рівняння прямої, тобто

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a + b = ab$$

Площа S трикутника, який відтинає від координатного кута пряма, визначається формулою $S = \pm \frac{1}{2}ab$ (+ S , якщо a і b одного знаку, і $-S$, якщо різних знаків. Згідно з умовою задачі маємо:

$$ab = 2S = \pm 4.$$

Для знаходження значень a і b отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a + b = ab \\ ab = \pm 4 \end{cases},$$

яка рівносильна двом системам

$$\begin{cases} a + b = ab \\ ab = 4 \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} a + b = ab \\ ab = -4 \end{cases}.$$

Розв'язками одержаних систем є: $a_1 = 2, \quad b_1 = 2;$
 $a_2 = -2 + 2\sqrt{2}, \quad b_2 = -2 - 2\sqrt{2}; \quad a_3 = -2 - 2\sqrt{2}, \quad b_3 = -2 + 2\sqrt{2}.$

Отже, умові задачі задовольняють три прямі, рівняння яких отримаємо, якщо замість a і b підставимо знайдені значення. Рівняння шуканих прямих мають вигляд:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1, \quad \frac{x}{-2+2\sqrt{2}} + \frac{y}{-2-2\sqrt{2}} = 1, \quad \frac{x}{-2-2\sqrt{2}} + \frac{y}{-2+2\sqrt{2}} = 1.$$

Після спрощення цих рівнянь отримаємо:

$$\begin{aligned} x + y &= 2, & (1 + \sqrt{2})x + (1 - \sqrt{2})y &= 2, \\ (1 - \sqrt{2})x + (1 + \sqrt{2})y &= 2. \end{aligned}$$

Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора

Нехай на площині Oxy задані ненульовий вектор $\vec{n} = (A; B)$ і точка $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 32). Потрібно скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\vec{n}$. Для цього розглянемо на прямій довільну точку $M(x, y)$ і складемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$.

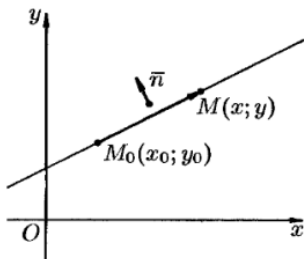


Рис. 32

Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M}$ та $\vec{n}$ перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Рівняння називається *рівнянням прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно до даного ненульового вектора*. Вектор $\vec{n} = (A; B)$ називається *нормальним вектором прямої*.

Приклад. Скласти рівняння прямої, якщо точка $M_0(2, 3)$ є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на цю пряму.

Розв'язування: Оскільки точка $M_0(2,3)$ є основою перпендикуляра, який опущений з початку координат на шукану пряму, то нормальний вектор $\vec{n} = \overrightarrow{OM_0} = (2; 3)$. Нехай $M(x, y)$ – довільна точка прямої, тоді вектор $\vec{n}$ перпендикулярний до вектора $\overrightarrow{M_0M} = (x - 2; y - 3)$, тобто їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$$2(x - 2) + 3(y - 3) = 0 \quad \text{або} \quad 2x + 3y - 13 = 0.$$

Загальне рівняння прямої

У рівнянні прямої $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ введемо позначення $C = -Ax_0 - By_0$, у результаті отримаємо рівняння:

$$Ax + By + C = 0,$$

яке називається *загальним рівнянням* прямої.

Від загального рівняння легко перейти до рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Дійсно, якщо $B \neq 0$, то загальне рівняння можна записати наступним чином: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, а це рівняння з кутовим коефіцієнтом $k = -\frac{A}{B}$.

Дослідимо, як розміщена пряма відносно координатної системи, коли загальне рівняння неповне, тобто деякі його коефіцієнти дорівнюють нулю. Тоді можливо такі випадки:

1. Якщо $A = 0$, то рівняння набуває вигляду $By + C = 0$, звідки $y = -\frac{C}{B}$, тобто пряма паралельна осі Ox .

2. Якщо $B = 0$, то рівняння $Ax + C = 0$, звідки $x = -\frac{C}{A}$, тобто пряма паралельна осі Oy .

3. Якщо $C = 0$, то $Ax + By = 0$, тобто пряма проходить через початок координат $O(0,0)$.

4. Якщо $A = C = 0$, то рівняння $By = 0$ або $y = 0$ визначає вісь Ox .

5. Якщо $B = C = 0$, то рівняння $Ax = 0$ або $x = 0$ визначає вісь Oy .

Нормальне рівняння прямої

Нехай на площині задано пряму. Припустимо, що відомий кут α , який утворює перпендикуляр, опущений з початку координат $O(0;0)$ на цю пряму, та довжина цього перпендикуляра ρ ($\rho \geq 0$), тобто відстань від початку координат до прямої (рис. 33). Ці два

параметри однозначно визначають розташування прямої на площині. Знайдемо рівняння цієї прямої.

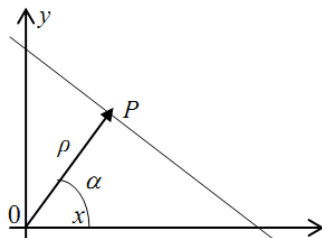


Рис. 33

Нехай точка P є основою перпендикуляра, опущеного з точки $O(0; 0)$ на пряму. Тоді вектор $\overrightarrow{OP} = (\rho \cos \alpha; \rho \sin \alpha)$, і точка P має координати $P(\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha)$. Запишемо рівняння прямої, яка проходить через точку P перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{OP}$ – вектора нормалі:

$$\rho \cos \alpha \cdot (x - \rho \cos \alpha) + \rho \sin \alpha \cdot (y - \rho \sin \alpha) = 0.$$

Після спрощення отримаємо *нормальне рівняння прямої*:

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha - \rho = 0.$$

Розглянемо, як із загального рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ можна перейти до нормального рівняння. Помножимо рівняння $Ax + By + C = 0$ на $\lambda = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, якщо $C < 0$, і на $\lambda = \frac{-1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, якщо $C > 0$. Множник $\lambda = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ називається *нормуючим множником*.

Позначивши, $\lambda C = -\rho$, отримаємо рівняння:

$$(\lambda A)x + (\lambda B)y - \rho = 0.$$

Оскільки $(\lambda A)^2 + (\lambda B)^2 = 1$, то числа λA та λB є відповідно косинусом та синусом одного і того самого кута. Враховуючи, що $\lambda A = \cos \alpha$ і $\lambda B = \sin \alpha$, тоді рівняння прямої набуває вигляду:

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha - \rho = 0.$$

Приклад. Звести загальне рівняння прямої $-3x + 4y + 15 = 0$ до нормального.

Розв'язування: Оскільки $C = 15 > 0$, то нормуючим множителем буде число $\lambda = \frac{-1}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = -\frac{1}{5}$. Помноживши загальне рівняння на нормуючий множник, отримаємо шукане рівняння:

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0.$$

Отже, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$, а відстань від початку координат до прямої дорівнює $\rho = 3$.

3. Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих

Кут між двома прямими

Дві прямі можна задати загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

або канонічними

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1}, \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2},$$

або рівняннями з кутовим коефіцієнтом

$$y = k_1x + b_1, \quad y = k_2x + b_2.$$

Відповідно до цього маємо задані вектори нормалей $\vec{n}_1 = (A_1; B_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$, напрямні вектори $\vec{s}_1 = (m_1; n_1)$ і $\vec{s}_2 = (m_2; n_2)$ та кутові коефіцієнти k_1 і k_2 .

Кут φ між двома прямими дорівнює кутів між їх нормаллями або напрямними векторами.

Отже, матимемо:

$$\cos \varphi = \cos(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}};$$

або

$$\cos \varphi = \cos(\widehat{\vec{s}_1, \vec{s}_2}) = \frac{m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}.$$

Якщо прямі задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом, то $k_1 = \alpha_1, k_2 = \alpha_2$, де α_1 і α_2 – кути нахилу прямих до осі Ox (рис. 34).

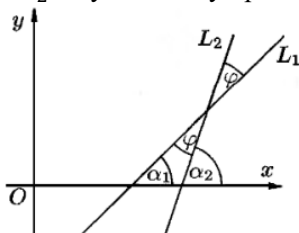


Рис. 34

Оскільки $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, тоді

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Якщо φ – кут між прямим, то $\pi - \varphi$ також є кутом між ними. Тоді значення $\cos \varphi$ і $\operatorname{tg} \varphi$ може бути додатним або від'ємним, тобто одне з них відповідає кутові φ , а друге – $\pi - \varphi$.

Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих

Паралельність або перпендикулярність двох прямих рівнозначна паралельності та перпендикулярності їх нормальних або напрямних векторів. Тому відповідно до вигляду рівнянь, якими задані ці прямі, отримаємо:

умови паралельності:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}, \quad k_1 = k_2 \quad (\varphi = 0, \operatorname{tg} \varphi = 0),$$

умови перпендикулярності:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0; \quad m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0;$$

$$1 + k_1 k_2 = 0 \quad \text{або} \quad k_2 = -\frac{1}{k_1} \quad (\varphi = \frac{\pi}{2}, \operatorname{ctg} \varphi = 0).$$

Приклад. Дослідити взаємне розміщення прямих $-2x + y - 1 = 0$ і $2y + 1 = 0$. Якщо прямі перетинаються, знайти точку перетину і кут між ними.

Розв'язування: Кутовий коефіцієнт першої прямої $k_1 = 2$, другої прямої $-k_2 = 0$. Оскільки $k_1 \neq k_2$, то прямі перетинаються. Для знаходження точки перетину прямих розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -2x + y - 1 = 0, \\ 2y + 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язком системи є: $x = -\frac{3}{4}$, $y = -\frac{1}{2}$. Отже, точка перетину прямих $M(-\frac{3}{4}; -\frac{1}{2})$.

Для обчислення кута між прямими використаємо формулу:

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{(-2) \cdot 0 + 1 \cdot 2}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Звідси } \varphi = \arccos \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

4. Відстань від точки до прямої

Нехай пряма L задана своїм загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$, і задана деяка точка площини $M_0(x_0, y_0)$. Знайдемо відстань від точки M_0 до прямої L (рис. 35).

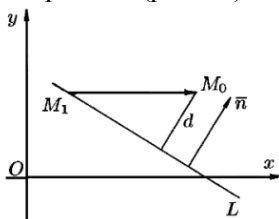


Рис. 35

Відстань d від точки M_0 до прямої L дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1 M_0}$ на напрям її нормального вектора $\vec{n} = (A, B)$, де точка $M_1(x_1, y_1)$ – довільна точка прямої.

Таким чином

$$d = |\text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1 M_0}| = \left| \frac{\overrightarrow{M_1 M_0} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \left| \frac{(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Оскільки точка $M_1(x_1, y_1)$ належить прямій L , тоді $-Ax_1 - By_1 = C$. Тому формула відстані від точки до прямої матиме вигляд:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Приклад. Дано трикутник ABC , де $A(1; 2)$, $B(2; -2)$, $C(6; 1)$. Обчислити довжину висоти CD .

Розв'язування: Запишемо рівняння сторони AB , використавши формулу рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{-2-2} \quad \text{або} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-4}.$$

Звідси, рівняння сторони AB має вигляд $4x + y - 6 = 0$.

Обчислимо довжину висоти CD . Для цього достатньо знайти відстань від точки $C(6; 1)$ до прямої AB :

$$d = \frac{|4 \cdot 6 + 1 \cdot 1 - 6|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{19}{\sqrt{17}}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Написати загальне рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1; -2)$ паралельно прямій $2x - y + 1 = 0$. Знайти точки перетину її з координатними осями.

2. Знайти кутовий коефіцієнт k прямої L і відрізок b , який вона відтинає на осі Oy , якщо задано:

а) $M_1(1; -2)$, $M_2(0; 1)$, $M_1 \in L$, $M_2 \in L$;

б) $x = 1 - t$, $y = 3 + 2t$;

в) $5x - 2y + 1 = 0$;

г) $M_0(1; -3) \in L$, $\vec{n} = -\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{n} \perp L$.

3. Привести загальне рівняння прямої до нормального вигляду:

а) $4x - 3y - 10 = 0$;

б) $x + 2 = 0$;

в) $-12x + 5y + 13 = 0$.

Визначити відстань ρ від початку координат до кожної із заданих прямих.

4. Знайти відстань від точки $A(2; -5)$ до прямої $x - 2y - 7 = 0$.

5. Визначити, при яких значеннях a і b прямі $ax - 2y - 1 = 0$ та $6x - 4y - b = 0$

- а) мають спільну точку;
- б) паралельні;
- в) збігаються;
- г) перпендикулярні.

6. Знайти проекцію точки $P(-6; 4)$ на пряму $4x - 5y + 3 = 0$.

7. Задані вершини трикутника $A(-10; -13)$, $B(-2; 3)$, $C(2; 1)$. Знайти довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, проведену з вершини C .

8. Відомі рівняння двох сторін прямокутника $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ і одна з його вершин $A(2; -3)$. Скласти рівняння двох інших сторін прямокутника.

9. Пряма проходить через точку $M(4; -3)$ й утворює з координатними осями трикутник, площа якого дорівнює 3. Скласти рівняння цієї прямої.

10. Знайти точку Q , симетричну точці $P(-5; 13)$ відносно прямої $2x - 3y - 3 = 0$.

11. Знайдіть кут між прямими:

- а) $-x + 5y + 1 = 0$, $2x + 3y + 7 = 0$;
- б) $3x - y + 5 = 0$, $2x + y - 7 = 0$;
- в) $\sqrt{3}x + \sqrt{2}y - 1 = 0$, $\sqrt{6}x - 3y + 2 = 0$.

12. Задано рівняння двох суміжних сторін паралелограма $x - y - 1 = 0$, $x - 2y = 0$ і точка $O(3; -1)$ перетину його діагоналей. Написати рівняння двох інших його сторін.

Питання для самоперевірки

- 1. Дайте визначення рівняння лінії на площині.
- 2. Напишіть рівняння лінії в декартовій системі координат на площині.
- 3. Запишіть рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Який геометричний зміст у ньому мають коефіцієнти k і b ?
- 4. Запишіть рівняння прямої, що проходить через дану точку в даному напрямі. Яким чином у даному рівнянні визначається напрям прямої?
- 5. Запишіть рівняння прямої, що проходить через дві дані точки.
- 6. За якою формулою визначається кутовий коефіцієнт цієї прямої?

7. Запишіть загальне рівняння прямої. Які координати має нормальний вектор цієї прямої?
8. Запишіть рівняння прямої у відрізках. Який геометричний зміст мають коефіцієнти, що входять у це рівняння?
9. Запишіть канонічне рівняння прямої. Як визначаються координати напрямного вектора цієї прямої?
10. Запишіть параметричне рівняння прямої. Яке фізичне тлумачення має це рівняння, якщо параметр є час?
11. Нормальне рівняння прямої. Який геометричний зміст мають коефіцієнти, що входять у дане рівняння?
12. Запишіть формулу обчислення кута між двома прямими, якщо їх задано рівняннями з кутовими коефіцієнтами. Як виражаються умови паралельності, перпендикулярності цих прямих?
13. Запишіть формулу обчислення кута між двома прямими, якщо їх задано рівняннями загального вигляду. Як виражаються умови паралельності, перпендикулярності цих прямих?
14. Запишіть формулу обчислення кута між двома прямими, якщо їх задано рівняннями канонічного виду. Як виражаються умови паралельності, перпендикулярності цих прямих?
15. Відстань точки до прямої. Наведіть формулу обчислення відстані від точки до прямої.

3.2. Лінії другого порядку

1. Загальне рівняння кривої другого порядку

Кривою другого порядку на площині називається сукупність точок (геометричне місце точок), які в деякій декартовій системі координат Oxy задовольняють алгебраїчне рівняння другого порядку:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

де A, B, C, D, E, F – дійсні числа, причому принаймні одне з чисел A, B, C не дорівнює нулю.

До кривих другого порядку належать: коло, еліпс, гіпербола, парабола. Виявляється, що множиною точок (x, y) з дійсними координатами, які задовольняють це рівняння, може бути не тільки одна з названих ліній. Рівняння другого порядку може визначати на площині Oxy також дві прямі, одну пряму, точку.

Лінії другого порядку називають також канонічними перерізами через те, що їх можна отримати як лінії перетину кругового конуса з площиною. Коло утворюється як лінія перетину з площиною, яка перпендикулярна до осі конуса і не проходить через його вершину; еліпс – лінія перетину з площиною, яка перетинає всі твірні конуса, не перпендикулярна до осі конуса і не проходить через його вершину; якщо перетнути конус площиною, паралельною до двох твірних, одержимо гіперболу, а до однієї твірної – параболу (рис. 36).

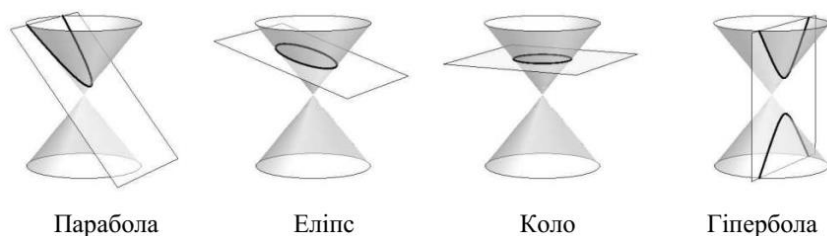


Рис. 36

2. Коло

Колом називають геометричне місце точок площини, рівновіддалених від деякої фіксованої точки, яку називають центром кола. Відстань від центра кола до будь-якої його точки називають *радіусом кола* і позначають R .

Нехай дано коло радіуса R з центром у точці $O_1(a, b)$ (рис. 37).

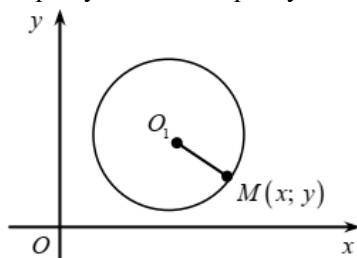


Рис. 37

Для довільної точки кола $M(x, y)$ виконується рівність $OM = R$. Використовуючи формулу відстані між двома точками, маємо: $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = R$ або після піднесення до квадрату одержимо рівносильне рівняння:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

яке називається *канонічним рівнянням кола*. Отже, координати кожної точки кола $M(x, y)$ задовольняють рівняння.

Якщо в даному рівнянні розкрити дужки, то одержимо *загальне рівняння кола*:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,$$

де $A = -2a$, $B = -2b$, $C = a^2 + b^2 - R^2$.

Якщо центр кола є початком координат, то його рівняння запишеться у вигляді:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Отже, рівняння кола – це рівняння другого степеня відносно x та y , в якому коефіцієнти при x^2 і y^2 рівні між собою, а доданок з добутком xy відсутній.

Приклад. Звести до канонічного вигляду загальне рівняння кола

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 23 = 0.$$

Розв'язування: У даному рівнянні згрупуємо члени, які містять тільки x або тільки y , і доповнимо їх до повного квадрату. Одержимо рівняння:

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 36.$$

Звідси, точка $O_1(-2, 3)$ – центр кола, а радіус $R = 6$.

3. Еліпс, його канонічне рівняння

Еліпсом називається геометричне місце точок площини, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок (фокусів), є величина стала.

Нехай F_1 і F_2 – фокуси еліпса, $M(x, y)$ – його довільна точка. Відрізки $r_1 = |F_1M|$ і $r_2 = |F_2M|$ називаються фокальними радіусами точки M еліпса. Їх суму позначимо через $2a$, тоді за означенням

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a.$$

Відстань між фокусами еліпса позначимо через $2c$, тобто $|F_1F_2| = 2c$. Очевидно, що $|F_1M| + |F_2M| > |F_1F_2|$, тобто $2a > 2c$, $a > c$.

Розглянемо на площині таку декартову прямокутну систему координат Oxy , що вісь Ox проходить через фокуси F_1 і F_2 , а точка O є серединою відрізка F_1F_2 (рис. 38). Відповідно фокуси матимуть такі координати: $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

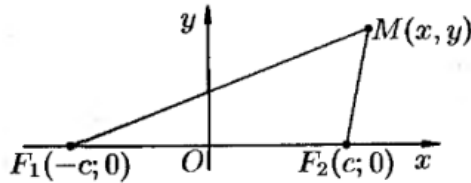


Рис. 38

Оскільки, $|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $|F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, тоді

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

яке і є рівнянням еліпса. Для зручності спростимо це рівняння, у результаті отримаємо:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

За означенням еліпса $a > c$, тому, покладаючи $a^2 - c^2 = b^2$, маємо

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Поділивши обидві частини цієї рівності на a^2b^2 , отримаємо

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Це рівняння називають *канонічним рівнянням еліпса*. Оскільки рівняння є алгебраїчним рівнянням другого степеня, то еліпс є кривою другого порядку.

Якщо $a = b$, то рівняння еліпса набуває вигляд:

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

тобто є рівнянням кола з центром у початку координат та радіусом $R = a$.

Дослідження форми еліпса

Дослідимо за канонічним рівнянням $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ форму та розташування еліпса. Кожен із додатних доданків лівої частини рівняння не більший за значенням від правої частини рівняння, тому для всіх точок еліпса

$$x^2 \leq a^2, \quad y^2 \leq b^2,$$

або

$$-a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b,$$

тобто всі точки еліпса знаходяться всередині прямокутника, сторони якого паралельні осям і мають довжини, що дорівнюють відповідно $2a$ і $2b$.

Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$, в яких еліпс перетинає осі координат, називаються вершинами еліпса.

Якщо будь-які значення (x, y) задовольняють канонічне рівняння, то це рівняння будуть задовольняти і значення: $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$, тому що координати в рівняння еліпса входять в парних степенях. Це означає, що координатні осі є осями симетрії, а початок координат – центром симетрії еліпса. Величини $2a$ і $2b$ називають довжинами осей еліпса; a – великою піввіссю, b – малою піввіссю ($a > b$).

Розв'яжемо рівняння еліпса відносно y : $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$. Зважаючи на симетрію еліпса, достатньо дослідити його форму в першій чверті. Для цього в останній рівності потрібно взяти знак плюс, тобто $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$. Нехай $x \geq 0$, тоді: якщо $x = 0$, маємо $y = b$, тоді точка $B_1(0, b)$ лежить на еліпсі; якщо x зростає від 0 до a , то y спадає від b до 0; якщо $x = a$, $y = 0$, тобто точка $A_2(a, 0)$ лежить на еліпсі.

Враховуючи наведені вище міркування, будемо схематично еліпс (рис. 39).

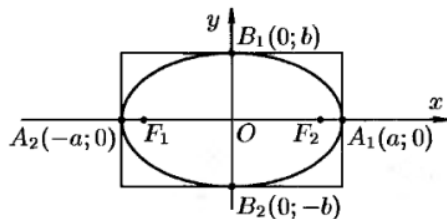


Рис. 39

Відношення половини відстані між фокусами до більшої півосі називається *ексцентриситетом* еліпса:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Зауважимо, що для еліпса $\varepsilon < 1$. Ексцентриситет еліпса дорівнює нулю, якщо фокуси його збігаються, тобто еліпс перетворюється в коло ($b^2 = a^2 - c^2$, $c = 0$, $a = b$).

Ексцентриситет характеризує форму еліпса. Запишемо формулу ексцентриситету наступним чином:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

тобто

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Звідси випливає, що чим меншим є значення ексцентриситету, тим менше сплюсненим є еліпс.

Відомо, що фокальні радіуси точок еліпса виражаються такими формулами:

$$r_1 = |F_1 M| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2},$$

$$r_2 = |F_2 M| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

З'ясуємо, чи можна фокальні радіуси точок еліпса раціонально виразити через їх абсциси. Із даного співвідношення маємо:

$$r_1^2 - r_2^2 = 4xc.$$

Враховуючи, що для еліпса $r_1 + r_2 = 2a$, отримаємо:

$$r_1 - r_2 = 2\frac{c}{a}x.$$

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 2a, \\ r_1 - r_2 = 2\frac{c}{a}x \end{cases}$$

відносно r_1 і r_2 , дістанемо раціональні вирази фокальних радіусів точок еліпса:

$$r_1 = a + \frac{c}{a}x,$$

$$r_2 = a - \frac{c}{a}x.$$

Дане співвідношення можна записати у вигляді:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x.$$

Директрисами еліпса називаються дві прямі, які перпендикулярні до фокальної осі еліпса (тобто до осі, на якій розміщені фокуси) і знаходяться на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від центра кривої (рис. 40).

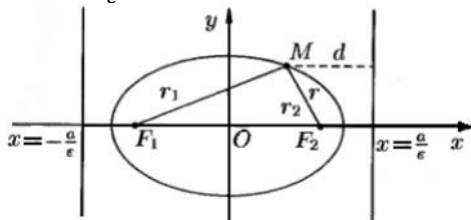


Рис. 40

У вибраній прямокутній системі координат директриси еліпса паралельні осі Оу. Тому рівняння директриси еліпса мають вигляд:

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}.$$

Якщо $a < b$, то рівняння $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ описує еліпс, більша вісь якого $2b$ лежить на осі Oy , а мала вісь $2a$ – на осі Ox (рис. 41). При цьому фокуси знаходяться у точках $F_1(0, c)$, $F_2(0, -c)$, де $c^2 = b^2 - a^2$, $\varepsilon = \frac{c}{b}$, а директриси мають рівняння: $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$.

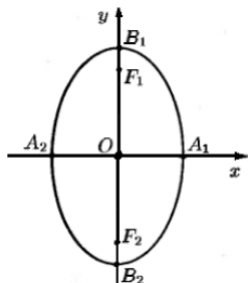


Рис. 41

Якщо центр еліпса знаходиться в точці $O_1(x_0, y_0)$, то його канонічне рівняння матиме вигляд:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

При цьому, якщо $a > b$, то фокуси знаходяться у точках $F_1(x_0 + c, y_0)$, $F_2(x_0 - c, y_0)$, а директриси задаються рівняннями: $x = x_0 \pm \frac{a}{\varepsilon}$.

Приклад. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо задана точка еліпса $M_0(-\sqrt{5}, 2)$, а відстань між його директрисами дорівнює 10.

Розв'язування: Оскільки точка $M_0(-\sqrt{5}, 2)$ лежить на еліпсі, тому її координати задовольняють рівняння еліпса, тобто

$$\frac{5}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \quad \text{або} \quad \frac{5}{a^2} + \frac{4}{a^2 - c^2} = 1.$$

Звідси

$$5(a^2 - c^2) + 4a^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Враховуючи, що відстань між директрисами 10, маємо $\frac{a}{\varepsilon} = 5$ або $\frac{a^2}{c} = 5$, звідки $a^2 = 5c$.

Підставимо у попередню рівність $a^2 = 5c$, отримаємо рівняння:

$$5(5c - c^2) + 20c = 5c(5c - c^2)$$

або

$$c^3 - 6c^2 + 9c = 0.$$

Оскільки $c \neq 0$, то отримаємо, що $c = 3$. Тоді $a^2 = 15$, $b^2 = 15 - 9 = 6$. Тоді шукане рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{6} = 1.$$

4. Гіпербола, її канонічне рівняння

Гіперболою називається геометричне місце точок площини, для яких абсолютне значення різниці відстаней від двох фіксованих точок (фокусів), є сталим.

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка гіперболи. За означенням гіперболи модуль різниці відстаней від точки M до фокусів є сталою величиною, яку позначимо через $2a$, а відстань між фокусами – через $2c$. Тоді $r_1 = |F_1M|$, $r_2 = |F_2M|$ – фокальні радіуси довільної точки. Згідно з означенням

$$\begin{aligned} |r_2 - r_1| &= 2a, \\ c > a, \text{ бо } |F_1F_2| &> |F_2M| - |F_1M|. \end{aligned}$$

Якщо вибрати систему координат так само, як і для еліпса (рис. 38), тоді рівність в координатах набере вигляд

$$|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}| = 2a.$$

Після проведення перетворень, отримаємо *канонічне рівняння гіперболи* у вигляді:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $b^2 = c^2 - a^2$ ($c > a$).

Дослідження форми гіперболи

Змінні x та y входять у рівняння гіперболи у парних степенях. Тому, якщо точка (x, y) належить гіперболі, то і точки $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$ також належать гіперболі. Отже, фігура симетрична відносно осей Ox та Oy , а також точки $O(0,0)$, яку називають *центром* гіперболи.

Знайдемо точки перетину гіперболи з осями координат. Підставивши у рівняння $y = 0$, отримаємо, що гіпербола перетинає вісь Ox у точках $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$. Якщо $x = 0$, тоді отримаємо рівняння $y^2 = -b^2$, яке не має розв'язків. Отже, гіпербола не перетинає вісь Oy . Точки A_1, A_2 називаються *вершинами* гіперболи.

Відрізок $A_1A_2 = 2a$ називається *дійсною віссю* гіперболи, а відрізок $B_1B_2 = 2b$ – *уявною віссю* гіперболи. Числа a і b називаються відповідно дійсною та уявною півосьями гіперболи. Прямокутник, утворений осями $2a$ та $2b$ називається *головним прямокутником* гіперболи.

Розв'яжемо рівняння гіперболи відносно y . Отримаємо $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$. Якщо $|x| \geq a$, то $-\infty < y < +\infty$, тобто гіпербола є необмеженою кривою, яка складається з двох симетричних відносно осі Oy віток, що лежить праворуч від прямої $x = a$ та ліворуч від прямої $x = -a$.

Отже, використовуючи симетрію відносно координатних осей, гіпербола складається з двох гілок (правої та лівої) і має дві *асимптоти*, тобто прямі

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Очевидно, асимптоти гіперболи є діагоналями прямокутника зі сторонами $2a$ і $2b$. Гіперболу зображено на рис. 42.

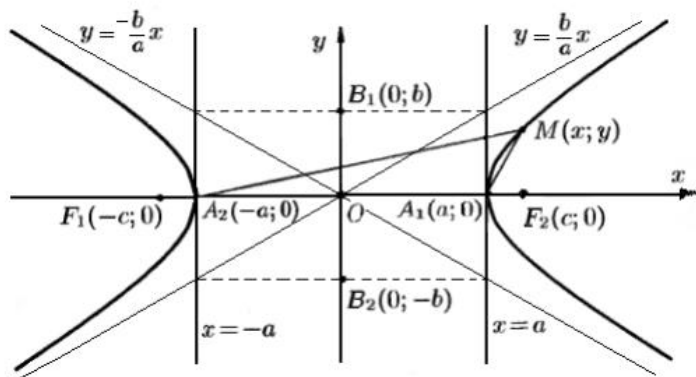


Рис. 42

Крива, що задається рівнянням $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ також є гіперболою. Дійсна вісь $2b$ цієї гіперболи розташована на осі Oy , а уявна $2a$ – на осі Ox . Гіпербола $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ називається *спряженою* до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, вони мають також однакові асимптоти (рис. 43). На малюнку спряжена гіпербола зображена пунктиром.

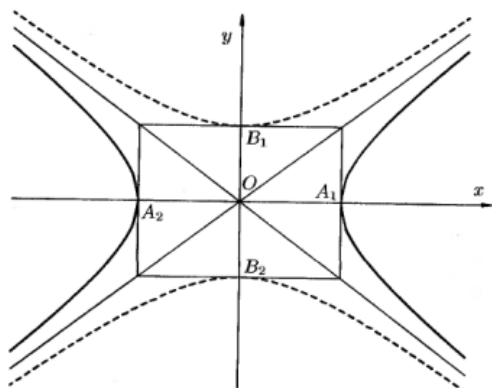


Рис. 43

У випадку, коли $a = b$, то гіпербола називається *рівнобічною* і описується рівнянням

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Асимптотами рівнобічної гіперболи є бісектриси координатних кутів: $y = \pm x$.

Відношення половини відстані між фокусами до більшої півосі називається *ексцентриситетом* гіперболи

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Для гіперболи $\varepsilon > 1$, оскільки $c > a$. Ексцентриситет характеризує форму гіперболи. Дійсно, оскільки

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1},$$

то чим менше значення ексцентриситету гіперболи, тим меншим є відношення півосей гіперболи $\frac{b}{a}$, і тим більше розтягнутий її головний прямокутник.

Розглянемо фокальні радіуси гіперболи. Для точок правої гілки гіперболи ($x > 0$) вони мають вигляд:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = -a + \varepsilon x,$$

а для точок лівої гілки гіперболи ($x < 0$) фокальні радіуси задаються формулами:

$$r_1 = -a - \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x.$$

Прямі $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ називаються *директрисами* гіперболи, як розташовані між початком координат та вершинами $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$.

Приклад. Фокуси гіперболи лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат і відстань між ними $2c = 20$, а рівняння асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$. Знайти ексцентриситет гіперболи.

Розв'язування: З рівняння асимптот $y = \pm \frac{b}{a}x$ маємо, що $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$, звідси $b = \frac{4}{3}a$. Крім того $a^2 + b^2 = c^2$, тоді $a^2 + b^2 = 10^2$ або $a^2 + b^2 = 100$.

Виключивши з цієї рівності b , одержимо:

$$a^2 + \left(\frac{4}{3}a\right)^2 = 100 \quad \text{або} \quad a^2 \left(1 + \frac{16}{9}\right) = 100,$$

Звідси $a = 6$. Тоді ексцентриситет гіперболи рівний:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

5. Парабола, її канонічне рівняння

Параболою називають геометричне місце точок площини, кожна з яких однаково віддалена від фіксованої точки площини (фокуса) і від даної прямої (директриси).

Відстань від фокуса F до директриси називають *параметром* параболи і позначають p ($p > 0$). Нехай $M(x, y)$ – довільна точка

параболи, тоді $r = |FM|$ буде фокальним радіусом точки M . Відстань від точки M до директриси позначимо через d . Тоді згідно з означенням $r = d$.

Виберемо на площині декартову систему координат так, щоб вісь Ox проходила через фокус F перпендикулярно до директриси, а початок O візьмемо посередині між фокусом і директрисою (рис. 44).

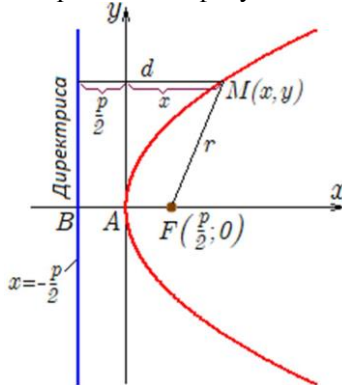


Рис. 44

Парабола має фокус $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ і рівняння директриси $x = -\frac{p}{2}$, а фокальний радіус точки параболи визначається рівнянням $r = x + \frac{p}{2}$. Тоді рівність $r = d$ у координатній формі запишеться так:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Піднісши останню рівність до квадрату та спростивши її, отримаємо рівняння:

$$y^2 = 2px,$$

яке називається *канонічним* рівнянням параболи.

Дослідження форми параболи

У рівняння параболи $y^2 = 2px$ змінна y входить у парній степені, звідки випливає, що парабола симетрична відносно осі Ox , яка є *віссю симетрії* параболи.

Оскільки $p > 0$, то $x \geq 0$, тоді парабола розташована справа від осі Oy.

При $x = 0$ маємо, що $y = 0$, тобто парабола проходить через початок координат. Точка $O(0,0)$ називається *вершиною* параболи.

Із зростанням значення змінної x модуль y також зростає. Отже, змінна точка $M(x, y)$ параболи, виходячи з початку координат із зростанням x , рухається по ній вправо і вгору.

Оскільки для параболи $r = d$, тоді ексцентриситет параболи дорівнює одиниці:

$$\varepsilon = \frac{r}{d} = 1.$$

Рівняння параболи з вершиною в точці $O_1(x_0, y_0)$ має вигляд:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0),$$

де фокус параболи буде міститися у точці $F\left(\frac{p}{2} + x_0, y_0\right)$, а рівняння директриси $x = -\frac{p}{2} + x_0$.

Рівняння $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ ($p > 0$) також описують параболи (рис. 45).

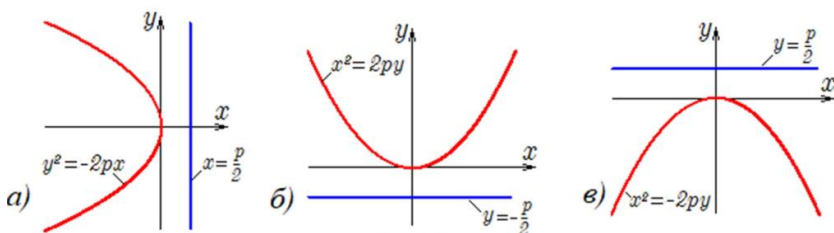


Рис. 45

Еліпс, гіпербола і парабола мають спільну фокально-директоріальну властивість:

Теорема. Відношення довжини фокального радіуса r кожної точки лінії другого порядку до відстані d цієї точки від відповідної директриси є сталим і дорівнює ексцентриситету кривої, тобто

$$\frac{r}{d} = \varepsilon.$$

Приклад. Записати рівняння параболи, знаючи, що відстань від фокуса до вершини дорівнює 3.

Розв'язування: Фокус параболи має координати $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, отже $\frac{p}{2} = 3$, звідси $p = 6$. Канонічне рівняння параболи має вигляд $y^2 = 2px$, тоді рівняння шуканої параболи буде $y^2 = 12x$.

Приклад. Визначити вид кривої та знайти її основні характеристики $y^2 + 4y + 3x - 5 = 0$.

Розв'язування: Зведемо дане рівняння до канонічного виду:

$$(y^2 + 4y + 4) - 4 + 3x - 5 = 0,$$

$$(y + 2)^2 = -3x + 9,$$

$$(y + 2)^2 = -3(x - 3).$$

Отже, отримали рівняння параболи $(y + 2)^2 = -3(x - 3)$, яка розміщена симетрично відносно прямої $y + 2 = 0$ (вісь параболи). Вершиною параболи є точка $O_1(3, -2)$. Параметр параболи знайдемо з рівності $2p = 3$, звідси $p = \frac{3}{2}$. Координати фокуса $F\left(-\frac{3}{4} + 3, -2\right)$ або $F\left(\frac{9}{4}, -2\right)$. Директриса параболи має рівняння: $x = \frac{3}{4} + 3$, звідси $x = \frac{15}{4}$ або $4x - 15 = 0$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти координати центра і радіус кола:

а) $x^2 - 2x + 4y + y^2 - 20 = 0$;

б) $x^2 + y^2 + y = 0$;

в) $x^2 + x + y^2 + y = -\frac{1}{4}$.

2. Скласти рівняння еліпса, розміщеного симетрично відносно координатних осей з фокусами на осі Ox , якщо:

а) його півосі дорівнюють $a = 7$, $b = 2$;

б) його мала піввісь $b = 4$, а відстань між фокусами: $2c = 6$;

в) його велика піввісь $a = 5$, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

г) відстань між фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$.

3. Визначити півосі, координати фокусів, координати вершин і рівняння асимптот кожної з гіпербол:

а) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$;

б) $16x^2 - y^2 = 1$;

в) $9x^2 - 16y^2 = -144$.

4. Скласти рівняння параболі, яка проходить через початок координат, розміщена симетрично відносно осі Oy і має фокус $F(0; -3)$.

5. Визначити координати вершини, фокуса і рівняння директриси кожної із заданих парабол:

а) $y^2 = 20x$;

б) $x^2 = 12y$;

в) $y^2 = -10x$;

г) $x^2 = -4y$.

6. Скласти рівняння кола у кожному з наступних випадків:

а) коло проходить через точки $A(3; 1)$ та $B(-1; 3)$, і його центр належить прямій $3x - y - 2 = 0$;

б) коло проходить через три точки $A(1; 1)$, $B(1; -1)$, $C(2; 0)$;

в) коло радіусом $R = \sqrt{5}$ дотикається до прямої $x - 2y - 1 = 0$ у точці $M(3; 1)$.

7. Для кожного з еліпсів визначити півосі, координати вершин і фокусів:

а) $4x^2 + y^2 = 9$;

б) $16x^2 + 9y^2 = 144$;

в) $x^2 + 4y^2 = 4$.

8. Скласти рівняння гіперболи, розміщеної симетрично відносно координатних осей, з фокусами на осі Ox , якщо:

а) відстань між фокусами $2c = 16$ і уявна вісь $2b = 12$;

б) відстань між фокусами $2c = 16$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

в) дійсна вісь $2a = 16$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$;

г) відстань між директрисами дорівнює $\frac{8}{3}$ і ексцентриситет $\varepsilon = 1,5$.

9. Встановити, які лінії визначаються рівняннями:

а) $y = \sqrt{9 - x^2}$;

б) $x = -\sqrt{4 - y^2}$;

в) $y = -3 - \sqrt{21 - 4x - x^2}$;

г) $x = -5 + \sqrt{40 - 6y - y^2}$.

10. Задана вершина параболі $A(6; 3)$ і рівняння її директриси $3x - 5y + 1 = 0$. Знайти фокус F цієї параболі.

Питання для самоперевірки

1. Запишіть загальне рівняння кривих другого порядку.
2. Дайте визначення кола як геометричного місця точок.
3. Запишіть канонічне рівняння кола.
4. Дайте визначення еліпса як геометричного місця точок.
5. Запишіть канонічне рівняння еліпса.
6. Чому дорівнює ексцентриситет еліпса і які числові значення може він набувати?
7. Дайте визначення гіперболи як геометричного місця точок.
8. Запишіть канонічне рівняння гіперболи.
9. Чому дорівнює ексцентриситет гіперболи і які числові значення може він набувати? Які існують співвідношення між величинами a , b , c для еліпса, для гіперболи?
10. Запишіть рівняння асимптот гіперболи $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.
11. Дайте визначення параболі. Запишіть канонічне рівняння параболі.
12. Чому дорівнює ексцентриситет параболі? Запишіть рівняння директриси параболі.

3.3. Площина у просторі

1. Рівняння поверхні і лінії в просторі

Поверхні у просторі, як правило, можна розглядати як геометричне місце точок, які задовольняють деякій умові. Наприклад, сфера радіуса R з центром в точці O_1 є геометричним місцем всіх точок простору, які знаходяться від точки O_1 на відстані R .

Прямокутна система координат $Oxyz$ дозволяє встановити взаємно однозначну відповідність між точками простору і трійками чисел x , y , z – їх координатами. Властивість, спільна для всіх точок поверхні, можна записати у вигляді рівняння, яке зв'язує координати всіх точок поверхні.

Рівнянням даної поверхні в прямокутній системі координат $Oxyz$ називається таке рівняння $F(x, y, z) = 0$ з трьома невідомими x , y , z , якому задовольняють координати кожної точки, що лежить на поверхні, і не задовольняють координати точок, що не лежать на поверхні.

Рівняння поверхні дозволяє вивчення геометричних властивостей поверхонь замінити дослідженням її рівняння. Наприклад, для того, щоб дізнатися, чи лежить точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ на

даній поверхні, достатньо підставити координати точки M_1 у рівняння поверхні замість змінних: якщо координати задовольняють рівняння, то точка лежить на поверхні, в протилежному випадку – точка не лежить на поверхні.

Будь-яку лінію у просторі можна розглядати, як лінію перетину двох поверхонь або як геометричне місце точок, спільних для двох поверхонь (рис. 46).

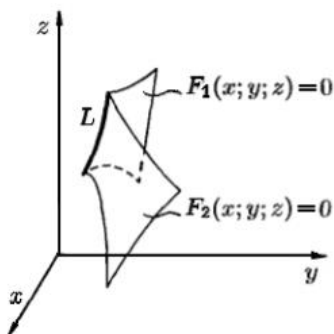


Рис. 46

Якщо $F_1(x, y, z) = 0$ і $F_2(x, y, z) = 0$ – рівняння двох поверхонь, які визначають лінію L , то координати точок цієї лінії задовольняють системі двох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Ці рівняння називають *рівняннями лінії у просторі*. Ті значення x , y , z , які задовольняють обидва рівняння, визначають точки, що лежать одночасно на обох поверхнях, тобто розташовані на лінії їх перетину.

Наприклад, система рівнянь $\begin{cases} y = 0, \\ z = 0, \end{cases}$ – рівняння осі Ox .

Потрібно мати на увазі, що дану лінію L можна подати двома рівняннями нескінченною кількістю способів: замість даних двох поверхонь можна взяти будь-яку пару поверхонь, які перетинаються по тій самій лінії L . Аналітично це означає, що замість системи рівнянь (рівняння лінії у просторі) можна взяти будь-яку еквівалентну їй систему.

Наприклад, лінією перетину двох сфер

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 10 \end{cases}$$

є коло радіуса $R = 1$ з центром в точці $O(0,0,0)$, яке лежить в площині Oxy . Справді, якщо в друге рівняння системи замість $x^2 + y^2 + z^2$ підставити його значення з першого рівняння, то отримаємо

$$1 - 6z + 9 = 10, \text{ звідси } z = 0.$$

Отже, вихідна система еквівалентна системі

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, \end{cases}$$

кожна з яких визначає коло радіуса $R = 1$ з центром в точці $O(0,0,0)$, яке лежить в площині $z = 0$.

Лінію у просторі можна розглядати як траєкторію руху точки. В цьому випадку її задають *векторним рівнянням* $\vec{r} = \vec{r}(t)$, де t – скалярний параметр. Кожному значенню параметра t_0 відповідає радіус-вектор $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$. При зміні значення параметра t , кінець радіус-вектора буде описувати у просторі криву (рис. 47).

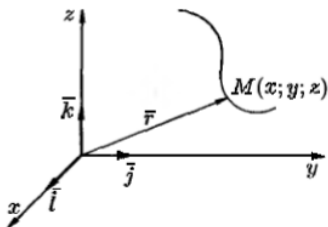


Рис. 47

Криву у просторі можна задати за допомогою трьох рівнянь:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in T, \\ z = z(t), \end{cases}$$

де x, y, z – координати довільної точки $M(x, y, z)$ кривої, а t – параметр, який визначає положення кожної точки кривої у просторі $Oxyz$. Таке задання кривої у просторі називається *параметричним*.

Задача про знаходження точки перетину трьох поверхонь рівносильна задачі сумісного розв'язання трьох рівнянь, що зображають ці поверхні

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0, \\ F_3(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Поверхня, яка в декартовій прямокутній системі координат зображується алгебраїчним рівнянням $F(x, y, z) = 0$, тобто рівнянням, ліва частина якого є многочленом x, y, z , називається *алгебраїчною* поверхнею. Степінь цього многочлена визначає порядок алгебраїчної поверхні. Поверхні, які не є алгебраїчними, називаються *трансцендентними*.

Лінія поверхні двох алгебраїчних поверхонь називається *алгебраїчною*.

Надалі будемо розглядати алгебраїчні поверхні першого і другого порядків.

Отже, поверхню у просторі можна задати аналітично або геометрично. Звідси випливають дві основні задачі аналітичної геометрії у просторі:

1) задана поверхня як геометричне місце точок, знайти рівняння цієї поверхні;

2) задано рівняння поверхні $F(x, y, z) = 0$, дослідити форму та геометричні властивості цієї поверхні.

2. Площина в просторі, різні види її рівняння

Найпростішою поверхнею у просторі є площина. Вона задається алгебраїчним рівнянням першого порядку відносно змінних x, y, z . Площину у просторі можна задавати різними рівняннями.

Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора

Нехай у просторі задані декартова прямокутна система координат $Oxyz$ і площина Q . Позначимо одну із її точок $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через яку проходить площина та вектор, перпендикулярний до неї $\vec{n}(A, B, C)$ (рис. 48).

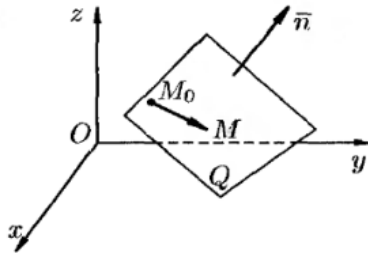


Рис. 48

Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка площини. Складемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{n}$ перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$. Звідси отримаємо *рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A, B, C)$:*

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Вектор $\vec{n}(A, B, C)$ називається *нормальним вектором площини*.

Розкриємо у рівнянні $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ дужки і введемо позначення $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, отримаємо рівняння:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

яке називають *загальним рівнянням площини* у просторі. У загальному рівнянні A, B, C – координати нормального вектора, D – довільна стала, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Тоді справедлива наступна теорема.

Теорема. Кожна площина може бути виражена лінійним рівнянням відносно вибраної декартової системи координат у просторі, і, навпаки, кожне лінійне рівняння відносно декартової системи координат у просторі виражає площину.

Дослідження загального рівняння площини:

1) Якщо $D = 0$, тоді отримаємо рівняння $Ax + By + Cz = 0$ площини, що проходить через початок координат $O(0,0,0)$.

2) Рівність нулеві одного з коефіцієнтів A, B чи C означає перпендикулярність вектора нормалі до відповідної осі, тобто паралельність площини до цієї осі.

3) Рівність нулевій двох коефіцієнтів A і B , A і C чи B і C означає паралельність площини відповідній координатній площині Oxy , Oxz або Oyz .

4) Рівність нулевій трьох коефіцієнтів A , B і D , A , C і D чи B , C і D визначає відповідно координатні площини Oxy , Oxz або Oyz .

Приклад. Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь Ox і точку $M_0(4, -1, 2)$.

Розв'язування: Оскільки площина проходить через вісь Ox , то в загальному рівнянні коефіцієнти A і D дорівнюють нулю, тобто рівняння площини матиме вигляд: $Bu + Cz = 0$. Точка $M_0(4, -1, 2)$ належить площині, значить її координати задовольняють отримане рівняння. Тоді маємо $-B + 2C = 0$ або $B = 2C$ і шукане рівняння площини набуде вигляду $2u + z = 0$.

Рівняння площини, що проходить через три точки

Нехай площина задана трьома точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій, а $M(x, y, z)$ – довільна точка площини (рис. 49).

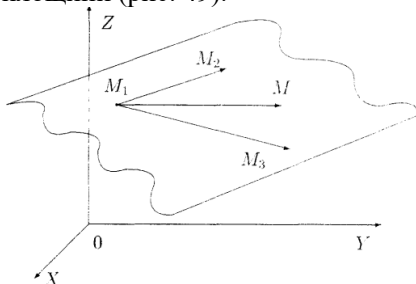


Рис. 49

Складемо три вектори $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$. Ці вектори лежать в одній площині, а тому вони компланарні. Отже, їх мішаний добуток дорівнює нулю, тобто $(\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2}) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$. Виразивши цю умову через координати даних векторів, матимемо:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

тобто *рівняння площини, яка проходить через три задані точки.*

Приклад. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_0(2,4,1)$ і $M_1(0,-2,4)$ паралельно вектору $\vec{a} = (2; 1; -1)$.

Розв'язування: Точка $M(x, y, z)$ належить шуканій площині тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$ та $\vec{a}$ компланарні, тобто мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z-1 \\ -2 & -6 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$3x + 4y + 10z - 32 = 0.$$

Рівняння площини «у відрізках»

Розглянемо загальне рівняння площини у просторі $Ax + By + Cz + D = 0$. Якщо всі коефіцієнти A, B, C і D відмінні від нуля, тоді рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1,$$

і позначивши, що $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$, отримаємо *рівняння площини у «відрізках»*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Зауважимо, що у рівняння «у відрізках» числа a, b, c мають геометричний зміст: вони дорівнюють величинам відрізків, які відтинає площина на осях Ox, Oy і Oz (рис. 50). Щоб переконатися в цьому, досить знайти точки перетину площини з осями координат. Наприклад, точка перетину з віссю Ox визначається із сумісного розгляду рівняння площини з рівняннями $y = 0$ і $z = 0$ осі Ox :

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \\ y = 0, z = 0 \end{cases} \leftrightarrow \quad x = a, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

тобто точка $A(a, 0, 0)$ – шукана точка перетину площини з віссю Ox . Аналогічно точками перетину площини з осями Oy і Oz є відповідно $B(0, b, 0)$ та $C(0, 0, c)$.

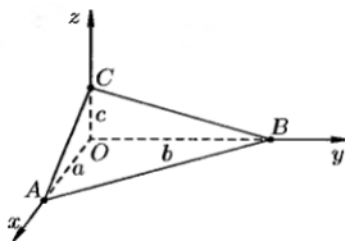


Рис. 50

Нормальне рівняння площини

Нехай в просторі задана площина Q , яка визначається відстанню ρ від початку координат, тобто $|\overrightarrow{OK}|$ – довжиною перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину, і напрямом цього перпендикуляра, тобто кутами α , β , γ , які він утворює з доданими напрямками осей системи координат (рис. 51). Координати одиничного вектора будуть величини $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, тобто $\vec{e} = (\cos \alpha ; \cos \beta ; \cos \gamma)$.

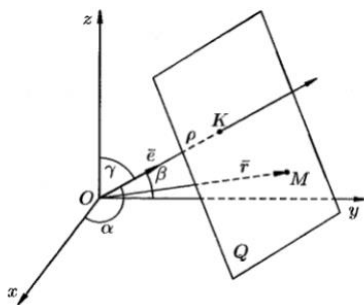


Рис. 51

Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка площини. Складемо вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$. При довільному розташуванні точки M на площині Q проекція радіус-вектора $\vec{r}$ на напрямок одиничного вектора $\vec{e}$ завжди дорівнює ρ , тобто $\text{pr}_{\vec{e}} \vec{r} = \rho$, звідки $\vec{e} \cdot \vec{r} = \rho$. Тому

$$\vec{e} \cdot \vec{r} - \rho = 0.$$

Перепишемо це рівняння через координати векторів $\vec{e}$ і $\vec{r}$, у результаті отримаємо рівняння:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - \rho = 0,$$

яке називається *нормальним рівнянням площини*.

Щоб звести загальне рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$ до нормального вигляду треба помножити всі його коефіцієнти на число

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Справді, нормальне і загальне рівняння – це дві форми рівнянь однієї площини. Отже, їх коефіцієнти пропорційні

$$\frac{\cos \alpha}{A} = \frac{\cos \beta}{B} = \frac{\cos \gamma}{C} = -\frac{\rho}{D} = \lambda.$$

Звідси одержимо

$$\cos \alpha = A\lambda, \quad \cos \beta = B\lambda, \quad \cos \gamma = C\lambda, \quad -\rho = D\lambda.$$

Користуючись співвідношенням $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, маємо

$$(A\lambda)^2 + (B\lambda)^2 + (C\lambda)^2 = 1 \quad \text{або} \quad \lambda^2(A^2 + B^2 + C^2) = 1.$$

Звідси $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Знак числа λ визначається з умови $\lambda D = -\rho < 0$, тобто він завжди має знак, протилежний знаку вільного члена D .

Число λ називається *нормуючим множником* рівняння. Отже, нормальне рівняння площини матиме вигляд

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0.$$

Приклад. Записати загальне рівняння площини $2x - 6y + 3z - 14 = 0$ у вигляді рівняння «у відрізках» та звести його до нормального вигляду.

Розв'язування: Для того, щоб із загального рівняння площини отримати рівняння «у відрізках», потрібно поділити обидві частини рівняння на 14:

$$\frac{2x}{14} - \frac{6y}{14} + \frac{3z}{14} = 1,$$

звідки рівняння площини «у відрізках» матиме вигляд:

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{-\frac{7}{3}} + \frac{z}{\frac{14}{3}} = 1.$$

Щоб звести загальне рівняння площини до нормального вигляду, треба помножити рівняння $2x - 6y + 3z - 14 = 0$ на множник $\lambda = +\frac{1}{\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}} = \frac{1}{7}$ ($D < 0$), тобто

$$\frac{2}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{3}{7}z - 2 = 0.$$

3. Основні задачі для площини у просторі

Кут між площинами

Нехай дві площини Q_1 і Q_2 у просторі задані загальними рівняннями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

де $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ – вектори нормалей заданих площин (рис. 52).

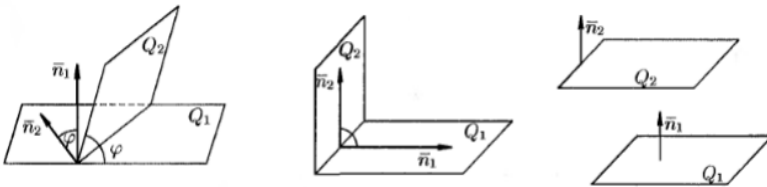


Рис. 52

Кутом між двома площинами називається один з двограних кутів, утворених цими площинами, який дорівнює лінійному куту φ між нормальними векторами:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Зрозуміло, що таким чином буде визначено лише один із двограних кутів, інший буде дорівнювати $\pi - \varphi$.

Умови паралельності та перпендикулярності площин

Дві площини Q_1 і Q_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли колінеарні їх нормальні вектори $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ (рис. 52). Тоді умова паралельності двох площин має вигляд:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Умова перпендикулярності двох площин рівносильна умові перпендикулярності векторів $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$, тобто має вигляд:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0.$$

Приклад. За яких значень l та m рівняння $2x + ly + 3z - 5 = 0$ і $mx - 6y - 6z + 2 = 0$ визначають паралельні площини?

Розв'язування: Згідно умови паралельності двох площин маємо:

$$\frac{2}{m} = \frac{l}{-6} = \frac{3}{-6},$$

звідси $m = -4$, $l = 3$.

Відстань від точки до площини

Нехай у просторі задані площина Q загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$ і точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Відстань d від точки M_0 до площини Q дорівнює модулю проекції вектора $\vec{M_1 M_0}$ на напрямок нормального вектора $\vec{n} = (A; B; C)$, де $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – довільна точка площини Q (рис. 53).

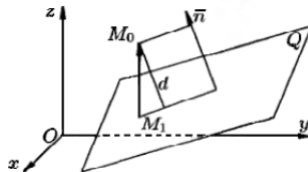


Рис. 53

Тоді

$$d = |\text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1 M_0}| = \left| \frac{\overrightarrow{M_1 M_0} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Оскільки точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ належить площині, тоді $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Звідси $-Ax_1 - By_1 - Cz_1 = D$, отже

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Якщо площина задана нормальним рівнянням, то відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини Q можна знайти за формулою:

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - \rho|,$$

тобто відстань від точки до площини дорівнює абсолютному значенню лівої частини нормального рівняння площини для радіус-вектора даної точки.

Приклад. На осі Oz знайти точку, яка рівновіддалена від двох площин $x - \sqrt{2}y - z + 3 = 0$ та $2x - 2y + z + 2 = 0$.

Розв'язування: Візьмемо довільну точку на осі Oz , наприклад, $M(0,0,z)$. Тоді відстань від точки $M(0,0,z)$ до першої площини:

$$d_1 = \frac{|-z+3|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{2})^2+(-1)^2}} = \frac{|-z+3|}{2}, \text{ а відстань від точки } M(0,0,z) \text{ до другої}$$

площини:

$$d_2 = \frac{|z+2|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{|z+2|}{3}.$$

За умовою задачі $d_1 = d_2$, тобто

$$\frac{|-z+3|}{2} = \frac{|z+2|}{3} \quad \text{або} \quad \frac{-z+3}{2} = \pm \frac{z+2}{3},$$

звідси $z_1 = 1$, $z_2 = 13$. Отже, точки, які рівновіддалені від двох площин мають координати: $M_1(0,0,1)$ і $M_2(0,0,13)$.

Завдання для самостійної роботи

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_1(1; 2; -1)$ перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, якщо $M_2(0; -1; 2)$.
2. Написати загальне рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1; 1; 2)$, $M_2(0; -1; 1)$, $M_3(1; -1; 0)$.
3. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(1; -1; -2)$ паралельно площині $3x - y + z - 1 = 0$.
4. Знайти площу трикутника, який площина $3x - 2y + 5z - 12 = 0$ відтинає від координатного кута Oyz .
5. Знайти відстань від точки $A(-1; 1; 4)$ до площини $8x - y + z - 5 = 0$.
6. Визначити кут між площинами:
 - а) $6x + 2y - 4z + 17 = 0$ і $9x + 3y - 6z - 4 = 0$;
 - б) $4x - 5y + 3z - 1 = 0$ і $x - 4y - z + 9 = 0$;
 - в) $2x + 5y - z = 0$ і $x + 2z - 8 = 0$.
7. Скласти рівняння і побудувати площину, яка проходить:
 - а) через точки $M_1(1; 2; 3)$ і $M_2(0; -1; 1)$ паралельно осі Ox ;
 - б) через точки $M_1(1; 1; 1)$, $M_2(2; 0; 1)$ паралельно осі Oy ;
 - в) через точки $M_1(-1; 0; 1)$, $M_2(2; 1; 0)$ паралельно осі Oz .
8. Площина відтинає на координатних осях відрізки $a = 11$, $b = 55$, $c = 10$. Обчислити напрямні косинуси вектора, перпендикулярного до цієї площини.
9. Обчислити відстань d між двома паралельними площинами $6x - 18y - 9z - 28 = 0$ і $4x - 12y - 6z - 7 = 0$.
10. Визначити, за яких значень l і m площини $2x + ly + 3z - 5 = 0$, $mx - 6y - 6z + 2 = 0$ будуть:
 - а) паралельні;
 - б) перпендикулярні?
11. Записати рівняння наступних площин у нормальному вигляді:
 - а) $4x - 6y - 12z - 11 = 0$;
 - б) $5y - 12z + 26 = 0$;
 - в) $-x + 5 = 0$.
12. Обчисліть об'єм піраміди, яка утворена координатними площинами та площиною $2x - 3y + 6z - 12 = 0$.

Питання для самоперевірки

1. Який вигляд має загальне рівняння площини? Яким є зміст коефіцієнтів цього рівняння?
2. Який вигляд має рівняння площини у відрізках на осях? Яким є геометричний зміст коефіцієнтів цього рівняння?
3. Як записати рівняння площини, що проходить через три точки?
4. Як знайти кут між двома площинами?
5. Як записати умову паралельності та умову перпендикулярності двох площин?

3.4. Пряма у просторі

1. Пряма у просторі, різні види її рівнянь

Канонічне рівняння прямої

Нехай пряма L задана в просторі точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і напрямним вектором $\vec{s} = (l; m; n)$, тобто вектором, паралельним прямій L . Позначимо через $M(x, y, z)$ довільну точку прямої (рис. 54) і виразимо умову колінеарності векторів. Відстань d від точки M_0 до площини Q дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{s}$ в координатній формі:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}.$$

Таким чином, ми отримали рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно вектору $\vec{s}$. Це рівняння називається *канонічним рівнянням* прямої, а вектор $\vec{s} = (l; m; n)$ – *направним вектором* прямої.

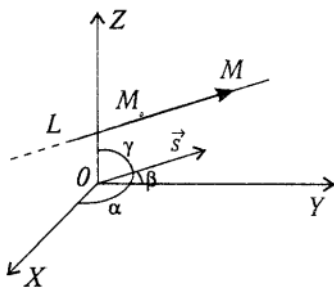


Рис. 54

Координати l, m, n напрямного вектора $\vec{s}$ прямої, як відомо, пропорційні косинусам кутів α, β, γ , які пряма L утворює з координатними осями.

Тому, якщо $l = 0$, то пряма L перпендикулярна до осі Ox . Аналогічно, коли $m = 0$ або $n = 0$, то пряма L перпендикулярна відповідно до осі Oy або Oz .

Якщо $l = m = 0$, то пряма L перпендикулярна до осі Ox та осі Oy , тобто вона паралельна осі Oz . Аналогічно, коли $l = n = 0$, то пряма паралельна осі Oy і коли $m = n = 0$, то пряма паралельна осі Ox .

Параметричне рівняння прямої

З канонічного рівняння випливає, що

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} = t.$$

Виразивши з цього рівняння змінні x, y та z , отримаємо наступне рівняння:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$$

яке називається *параметричним рівнянням* прямої.

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай пряма L проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 55). Розглянемо довільну точку прямої $M(x, y, z)$.

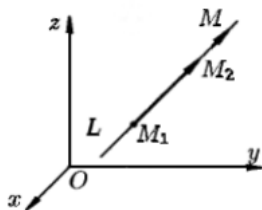


Рис. 55

Складемо вектори $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ та $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$. Ці вектор колінеарні, а отже їх координати пропорційні. Звідси рівняння прямої має вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

яке називається *рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки*.

Загальне рівняння прямої

Пряму можна розглядати як лінію перетину двох площин, що задані загальними рівняннями. Іншими словами, пряму в просторі можна задати системою двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Якщо площини не паралельні, тобто координати нормальних векторів $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ не пропорційні, то система рівнянь визначає пряму як геометричне місце точок простору, координати яких задовольняють кожному з рівнянь системи. Це рівняння називають *загальним рівнянням прямої у просторі*.

Щоб звести загальне рівняння прямої до канонічного вигляду, потрібно знайти координати однієї з точок прямої та координати напрямного вектора $\vec{s}$ прямої.

Виберемо будь-яку точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яка задовольняє обом рівнянням системи (рис. 56). Надамо одній змінній довільного значення, наприклад $z_0 = 0$, а координати x_0 і y_0 можна знайти з системи рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + D_1 = 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + D_2 = 0. \end{cases}$$

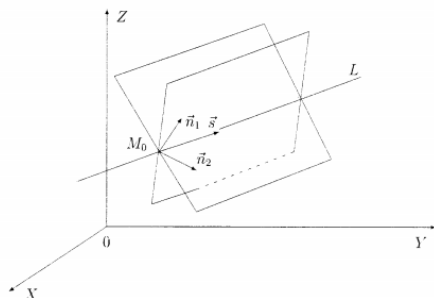


Рис. 56

Щоб визначити координати напрямного вектора $\vec{s}$ прямої, зауважимо, що він перпендикулярний до векторів нормалей площин $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Отже, за вектор $\vec{s}$ можна взяти векторний добуток векторів $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$, тобто

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

або

$$\vec{s} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

Далі, підставляючи в канонічне рівняння прямої координати точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ та замість l, m, n координати вектора $\vec{s}$ із цього співвідношення, отримаємо канонічний вигляд рівняння прямої:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}},$$

Приклад. Звести загальне рівняння прямої $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases}$ до канонічного вигляду.

Розв'язування: Знайдемо координати довільної точки M_0 , що лежить на прямій. Нехай $z_0 = 0$, тоді

$$\begin{cases} x - 2y - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 4 = 0, \end{cases}$$

звідки $M_0(2, -1, 0)$. Тепер знайдемо координати напрямного вектора прямої:

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 14\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Отже, канонічне рівняння прямої має вигляд:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{14} = \frac{z}{8}.$$

2. Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих

Кут між прямими

Нехай у просторі прямі L_1 і L_2 задані канонічними рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}, \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Кут φ між прямими в просторі визначається аналогічно, як і кут між прямими на площині, тобто, як кут між їх напрямними векторами $\vec{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ і $\vec{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$, тобто

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Умови паралельності та перпендикулярності прямих

Прямі L_1 і L_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли колінеарні їх напрямні вектори $\vec{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ та $\vec{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$, тобто

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Прямі L_1 і L_2 перпендикулярні тоді, коли перпендикулярні їх напрямні вектори, тобто $\cos \varphi = 0$. Тоді умова перпендикулярності прямих має вигляд:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Умова, коли дві прямі лежать в одній площині

Прямі L_1 і L_2 лежать в одній площині (перетинаються), якщо напрямні вектори $\vec{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$, $\vec{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$ і вектор $\vec{M_1 M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ будуть компланарні (рис. 57), тобто виконуватиметься умова:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

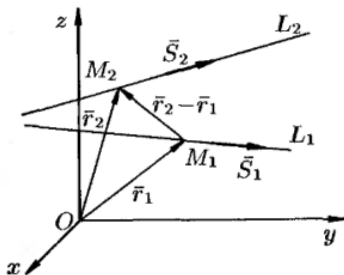


Рис. 57

Приклад. Знайти кут між прямими $\frac{x+2}{-1} = \frac{y+5}{0} = \frac{z-3}{1}$ і $x = t - 1$, $y = -2t - 2$, $z = -2t$.

Розв'язування: Щоб знайти кут між прямими, необхідно параметричне рівняння другої прямої перевести в канонічне. Оскільки, $t = x + 1 = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-2}$, то канонічне рівняння прямої має вигляд $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-2}$, тому

$$\cos \varphi = \frac{(-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot (-2)}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = -\frac{3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{9}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Звідси шуканий кут дорівнює

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

3. Основні задачі на пряму і площину в просторі

Кут між прямою і площиною

Нехай у просторі площина Q задана загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$ і пряма L задана канонічним рівнянням $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$. Кут φ між прямою і площиною в просторі вимірюється гострим кутом між прямою та її проекцією на площину (рис. 58). Очевидно, що $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$, де θ – кут між вектором нормалі площини $\vec{n} = (A; B; C)$ і напрямним вектором прямої $\vec{s} = (m; n; p)$.

Кут θ можна визначити за формулою

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Враховуючи, що $\cos \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \sin \varphi$, отримаємо

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

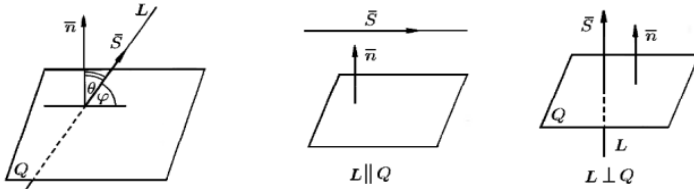


Рис. 58

Умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини

Якщо пряма L паралельна площині Q , то кут $\varphi = 0^\circ$, звідси $\sin 0^\circ = 0$. Отже, співвідношення

$$Am + Bn + Cp = 0$$

є умовою паралельності прямої і площини.

Пряма L перпендикулярна до площини Q тоді, коли вектори $\vec{s} = (m; n; p)$ і $\vec{n} = (A; B; C)$ колінеарні, тобто

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Взаємне розміщення прямої і площини. Перетин прямої з площиною

Пряма в просторі може перетинати площину, бути до неї паралельною або належати їй. Встановимо, чим характеризується аналітично кожний з цих випадків.

Нехай пряма L і площина Q задані рівняннями:

$$\begin{aligned} L: \quad & \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \\ Q: \quad & Ax + By + Cz + D = 0. \end{aligned}$$

Запишемо рівняння прямої в параметричній формі:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Підставляючи в рівняння площини замість x, y, z параметричне рівняння прямої, отримаємо

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0$$

звідси

$$(Am + Bn + Cp)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Якщо $Am + Bn + Cp \neq 0$, то дане рівняння має єдиний розв'язок

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}.$$

Далі підставляючи значення параметра t у координати $x = x_0 + mt$, $y = y_0 + nt$, $z = z_0 + pt$, отримаємо точку перетину $M(x, y, z)$ прямої з площиною Q .

Якщо $Am + Bn + Cp = 0$ і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то рівняння набуває вигляду $0 \cdot t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, тобто не має розв'язку. Це означає, що пряма паралельна до площини.

Якщо $Am + Bn + Cp = 0$ і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, тоді рівняння набуває вигляду $0 \cdot t + 0 = 0$, тобто має безліч розв'язків. У цьому випадку пряма і площина мають безліч спільних точок, тобто пряма належить даній площині.

Приклад. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ і площини $2x + 3y + z - 1 = 0$.

Розв'язування: Запишемо рівняння прямої у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -1 - 2t, \\ z = 6t. \end{cases}$$

Підставляючи в рівняння площини $2x + 3y + z - 1 = 0$ замість x, y, z отримані значення, маємо

$$2(1 + t) + 3(-1 - 2t) + 6t - 1 = 0, \quad \text{звідси } t = 1.$$

Тоді $x = 1 + 1 = 2$, $y = -1 - 2 \cdot 1 = -3$, $z = 6 \cdot 1 = 6$, тобто точкою перетину прямої і площини є точка $M(2, -3, 6)$.

Відстань від точки до прямої

Нехай задані пряма L рівнянням $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ і точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Знайти відстань d від точки M_1 до прямої L (рис. 59).

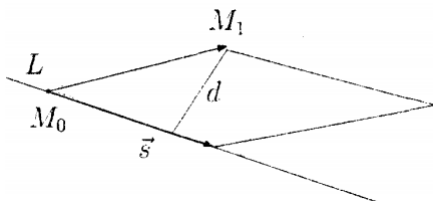


Рис. 59

Шукана відстань d – це довжина висоти паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0)$ і $\vec{s} = (m; n; p)$. Площа паралелограма дорівнює, з одного боку, $S = |\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}|$, а з іншого боку $S = |\vec{s}| \cdot d$.

Отже,

$$|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}| = |\vec{s}| \cdot d,$$

звідси

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}.$$

Відстань між паралельними прямими

Потрібно знайти відстань між двома паралельними прямими L_1 та L_2 , які задано канонічними рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}, \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Шукана відстань d – довжина висоти паралелограма (рис. 60), побудованого на векторах $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ і $\vec{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ (або $\vec{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$).

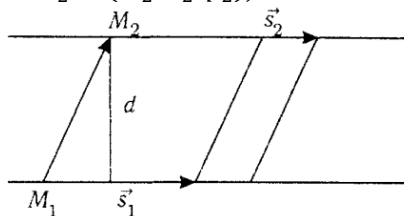


Рис. 60

Площа паралелограма дорівнює $S = |\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{s}_1|$
(або $S = |\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{s}_2|$). Отже,

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{s}_1|}{|\vec{s}_1|}, \quad \text{або} \quad d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{s}_2|}{|\vec{s}_2|}.$$

Приклад. Знайти відстань між двома паралельними прямими:
 $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$ і $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$.

Розв'язування:

Згідно з умовою задачі маємо: $M_1(0; 3; 2)$, $M_2(3; -1; 2)$ і $\vec{s}_1 = (1; 2; 1)$. Тоді $\overrightarrow{M_1M_2} = (3; -4; 0)$ і векторний добуток дорівнює

$$\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{s}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 3\vec{j} + 10\vec{k},$$

звідси $|\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{s}_1| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 10^2} = \sqrt{125}$.

Відстань між паралельними прямими шукаємо за формулою:

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{s}_1|}{|\vec{s}_1|} = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{6}} = \frac{5}{6}\sqrt{30}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Скласти параметричні і канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1; -1; 1)$ паралельно:

а) вектору $\vec{a} = (2; 3; 1)$;

б) прямій $x = -1 + t$, $y = 3 + 2t$, $z = -t$;

в) осі Ox .

2. Скласти канонічні рівняння прямої $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0. \end{cases}$

3. Знайти гострий кут φ між прямими:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}, \quad \begin{cases} x = -2 + t, \\ y = 3 + t, \\ z = -5 + \sqrt{2}t. \end{cases}$$

4. Довести перпендикулярність прямих $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$,
 $\begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0, \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0. \end{cases}$

5. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ і площини $2x + 3y + z - 1 = 0$.

6. Довести, що пряма $x = 3t - 2$, $y = -4t + 1$, $z = 4t - 5$ паралельна площині $8x - 6y - 12z - 1 = 0$.

7. Довести, що пряма $\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0, \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$ лежить на площині $4x - 3y + 7z - 7 = 0$.

8. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1; -2; 3)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{4}$.

9. Обчислити відстань від точки $A(2; 3; -1)$ до прямої $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}$.

10. Задані вершини трикутника $A(1; -2; -4)$, $B(3; 1; -3)$ і $C(5; 1; -7)$. Скласти параметричні рівняння висоти трикутника, опущеної з вершини B .

11. Визначити відстань d між двома паралельними прямими:

$$\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0, \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x = 3t - 7, \\ y = -t + 5, \\ z = 4t + 9. \end{cases}$$

12. При яких значеннях l і C пряма $\frac{x-2}{l} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна до площини $3x - 2y + Cz + 1 = 0$?

Питання для самоперевірки

1. Який вигляд загального рівняння прямої у просторі? Яка геометрична інтерпретація цього рівняння?

2. Який вигляд параметричного, канонічного рівнянь прямої і прямої, що проходить через дві задані точки у просторі?

3. Як знайти кут між двома прямими у просторі?

4. Як записати умови паралельності та перпендикулярності двох прямих, що задані канонічними рівняннями?

5. Як знайти кут між прямою і площиною у просторі?

6. Які умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини?

3.5. Поверхні другого порядку

1. Загальне рівняння поверхні другого порядку

Поверхнею другого порядку називається геометричне місце точок простору, які в деякій декартовій системі координат $Oxuz$ задовольняють алгебраїчне рівняння другого порядку:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + \\ + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

де $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44}$ – дійсні числа, причому принаймні одне з чисел $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ не дорівнює нулю.

Це рівняння називають *загальним рівнянням поверхні другого порядку*. Рівняння поверхні може і не містити всіх трьох змінних x, y, z . Якщо рівняння можна розв'язати відносно z , то одержимо рівняння поверхні у вигляді $z = f(x, y)$.

Поверхня другого порядку як геометричний об'єкт не змінюється, якщо від заданої прямокутної системи координат перейти до іншої. При цьому загальне рівняння і рівняння, знайдене після перетворення координат, будуть еквівалентними.

До поверхонь другого порядку належать, зокрема, циліндричні та конічні поверхні, поверхні обертання, сфера, еліпсоїд, однопорожнинний та двопорожнинний гіперболоїди, еліптичний та гіперболічний параболоїди.

Розглянемо основні поверхні другого порядку, задані канонічними рівняннями, та побудуємо їх. Для вивчення форми поверхні використовують метод паралельних перерізів, який полягає в наступному: поверхня перетинається площинами, паралельними координатним площинам, і визначаються лінії перетину поверхні з даними січними площинами. За виглядом цих ліній визначають форму даної поверхні.

2. Сфера

Сферою називається геометричне місце точок простору, рівновіддалених від однієї і тієї самої точки, яка називається *центром* сфери. Відстань між будь-якою точкою сфери і її центром називається *радіусом* сфери.

Нехай в прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$ точка $C(a; b; c)$ є центром сферичної поверхні радіуса R (рис. 61).

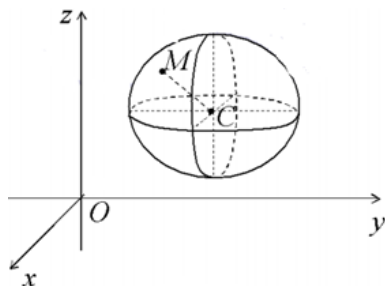


Рис. 61

Візьмемо довільну точку сфери $M(x; y; z)$. Точка M належатиме сфері тоді, коли $|CM| = R$ або

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} = R.$$

Піднісши обидві частини рівняння до квадрату, отримаємо рівняння сфери

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Якщо в рівнянні розкриємо дужки, то матимемо загальне рівняння сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0,$$

де $A = -2a$, $B = -2b$, $C = -2c$, $D = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$.

Зокрема, якщо сфера має центр у початку координат, то її рівняння має вигляд:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

яке називають *канонічним*.

Приклад. Визначити координати центру та знайти радіус сфери, яка задана рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 19 = 0$.

Розв'язування: У даному рівнянні згрупуємо члени, які містять тільки x , тільки y або тільки z , і доповнимо їх до повного квадрату. У результаті одержимо рівняння:

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 + 2z + 1) - 1 - 4 - 1 - 19 = 0,$$

або

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 25.$$

Отже, дане рівняння описує сферу з центром у точці $C(1; 2; -1)$ і радіусом $R = 5$.

3. Циліндричні поверхні

Циліндричною поверхнею (циліндром), називається поверхня, утворена рухом прямої, яка перетинає задану криву і залишається паралельною сталому вектору.

Пряма, що своїм рухом утворює циліндр, називається твірною, а крива, яку перетинають твірні – напрямною циліндра (рис. 62).

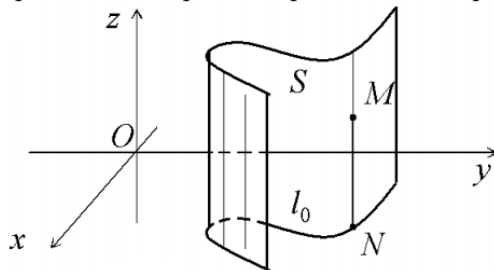


Рис. 62

Циліндрами другого порядку називаються циліндричні поверхні, напрямними яких є лінії другого порядку.

Серед циліндричних поверхонь другого порядку розглянемо рівняння циліндрів, коли твірні паралельні до осі Oz , а напрямна лежить в площині Oxy . Як відомо, їх рівняння не містять координати z . Таким чином рівняння $F(x, y) = 0$ визначає в просторі циліндричну поверхню, твірні якої паралельні до осі Oz , а напрямна в просторі $Oxyz$ визначається двома рівняннями:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Якщо за напрямну лінію в площині $z = 0$ взяти одну з кривих другого порядку: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x^2 + y^2 = R^2$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y^2 = 2px$, то кожне з цих рівнянь, якщо їх віднести до просторової системи координат, зображатиме циліндр 2-го порядку з твірними, паралельними осі Oz .

Еліптичним циліндром називається поверхня, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Рівняння буде зображати циліндр, перерізи якого площинами, перпендикулярними твірним, будуть еліпси з півосями a і b (рис. 63).

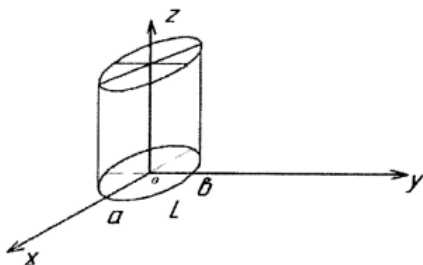


Рис. 63

Поверхня, яка визначається рівнянням $x^2 + y^2 = R^2$, є циліндричною і називається *прямим круговим циліндром*. Її твірні паралельні до осі Oz , а напрямною в площині Oxy є коло.

Гіперболічним циліндром називається поверхня, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Дане рівняння буде зображувати циліндр, у якому плоскі перерізи, що перпендикулярні твірним, будуть гіперболами (рис. 64).

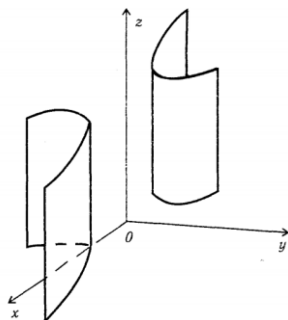


Рис. 64

Параболічним циліндром називається поверхня, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням:

$$y^2 = 2px.$$

Рівняння визначає у просторі циліндр з перпендикулярними до твірних плоскими перерізами у вигляді парабол (рис. 65).

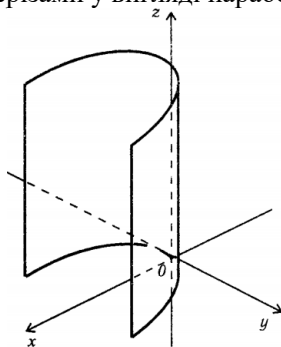


Рис. 65

4. Конічні поверхні. Конус другого порядку

Конічною поверхнею(конусом) називається поверхня, утворена рухом прямої l , яка проходить через одну й ту саму точку і задану криву L .

Рухома пряма називається твірною, а задана крива – напрямною. Будемо вважати, що l – твірна конуса, S – вершина конуса, L – напрямна (рис. 66).

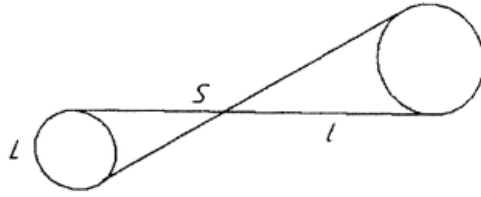


Рис. 66

Якщо напрямна конуса L розміщена паралельно до однієї з координатних площин, то така конічна поверхня описується *однорідним рівнянням другого порядку*.

Зауважимо, що *однорідним рівнянням k -го порядку* називається рівняння

$$F(x, y, z) = 0,$$

ліва частина якого є однорідною функцією k -го порядку, тобто задовольняє умову

$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^k F(x, y, z),$$

де λ – довільний параметр. Якщо $k=2$, то матимемо однорідне рівняння другого порядку.

Окреме місце в геометричних дослідженнях займає конус другого порядку.

Конусом 2-го порядку називається поверхня, яка в прямокутній системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

яке називається *канонічним рівнянням конуса*.

Змінні x, y, z входять у рівняння у парних степенях. Тому, якщо точка $(x; y; z)$ належить цій поверхні, і точки $(\pm x; \pm y; \pm z)$ також належать цій поверхні. Отже, поверхня симетрична відносно координатних осей Ox, Oy, Oz , координатних площин, а також точки $O(0; 0; 0)$, яка називається вершиною конуса.

При побудові конуса використовується метод паралельних перерізів конуса площинами, паралельними до координатних площин.

Розглянемо переріз поверхні площиною $z = h = \text{const}$, де h – довільне дійсне число. Тоді лінія, що отимується у перерізі має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

Якщо $h = 0$, то переріз поверхні площиною $z = h$ складається з однієї точки $O(0; 0; 0)$. При $h \neq 0$ у перерізі поверхні площиною $z = h$ одержимо еліпс:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{ah}{c}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{bh}{c}\right)^2} = 1.$$

Перетнемо конус площиною $x = 0$, тобто площиною Oyz . У результаті отримаємо

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

Таким чином, у перерізі маємо дві прямі, що перетинаються у початку координат

$$z = \pm \frac{c}{b} y.$$

Перерізом поверхні площиною $x = h$, $h \neq 0$, є гіпербола

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}.$$

Аналогічно, коли розглядаємо переріз поверхні площиною $y = h$, тоді лінія перетину є гіперболою. При $y = 0$ у перерізі маємо дві прямі.

Отже, конус заданий канонічним рівнянням, має вигляд (рис. 67):

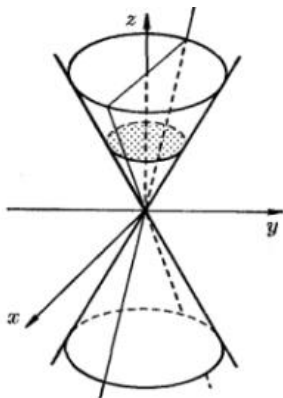


Рис. 67

Приклад. Написати рівняння конуса, якщо він має вершину в точці $A(3; 4; 6)$, його осі симетрії паралельні осям координат і він перетинає площину Oxy по еліпсу, осі якого паралельні осям Ox та Oy , причому еліпс дотикається координатних осей.

Розв'язування: Виходячи з умов на осі симетрії, вершину конуса, а також переріз площиною Oxy , маємо наступне рівняння конуса:

$$\frac{(x-3)^2}{a^2} + \frac{(y-4)^2}{b^2} - \frac{(z-6)^2}{c^2} = 0.$$

Очевидно, що числа a^2 , b^2 , c^2 визначаються з точністю до спільного множника, щоб отримати у перерізі площиною Oxy канонічне рівняння еліпса. Візьмемо $c = 6$, тобто рівняння перерізу матиме вигляд

$$\frac{(x-3)^2}{a^2} + \frac{(y-4)^2}{b^2} - \frac{(0-6)^2}{36} = 0.$$

Оскільки еліпс дотикається координатних осей, то його рівняння

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1.$$

Отже, $a^2 = 9$, $b^2 = 16$ і рівняння конуса:

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{16} - \frac{(z-6)^2}{36} = 0.$$

5. Еліпсоїд

Еліпсоїдом називається поверхня, яка в декартовій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

де a, b, c – додатні числа, що називаються півосями еліпсоїда.

Дане рівняння називається *канонічним рівнянням еліпсоїда*. Якщо $a = b = c = R$, то еліпсоїд перетворюється у сферу радіуса R : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Дослідимо форму еліпсоїда за його канонічним рівнянням. Насамперед, зауважимо, що, оскільки, в рівняння входять лише квадрати координат, то, якщо точка з деякими координатами x, y, z належить еліпсоїду, то всі точки $(\pm x; \pm y; \pm z)$ також будуть належати йому. Це означає, що еліпсоїд є поверхнею, симетричною відносно всіх трьох координатних площин, осей, а також початку координат, які називаються відповідно площинами симетрії, осями симетрії і центром симетрії еліпсоїда.

Знайдемо точки перетину еліпсоїда з осями координат. Підставивши у рівняння $x = 0$, $y = 0$, отримаємо, що еліпсоїд перетинає вісь Oz у точках $(0; 0; -c)$, $(0; 0; c)$. Аналогічно, вісь Ox еліпсоїд перетинає у точках $(-a; 0; 0)$, $(a; 0; 0)$, а вісь Oy – у точках $(0; -b; 0)$, $(0; b; 0)$. Ці точки перетину еліпсоїда з осями координат називаються вершинами еліпсоїда.

Слід зазначити, що оскільки сума трьох доданків лівої частини рівняння дорівнює одиниці, то кожен з них (при дійсних значеннях координат) не може бути більшим від одиниці, тобто:

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Звідси випливає, що координати точок еліпсоїда задовольняють нерівність

$$-a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b, \quad -c \leq z \leq c.$$

Отже, еліпсоїд – це скінченна поверхня, яка повністю лежить всередині паралелепіпеда, розміри якого відповідно дорівнюють $2a$, $2b$, $2c$.

Відстані $2a$, $2b$, $2c$ між вершинами, що лежать на одній осі симетрії, називаються осями еліпсоїда.

Щоб уявити форму еліпсоїда і зобразити його, використаємо метод паралельних перерізів.

Розглянемо переріз поверхні площиною $z = h = \text{const}$, де h – довільне дійсне число. Тоді лінія, що отимується у перерізі має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

Якщо $|h| > c$, $c > 0$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0$, тобто точок перетину поверхні з площинами $z = h$ не існує. Якщо $|h| = c$, тобто $h = \pm c$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, і лінія перетину вироджується у дві точки $(0; 0; -c)$, $(0; 0; c)$. Якщо $|h| < c$, то рівняння лінії еквівалентне наступному рівнянню

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\left(a \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

тобто лінією перерізу є еліпс з півосями

$$a' = a \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}} \quad \text{і} \quad b' = b \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}.$$

Аналогічні лінії отримаємо і при перетині еліпсоїда площинами, паралельними кожній із двох інших його площин симетрії (рис. 68).

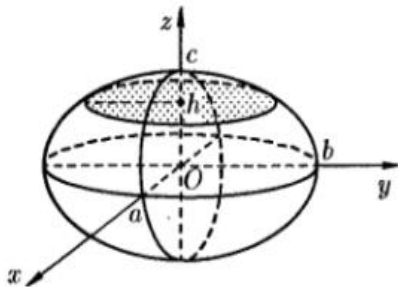


Рис. 68

Приклад. Знайти півосі еліпса, утвореного при перетині еліпсоїда $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$ площиною $z = 2$.

Розв'язування: У рівняння еліпсоїда підставимо $z = 2$, після чого отримаємо

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} + \frac{4}{16} = 1 \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

$$\text{Отже, рівняння еліпса має вигляд} \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ z = 2. \end{cases}$$

Тому півосі еліпса $a = 3$, $b = \sqrt{3}$.

6. Гіперболоїди

Однопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, яка у декартовій системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

де $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ – числові параметри його півосі.

Рівняння називається *канонічним рівнянням однопорожнинного гіперболоїда*.

Ця поверхня розміщена симетрично відносно початку координат, координатні площини є його площинами симетрії, а осі координат – його осями симетрії. Точка $O(0; 0; 0)$ є центром однопорожнинного гіперболоїда, а точки $(\pm a; 0; 0)$, $(\pm b; 0; 0)$ називають його вершинами.

Розглянемо переріз поверхні $z = h = \text{const}$, де h – довільне дійсне число. Тоді лінія, що отримується у перерізі має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\left(a \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Ця лінія для довільного числа h є еліпсом з півосями $a_1 = a \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$ і $b_1 = b \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$. Очевидно, півосі a_1 і b_1 досягають найменшого значення при $h = 0$. При зростанні h півосі a_1 і b_1 будуть збільшуватися.

Розглянемо переріз поверхні площиною $x = h = \text{const}$, де h – довільне дійсне число. Тоді лінія, що отримується у перерізі задається системою рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}, \\ x = h. \end{cases}$$

Таким чином, на площині $x = h$ ця лінія є гіперболою. Якщо $|h| < a$, то дійсною віссю гіперболи є вісь Oy , а уявною віссю – Oz . У цьому випадку канонічне рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{y^2}{\left(b \sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(c \sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}}\right)^2} = 1.$$

Якщо $|h| > a$, то дійсною віссю гіперболи є вісь Oz , а уявною віссю – Oy . В цьому випадку канонічне рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{z^2}{\left(c \sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(b \sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1}\right)^2} = 1.$$

При $|h| = a$ у перерізі маємо дві прямі, що перетинаються у початку координат:

$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0.$$

Аналогічний результат отримаємо, якщо розглянемо переріз поверхні площиною $y = h$.

Однопорожнинний гіперboloїд зображено на рис. 69.

Канонічне рівняння однопорожнинного гіперboloїда може також мати вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

або

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

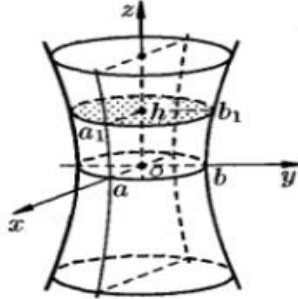


Рис. 69

Двопорожнинним гіперboloїдом називається поверхня, яка в декартовій системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

яке називається *канонічним рівнянням двопорожнинного гіперboloїда*.

Ця поверхня розміщена симетрично відносно початку координат і координатні площини є його площинами симетрії.

Розглянемо її перетин площинами, паралельними координатним площинам.

Площина $z = h$ перетинає поверхню лише тоді, коли $|h| \geq c$, тобто двопорожнинний гіперboloїд – необмежена поверхня, яка складається з двох частин.

Лінії перерізу площинами $z = h$, коли $|h| \geq c$ – це еліпси:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Якщо $h = \pm c$, то еліпси вироджуються в точки $(0; 0; \pm c)$, які називають вершинами двопорожнинного гіперboloїда.

Розглянемо переріз поверхні площиною $x = h$. Тоді лінія, що отримується у перерізі задається системою рівнянь

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{a^2}, \\ x = h. \end{cases}$$

Таким чином, на площині $x = h$ ця лінія є гіперболою, канонічне рівняння якої має вигляд

$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}\right)^2} = 1.$$

Властивості перерізів двопорожнинного гіперboloїда площинами $y = h$ аналогічні властивостям перерізів площинами $x = h$.

Двopожнинний гіперboloїд зображено на рис. 70.

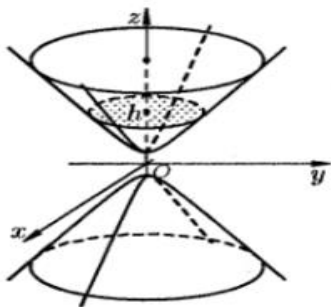


Рис. 70

7. Параболоїди

Еліптичним параболоїдом називається поверхня, визначена таким рівнянням у декартовій системі координат:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z,$$

яке називається *канонічним рівнянням еліптичного параболоїда*.

Очевидно, поверхня симетрична відносно координатних площин Oxz і Oyz та відносно осі Oz , яка є віссю симетрії параболоїда.

Розглянемо переріз поверхні площиною $z = h = \text{const}$, де h – довільне дійсне число. Тоді лінія, що отримується у перерізі має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = h, \\ z = h. \end{cases}$$

Якщо $h < 0$, то рівняння не може задовольнятися при жодних значеннях x та y . Отже, вся поверхня розташована над площиною Oxy . Площина $h = 0$ має з поверхнею одну спільну точку $O(0; 0; 0)$, яка є вершиною параболоїда. Якщо $h > 0$, то перерізом поверхні з площиною $z = h$ є еліпс

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{h})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{h})^2} = 1.$$

У перерізі поверхні площиною $x = h$, отримаємо параболу, яка задана рівнянням:

$$y^2 = b^2 \left(z - \frac{h^2}{a^2} \right).$$

Властивості перерізів $y = h$ аналогічні властивостям перерізів $x = h$. Еліптичний параболоїд зображено на рис. 71.

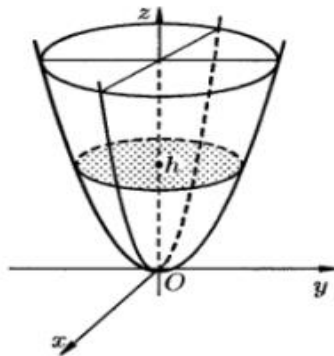


Рис. 71

Гіперболічним параболоїдом називається поверхня, яка в декартовій системі координат визначається рівнянням:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z.$$

Рівняння називається канонічним рівнянням гіперболічного параболоїда, а поверхню називають сідлоподібною. Як бачимо з рівняння поверхня симетрична відносно площин Oxz і Oyz .

Розглянемо переріз поверхні площиною $z = h = \text{const.}$ Тоді лінія, що отримується у перерізі має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = h, \\ z = h. \end{cases}$$

При цьому, якщо $h > 0$, то перерізом поверхні з площиною $z = h$ є гіпербола

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{h})^2} - \frac{y^2}{(b\sqrt{h})^2} = 1.$$

Якщо $h < 0$, то перерізом є гіпербола, яка задана рівнянням:

$$\frac{y^2}{(b\sqrt{-h})^2} - \frac{x^2}{(a\sqrt{-h})^2} = 1.$$

Якщо $h = 0$, то у перерізі – дві прямі, що перетинаються у початку координат:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

Перерізом поверхні площиною $x = h$ є парабола

$$y^2 = -b^2 \left(z - \frac{h^2}{a^2} \right).$$

Перерізом поверхні площиною $y = h$ також є парабола, яка визначається рівнянням:

$$x^2 = a^2 \left(z + \frac{h^2}{a^2} \right).$$

Використовуючи встановлені характеристики, побудуємо схематично гіперболічний параболоїд (рис. 72).

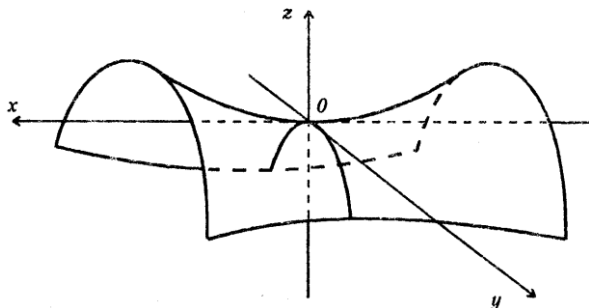


Рис. 72

Приклад. Знайти точки перетину еліптичного параболоїда $z = \frac{x^2}{4} + y^2$ з прямою $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-10}{4}$.

Розв'язування: Запишемо рівняння прямої у параметричній формі:

$$x = 2t + 2, \quad y = -t - 1, \quad z = 4t + 10.$$

Підставляючи вирази для x , y , z в рівняння параболоїда, знайдемо параметр t :

$$4t + 10 = \frac{(2t + 2)^2}{4} + (-t - 1)^2$$

або

$$4t + 10 = 2t^2 + 4t + 2.$$

Звідси $t_1 = 2$, $t_2 = -2$. Підставляючи отримані значення параметра в параметричне рівняння прямої, знайдемо точки перетину: $A(6; -3; 18)$ і $B(-2; 1; 2)$.

Завдання для самостійної роботи

1. Які поверхні визначаються рівняннями:

а) $y^2 + z^2 = 9$;

б) $x^2 = 4z$;

в) $x^2 - 4z^2 = 4$;

г) $9x^2 + 4y^2 - 18x - 36 = 0$.

2. Визначити координати центра M_0 і радіус сфери, яка задана рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 8z + 17 = 0$.

3. Скласти рівняння кругового циліндра, вісь якого проходить через точку $P(1; 2; -1)$, твірна паралельна осі Oz , а радіус його напрямної дорівнює 3.

4. Скласти рівняння конуса, вершина якого міститься у початку координат, а напрямну задано рівнянням $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1, \\ y = 2. \end{cases}$

5. Написати рівняння поверхні, утвореної обертанням гіперболи $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ навколо осі Oy .

6. Знайти точку перетину двопорожнинного гіперboloїда $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} = -1$ з прямою $x - 3 = y - 1 = \frac{z-6}{3}$.

7. Методом перерізів дослідити форму і розміщення відносно системи координат поверхню $x^2 - y^2 = 2z$.

8. Доведіть, що пряма $\frac{x-3}{0} = y = \frac{7}{2}$ лежить на однопорожнинному гіперboloїді: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{4} = 1$.

9. Знайти центр і півосі еліпсоїда, заданого рівнянням:

$$3x^2 + 4y^2 + 6z^2 - 6x + 16y - 36z + 49 = 0.$$

10. Встановити, що лінією перетину гіперболічного параболоїда $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 6z$ з площиною $y + 6 = 0$ є парабола. Знайти її параметр та вершину.

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення поверхні другого порядку. Які ви знаєте поверхні другого порядку?

2. Дайте визначення сфери. Запишіть рівняння сфери з центром у точці $O_1(a;b;c)$ і радіусом R .

3. Яка поверхня називається циліндричною? Від чого залежить назва циліндричних поверхонь? Наведіть приклади циліндричних поверхонь.

4. Запишіть рівняння прямого кругового, еліптичного, параболічного циліндра.

5. Скільки змінних наявні в рівняннях циліндричних поверхонь? Як визначається змінна, що відсутня в рівнянні циліндричної поверхні?

6. Дайте визначення конічної поверхні. Запишіть рівняння конічної поверхні, якщо пряма паралельна площині Oxy .

7. Сформулюйте правило, за яким за відомим рівнянням обертаючої лінії можна одержати рівняння поверхні обертання. Наведіть приклади.

8. Запишіть рівняння тривісного еліпсоїда, однопорожнинного гіперболоїда, двопорожнинного гіперболоїда.

9. Запишіть рівняння еліптичного параболоїда, гіперболічного параболоїда.

ЗАВДАННЯ ДО МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ

Тема «Матриці та дії над ними.
Визначники. Способи обчислення визначників»

Варіант 1

1. Обчислити:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & -7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix};$$

в) $(A - 3B) \cdot C^T$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -6 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

2. Обчислити визначники:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} -1 & 3 & -7 \\ 0 & 2 & -3 \\ 5 & 6 & -4 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати нерівність:

$$\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$$

4. Знайти значення многочлена $f(A)$ від матриці A , якщо:

$$f(x) = x^2 - 3x + 5, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Варіант 2

1. Обчислити:

$$а) 3 \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & -7 & 0 \end{pmatrix};$$

$$б) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$$

в) $A \cdot (2B + C)^T$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 2 \\ 7 & -13 \end{pmatrix}.$$

2. Обчислити визначники:

$$а) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}; \quad б) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати рівняння:

$$\begin{vmatrix} x-4 & x-8 \\ \sqrt{x}+2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

4. Знайти значення многочлена $f(A)$ від матриці A , якщо:

$$f(x) = x^2 + 4x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Тема «Обернена матриця. Ранг матриці. Матричні рівняння.
Системи лінійних алгебраїчних рівнянь»**

Варіант 1

1. Розв'язати матричні рівняння:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & -2 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$

2. Обчислити ранг матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -4 \\ -3 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'язати системи рівнянь: а) методом Крамера; б) матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

4. Дослідити на сумісність і знайти розв'язок системи рівнянь, користуючись методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 - x_4 = -3. \end{cases}$$

Варіант 2

1. Розв'язати матричні рівняння:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Обчислити ранг матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'язати системи рівнянь: а) методом Крамера; б) матричним методом:

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_3 = -7, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

4. Дослідити на сумісність і знайти розв'язок системи рівнянь, користуючись методом Гаусса:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ -5x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

**Тема «Вектори і лінійні операції над ними.
Лінійна залежність векторів. Розклад вектора за базисом.
Системи координат. Координати вектора»**

Варіант 1

1. Знайти координати, довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$, його орт, якщо відомо, що $A(2; -3; -5)$, $B(-1; 3; 2)$.
2. Відомо, що $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$.
3. При яких значеннях p і q вектори $\vec{a} = (p; 1; -2)$ та $\vec{b} = (2; q; -1)$ колінеарні?
4. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = (\sqrt{2}; -4; 6)$ на вісь, яка складає з координатними осями Ox і Oz кути $\alpha = 45^\circ$ і $\gamma = 60^\circ$ відповідно, а з віссю Oy – тупий кут β .
5. Довести, що вектори $\vec{p} = \vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{q} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{r} = -\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k}$ не компланарні і знайти розклад вектора $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ за векторами $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$.

Варіант 2

1. Задано вектори $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ і $\vec{b} = (-1; 4; 5)$. Знайти проекцію вектора $3\vec{a} - 2\vec{b}$ на вісь вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(1; -2; 3)$ і $B(4; 2; 3)$.
2. Відомо, що $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Знайти $|\vec{a} - \vec{b}|$.
3. Перевірити, що точки $A(2; 4; 1)$, $B(3; 7; 5)$, $C(4; 10; 9)$ лежать на одній прямій?
4. Вектор $\vec{a}$ утворює з координатними осями Ox , Oy відповідно кути $\alpha = \frac{\pi}{3}$ і $\beta = \frac{2\pi}{3}$. Знайти його координати, якщо $|\vec{a}| = 2$.
5. Довести, що вектори $\vec{a} = (5; 4; 3)$, $\vec{b} = (-3; -1; 2)$, $\vec{c} = (-3; 1; 3)$ утворюють базис тривимірного векторного простору та розкласти вектор $\vec{d} = (12; 9; 10)$ за цим базисом.

**Тема «Скалярний добуток векторів.
Векторний та мішаний добуток векторів»**

Варіант 1

1. Задано три послідовні вершини паралелограма $ABCD$: $A(2; -2; 1)$, $B(1; 0; 2)$ і $C(0; -1; 3)$. Знайти довжину висоти паралелограма, що опущена з вершини B на сторону AD .

2. Задано вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, які задовольняють умові $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = 0$. Обчислити $\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 1$.

3. При якому значенні β : а) вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні; б) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні, якщо $\vec{a} = (0; -4; 1)$, $\vec{b} = (-5; \beta; 1)$, $\vec{c} = (1; 2; 3)$?

4. Знайти координати вектора $\vec{c}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (4; -2; -3)$ та $\vec{b} = (0; 1; 3)$, утворює з віссю Oz тупий кут і $|\vec{c}| = 26$.

5. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, якщо $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$, $C(1; 2; 4)$, $D(-1; 1; 1)$.

Варіант 2

1. Обчислити $|\vec{a} \times \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$.

2. При якому значенні β точки $A(-3; 5; 2)$, $B(5; 3; -1)$, $C(-1; 3; -3)$, $D(\beta; -5; 1)$ лежать в одній площині?

3. Знайти вектор $\vec{p}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (3; 1; 2)$ та $\vec{b} = (1; 3; 2)$ і задовольняє умові $\vec{p} \cdot \vec{c} = 8$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

4. При якому α площа паралелограма, що побудований на векторах $\vec{a} = (1; -2; -3)$ і $\vec{b} = (\alpha; 0; 4)$, буде дорівнювати $5\sqrt{5}$ кв. од.

5. Задано вектори $\vec{a} = (3; 1; 2)$, $\vec{b} = (-4; 3; -1)$, $\vec{c} = (2; 3; 4)$, $\vec{d} = (14; 14; 20)$. Визначити: а) орієнтацію трійки векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$; б) об'єм трикутної піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Тема «Пряма на площині. Лінії другого порядку»

Варіант 1

1. Записати рівняння прямої у відрізках, яка проходить через точку $M(-1; 2)$ і має напрямний вектор $\vec{s} = (3; -1)$. Знайти відстань від початку координат до прямої.

2. Знайти проєкцію точки $P(8; 2)$ на пряму $3x - y - 2 = 0$ і точку, симетричну точці P відносно даної прямої.

3. Дано координати трьох вершин трапеції $A(-3; -2)$, $B(4; -1)$, $C(1; 3)$, діагоналі якої взаємно перпендикулярні. Знайти координати четвертої вершини трапеції D .

4. Знайти точку перетину медіан трикутника, якщо відомі координати його вершин: $A(-1; 7)$, $B(-5; 1)$, $C(9; -5)$.

5. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо він проходить через точку $M_0\left(2; -\frac{5}{3}\right)$, а його ексцентриситет дорівнює $\varepsilon = \frac{2}{3}$.

6. Привести рівняння параболи $x^2 - 6x + 2y + 7 = 0$ до канонічного виду. Знайти координати фокуса та рівняння директриси.

Варіант 2

1. 3 точки перетину прямих, які задано рівняннями $4x + 3y - 5 = 0$ і $8x - 5y + 23 = 0$ опущено перпендикуляр до першої прямої. Скласти рівняння цього перпендикуляра.

2. Знайти точку, симетричну точці $A(-2; -9)$ відносно прямої $2x + 5y = 38$.

3. Обчислити площу та периметр трикутника, утвореного координатними осями і прямою $3x - 4y - 12 = 0$.

4. У трикутнику з вершинами $A(2; 3)$, $B(6; 3)$, $C(6; -5)$ визначити довжину бісектриси його внутрішнього кута, проведеної з вершини B .

5. Записати рівняння кола, що проходить через точки $A(3; 1)$, $B(-2; 6)$, $C(-5; -3)$.

6. Написати рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі Oy симетрично відносно початку координат, якщо відстань між директрисами рівна 8, а ексцентриситет гіперболи $-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Тема «Площина і пряма у просторі. Поверхні другого порядку»

Варіант 1

1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2; 2; 1)$ перпендикулярно двом заданим площинам: $2x - y + z - 3 = 0$ і $-x + 3z + 7 = 0$.

2. Дано три точки $M_1(1; 2; 0)$, $M_2(2; 1; 1)$, $M_3(3; 0; 1)$. Знайти координати нормального вектора площини та відстань від початку координат до площини.

3. Знайти кут між прямими, які задані рівняннями:

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0 \end{cases}$$

4. Чи належить пряма $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -3 - t, \\ z = -2 + 5t \end{cases}$ площині, яка задана рівнянням $4x + 3y - z + 3 = 0$.

5. Знайти проекцію на площину Oxy лінії перетину еліпсоїда $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ і площини $x + 4z - 4 = 0$.

Варіант 2

1. Написати рівняння площини, що проходить через точки $A(1; -1; 2)$, $B(3; 0; -3)$ паралельно вектору $\vec{a} = (2; 1; -1)$.

2. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від площин $x + 4y - 3z - 2 = 0$, $5x + z + 8 = 0$.

3. Встановити взаємне розташування прямих:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4} \quad \text{і} \quad \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}.$$

4. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $A(1; 2; 3)$ перпендикулярно до прямої, яка задана рівнянням $\frac{x}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{1}$.

5. По якій лінії площина $x + y + z + 1 = 0$ перетинає гіперболічний параболоїд $x^2 - y^2 = 2z$.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

РОЗДІЛ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1. Визначник – це:
 - 1) матриця;
 - 2) число;
 - 3) вектор;
 - 4) поняття, якому визначення не подано.
2. Що буде з визначником, якщо поміняти місцями будь-які два стовпці?
 - 1) визначник від цього не зміниться;
 - 2) абсолютна величина визначника збільшиться;
 - 3) абсолютна величина визначника зменшиться;
 - 4) абсолютна величина визначника залишиться без змін.
3. Чому дорівнює визначник третього порядку, в якому будь-які 2 рядки співпадають?
 - 1) нулю;
 - 2) добутку елементів, що не співпадають;
 - 3) добутку елементів головної діагоналі;
 - 4) добутку елементів додаткової діагоналі.
4. Чому дорівнює визначник третього порядку, усі елементи третього рядка якого дорівнюють нулю?
 - 1) добутку елементів головної діагоналі;
 - 2) сумі добутку елементів першого та другого рядка;
 - 3) нулю;
 - 4) серед перерахованих відповідей правильного немає.
5. Що можна сказати про дві матриці, якщо рядки першої є стовпцями другої?
 - 1) визначник другої матриці є величиною зворотною по відношенню до визначника першої;
 - 2) ці матриці не відрізняються одна від одної;
 - 3) їх визначники рівні між собою;
 - 4) серед перерахованих відповідей правильної немає.
6. Як називається матриця, елементи головної діагоналі якої одиниці, а всі інші елементи – нулі?
 - 1) нульова;
 - 2) одинична;
 - 3) кутова;
 - 4) трикутна.

7. Теорема Кронекера-Капеллі визначає умову, за якої:

- 1) СЛАР буде визначеною;
- 2) СЛАР буде сумісною;
- 3) СЛАР буде однорідною.

8. Як зміниться значення визначника, якщо помножити на 4 один з його рядків і на 3 – один з його стовпців?

- 1) не зміниться;
- 2) збільшиться у 7 разів;
- 3) збільшиться у 12 разів.

9. Знайти матрицю $3A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) $3A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) $3A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2) $3A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) $3A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. Чому дорівнюють елементи a та b , якщо виконується рівність

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}?$$

1) $a = 0, b = 6$

3) $a = 1, b = 2$

2) $a = -1, b = 3$

4) таких значень не існує.

11. Дано матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Обчислити AB .

1) $AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3) $AB = -6$

2) $AB = (4)$

4) $AB = (1 \ 2 \ 9)$

12. Знайти суму матриць $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 7 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 7 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

13. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x - y = 2. \end{cases}$

1) $x = 0, y = 3$

2) $x = 2, y = 0$

3) $x = -3, y = 4$

4) $x = 1, y = 2$

14. Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Яку з вказаних дій

можна виконати:

1) $A + B$

2) AB

3) BA

4) $A - B$

15. Дано матрицю $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Знайти обернену матрицю A^{-1} .

1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ 2) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ 4) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

16. Обчислити AB , якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1) $AB = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}$ 3) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

2) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 4) $AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

17. Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Знайти $A - B$.

1) $A - B = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$ 3) $A - B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2) $A - B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -11 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ 4) $A - B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

18. Матрицю A^{-1} називають оберненою до матриці A , якщо:

1) $A + A^{-1} = 0$

2) $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, де E – одинична матриця

3) $\frac{A}{A^{-1}} = 1$

4) $A - A^{-1} = 1$

19. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$.

1) 6

2) 5

3) -1

4) 13

20. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$.

1) 5

2) 27

3) 0

4) 9

21. Розв'язати рівняння $\begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = 3$.

1) $x = 1$

2) $x = \pm 1$

3) $x = 2$

4) $x = \pm 2$

22. Обчислити $2A - B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) $2A - B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

2) $2A - B = \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix}$

3) $2A - B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

4) $2A - B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

23. Знайти матрицю A^3 , якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1) $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

3) $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$

2) $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4) $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

24. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 6 \\ 7 & -2 & 8 \end{vmatrix}$.

1) 52

2) 28

3) 15

4) 3

25. Мінор M_{12} визначника $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ дорівнює:

1) -6

2) 2

3) 4

4) 36

26. Алгебраїчне доповнення A_{23} визначника $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ дорівнює:

1) -6

2) 6

3) -12

4) 12

27. Визначник $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ дорівнює:

1) -62

2) -60

3) 20

4) 26

28. Матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ можна помножити на матрицю:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

29. Скільки рядків буде мати матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

1) 1

2) 2

3) 3

4) 4

30. Елемент a_{12} матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ дорівнює:

1) 1

2) 2

3) 5

4) 3

31. Щоб вирішити, чи є СЛАР сумісною, треба:

1) знайти ранги матриці системи та розширеної матриці системи;

2) знайти визначник матриці системи;

3) до всіх елементів матриці знайти алгебраїчні доповнення.

32. Як зміниться значення визначника, якщо його третій рядок помножити на 2 та додати до нього перший, помножений на 5?

1) не зміниться;

2) збільшиться у 2 рази;

3) збільшиться у 10 разів.

33. Які перетворення виконали над матрицею $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, якщо в

результаті було отримано матрицю $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 7 & 3 \\ -9 & 4 & 5 \end{pmatrix}$?

1) відняли від першого рядка третій, помножений на 2;

2) відняли від першого стовпчика третій, помножений на 2;

3) розділили другий рядок на (-2) , а третій помножили на (-9) ;

4) відняли від першого стовпчика третій, помножений на 2 та розділили другий рядок на (-2) , а третій помножили на (-9) .

34. Яка з матриць є узгодженою для матриці $A_{4 \times 3}$?

1) $B_{4 \times 3}$

2) $B_{3 \times 4}$

3) $B_{4 \times 4}$

4) $B_{1 \times 3}$

35. Яка з поданих матриць є транспонованою A^T для матриці

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

36. Обчислити матрицю $C = 2A - 3B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) $C = \begin{pmatrix} -1 & 12 & -7 \\ 8 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

3) $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 11 \\ -16 & 13 & 5 \end{pmatrix}$

2) $C = \begin{pmatrix} -1 & -13 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4) $C = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 9 \\ -14 & 12 & 5 \end{pmatrix}$

37. Визначник $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ дорівнює:

1) 0

2) 1

3) -8

4) -16

38. Чому дорівнює невідомий елемент визначника $\begin{vmatrix} 0 & 5 & -1 \\ x & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$, якщо сам визначник дорівнює -54?

1) 9

2) -6

3) 6

4) -9

39. Коли головний визначник системи лінійних рівнянь $\Delta=0$ і хоча б один із визначників, утворених із головного заміною стовпчика коефіцієнтів при x_i на стовпчик вільних членів $\Delta x_i \neq 0$, то, відповідно до формул Крамера, система лінійних рівнянь:

- 1) має єдиний розв'язок;
- 2) має безліч розв'язків;
- 3) не має розв'язків;
- 4) кількість розв'язків залежить від вільних членів.

40. Якщо в системі лінійних рівнянь, кількість рівнянь не співпадає з кількістю невідомих, то для відшукування розв'язку можна застосовувати:

- 1) формули Крамера;
- 2) метод Гаусса;
- 3) матричний метод;
- 4) всі три способи.

41. Дана система лінійних рівнянь
$$\begin{cases} 2x + 3z = 2 \\ x - y - z = 1 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$$
. Вкажіть вільні

члени:

- 1) (2; 1; 2)
- 2) (0; -1; 2)
- 3) (3; -1; 1)
- 4) (2; 1; 3)

42. Множина (2; 1; -1) є розв'язком системи лінійних рівнянь:

$$1) \begin{cases} 3x + y + 2z = 11 \\ 4x + 2y - 2z = 3 \\ 5x + 6y - 5z = 4 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ -x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = -1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 5x + 3y + z = 14 \\ -3x + 12y - 8z = 1 \\ 2x + 3y + 5z = 8 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

43. Яка з поданих систем лінійних рівнянь має безліч розв'язків?

$$1) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y - 2z = 3 \\ x + y - z = 4 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 3y + 4z = 7 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 2 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + 5y - z = 8 \end{cases}$$

РОЗДІЛ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

1. Знайти довжину вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(2;4;7)$, $B(-1;3;8)$.
- 1) 3,5
 - 2) $\sqrt{11}$
 - 3) 5
 - 4) $\sqrt{7}$
2. Які з векторів колінеарні?
- 1) $\vec{a} = (2; -2)$, $\vec{b} = (1; 2)$
 - 2) $\vec{a} = (3; -1)$, $\vec{b} = (3; 1)$
 - 3) $\vec{a} = (-1; -2)$, $\vec{b} = (2; 4)$
 - 4) $\vec{a} = (3; 1)$, $\vec{b} = (6; -1)$
3. Знайти вектор $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (4; -2; 1)$, $\vec{b} = (2; -1; 3)$.
- 1) $\vec{c} = (2; -1; -7)$
 - 2) $\vec{c} = (-2; -2; 7)$
 - 3) $\vec{c} = (1; -2; 3)$
 - 4) $\vec{c} = (2; 1; 7)$
4. Дано чотирикутник $ABCD$. Знайти $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
- 1) $\overrightarrow{AD}$
 - 2) $\overrightarrow{CD}$
 - 3) $\overrightarrow{AC}$
 - 4) $\overrightarrow{BD}$
5. Знайти скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо $\vec{a} = (2; 5; -3)$, $\vec{b} = (-1; 3; 4)$.
- 1) 4
 - 2) 1
 - 3) -6
 - 4) 12

6. Які з векторів перпендикулярні?

1) $\vec{a} = (4; -2)$, $\vec{b} = (1; 2)$

2) $\vec{a} = (-3; -1)$, $\vec{b} = (3; -1)$

3) $\vec{a} = (-2; 3)$, $\vec{b} = (1; 2)$

4) $\vec{a} = (3; 1)$, $\vec{b} = (6; -1)$

7. Дано $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -5$. Знайти $\cos \varphi$.

1) $\frac{1}{4}$

2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) -1

4) $-\frac{5}{12}$

8. Дано вектори $\vec{a} = (-3; -1; 2)$, $\vec{b} = (3; -1; 4)$. Знайти $\cos \varphi$.

1) 0

2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) -1

4) $\frac{1}{2}$

9. Дано $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 6$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Знайти $(\vec{a} + 2\vec{b})(3\vec{a} - \vec{b})$.

1) $\frac{3}{2}$

2) 0

3) 4

4) -3

10. Знайти початок вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $\overrightarrow{AB} = (-3; 2; 7)$, $B(4; -1; 5)$.

1) $A(-7; 3; 2)$

2) $A(7; -3; -2)$

3) $A(4; -1; 5)$

4) $A(3; -2; -7)$

11. Дано вектори $\vec{a} = (2; -1; 3)$, $\vec{b} = (-2; 4; -1)$. Знайти векторний добуток $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

1) $\vec{c} = (6; 5; -1)$

2) $\vec{c} = (-11; -4; 6)$

3) $\vec{c} = (-2; -3; -5)$

4) $\vec{c} = (11; 4; -6)$

12. При якому значенні λ вектори $\vec{a} = (-3; -1; 2)$ і $\vec{b} = (3; -1; \lambda)$ перпендикулярні?

1) -2

2) 4

3) -4

4) 7

13. Дано вектори $\vec{a} = (2; 5; -3)$, $\vec{b} = (2; 4; -3)$. Знайти $|3\vec{a} - 2\vec{b}|$.

1) 62

2) 8

3) -6

4) $\sqrt{62}$

14. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a} = (2; 4; -3)$, $\vec{b} = (2; -2; 1)$, $\vec{c} = (5; -1; -2)$.

1) 5

2) 26

3) 22

4) -12

15. Знайти вектор $\vec{c} = \frac{3}{2}\vec{a} - 2\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (4; -2; 6)$, $\vec{b} = (1; 2; -3)$.

$$1) \vec{c} = (4; -7; 15)$$

$$2) \vec{c} = (-4; -7; -15)$$

$$3) \vec{c} = (-4; -7; 15)$$

$$4) \vec{c} = (15; -7; 4)$$

16. Для вектора $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, у якого $|\vec{a}| = 13$, $a_y = 12$, $a_z = 4$,

знайти a_x .

$$1) \pm 3$$

$$2) 1$$

$$3) \pm 5$$

$$4) -7$$

17. Дано вектор $\vec{a} = (4; 5; -3)$. Знайти координати орта $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$.

$$1) \vec{a}_0 = \left(-\frac{4}{5}; -1; \frac{3}{5} \right)$$

$$2) \vec{a}_0 = (4; 5; -3)$$

$$3) \vec{a}_0 = \left(\frac{4}{5\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{3}{5\sqrt{2}} \right)$$

$$4) \vec{a}_0 = \left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}; -1 \right)$$

18. Дано вектори $\vec{a} = (4; 1; -2)$, $\vec{b} = (-1; 2; 2)$. Знайти проєкцію

$$np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

$$1) 3$$

$$2) -6$$

$$3) 6$$

$$4) -2$$

19. Знайти скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=7$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

1) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

2) $-14\sqrt{2}$

3) $14\sqrt{2}$

4) 14

20. Знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(4; -2; 3)$, $B(1; 2; -2)$.

1) $\overrightarrow{AB} = (-5; 4; -3)$

2) $\overrightarrow{AB} = (1; 2; -3)$

3) $\overrightarrow{AB} = (-3; 4; -5)$

4) $\overrightarrow{AB} = (3; -4; 5)$

21. У якому випадку мішаний добуток трьох векторів $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ дорівнює нулю?

1) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ взаємно перпендикулярні

2) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лінійно незалежні

3) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – компланарні

4) вектор $\vec{a} + \vec{b}$ перпендикулярний до вектора $\vec{c}$.

22. Відомо, що $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ як на сторонах, дорівнює:

1) 4

2) $4\sqrt{2}$

3) $4\sqrt{3}$

4) 8

23. Знайти вектор $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$, якщо $A(1; -4; 0)$, $B(-1; 2; -3)$, $C(1; -2; 1)$.

1) $(1; 4; -8)$

2) $(2; -4; 4)$

3) $(-2; 2; 5)$

4) $(4; -10; 7)$

24. Довжина якого з векторів дорівнює $|\vec{a}| = 5$?

- 1) $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$
- 2) $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\sqrt{3}\vec{k}$
- 3) $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\sqrt{3}\vec{k}$
- 4) $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$

25. Нехай задано вектори $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ та $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$. Ці вектори будуть паралельні, якщо:

- 1) $a_1b_1 = a_2b_2 = a_3b_3$
- 2) $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$
- 3) $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2} \neq \frac{a_3}{b_3}$

26. Визначити $2\vec{a} - 3\vec{b}$ для векторів $\vec{a} = (3; -4; 1)$ і $\vec{b} = (-1; 2; 6)$:

- 1) $(9; -14; -16)$
- 2) $(3; -2; -16)$
- 3) $(-3; -14; -16)$

27. Знайти довжину вектора $\vec{MN}$, якщо $M(-5; 9; 2)$, $N(5; 4; 12)$.

- 1) 15
- 2) 10
- 3) 25
- 4) -10

28. У якому випадку $\text{pr}_l \vec{a} = 0$?

- 1) вектор $\vec{a}$ паралельний до осі l
- 2) вектор $\vec{a}$ утворює з віссю l кут 30°
- 3) вектор $\vec{a}$ утворює з віссю l кут 45°
- 4) вектор $\vec{a}$ перпендикулярний до осі l

29. Які три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис у тривимірному просторі?

1) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють у просторі базис, якщо вони лінійно залежні

2) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють у просторі базис, якщо їх мішаний добуток $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$

3) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють у просторі базис, якщо $\vec{a} \parallel \vec{b} \parallel \vec{c}$

4) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють у просторі базис, якщо вони лінійно незалежні.

30. Знайти косинус кута між векторами $\vec{a} = (6; 0; 0)$ і $\vec{b} = (1; -2; 2)$.

1) $-\frac{1}{3}$

2) $\frac{2}{3}$

3) $-\frac{2}{3}$

4) $\frac{1}{3}$

31. Векторний добуток колінеарних векторів дорівнює:

1) нульовому вектору

2) одиничному вектору

3) ортонормованому вектору

4) правильної відповіді немає

32. При якому цілому значенні параметра m вектори $\vec{a} = (4; -5; -6)$ та $\vec{b} = (-8; 2m; 12)$ колінеарні?

1) 5

2) $-0,5$

3) -2

4) 1

33. Якщо мішаний добуток трьох векторів дорівнює нулю, то ці вектори:

1) компланарні

2) колінеарні

3) перпендикулярні

4) одиничні

34. Які два вектори перпендикулярні:

1) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$

2) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$

3) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$

4) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$

35. Для якої пари векторів площа паралелограма, побудованого на них, як на сторонах, дорівнює $S = \sqrt{26}$ кв. од?

1) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

2) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$

3) $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

4) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$

РОЗДІЛ 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ ТА В ПРОСТОРИ

1. Яке з наведених рівнянь є рівнянням прямої на площині?

1) $y = 2x^2$

2) $x^2 = 2y$

3) $3x + 4y + 7 = 0$

4) $x^2 + y^2 = 1$

2. Яке з наведених рівнянь є рівнянням прямої, що проходить через початок координат?

1) $x^2 - y^2 = 1$

2) $y = x$

3) $y = x^3 + 1$

4) $x^4 + y^4 = 16$

3. Яке з наведених рівнянь є рівнянням прямої на площині, яка перпендикулярна осі Ox ?

1) $x + 1 = 0$

2) $y = x^3$

3) $y = x^2$

4) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

4. Яке з наведених рівнянь є рівнянням прямої у відрізках?

1) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$

2) $xy = 15$

3) $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$

4) $x^3 + y^3 = -1$

5. Яке з наведених рівнянь задає еліпс на площині?

1) $y = x^5 + 3$

2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

3) $x^3 + y^3 = -27$

4) $x^8 - y = 4$

6. Знайти відстань від точки $A(1; -2)$ до прямої $8x - 6y + 15 = 0$.

1) 3,5

2) 5

3) 4,5

4) -3,5

7. Яке з наведених рівнянь задає параболу на площині?

1) $y^2 = 4x$

2) $y = \frac{3}{x}$

3) $y = \frac{x^3}{27}$

4) $y = x^7$

8. Яке з наведених рівнянь задає гіперболу на площині?

1) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

2) $y^4 = 5x + 3$

3) $x^3 + y^3 = 8$

4) $x^2 + y^2 = 0$

9. Яке з наведених рівнянь задає площину?

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 81$

2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$

3) $2x + y + 3z + 1 = 0$

4) $xyz = 1$

10. Рівняння прямої, яка проходить через точки $A(a; 0)$ та $B(0; b)$, має вигляд:

1) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$

2) $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$

$$3) \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

11. Яке з наведених рівнянь задає пряму в просторі?

$$1) (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 9$$

$$2) \frac{x-4}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-7}{-5}$$

$$3) z = x^2 + y^2$$

$$4) xy + xz + yz = 16$$

12. Яке з наведених тверджень є справедливим для двох прямих у просторі з напрямними векторами $\vec{s}_1 = (1, 2, 3)$ та $\vec{s}_2 = (1, 2, 3)$?

1) прямі паралельні або співпадають

2) прямі перпендикулярні

3) прямі не можуть існувати

4) прямі перетинаються під кутом $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

13. Знайти координати точок перетину прямих $y = 3x - 2$ та $y = 2x + 1$.

$$1) (2; -3)$$

$$2) (1; 1)$$

$$3) (-4; 2)$$

$$4) (3; 7)$$

14. На площині $2x + 3y - z + 4 = 0$ знаходиться точка, у якої відомі координати $x = 10$, $z = 3$. Знайти координату y ?

$$1) 17$$

$$2) 7$$

$$3) -11$$

$$4) -7$$

15. Визначити взаємне розміщення точки $A(-1; 2)$ і кола

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9.$$

1) A є точкою, через яку коло проходить

2) A є зовнішньою точкою для круга, обмеженого цим колом

3) A є центром даного кола

4) A є внутрішньою точкою для обмеженого цим колом круга, яка відрізняється від його центра

16. Які з наведених рівнянь є рівняннями прямої, що проходить через точку $M(2; -1; 3)$ паралельно вектору $\vec{a} = (3; -1; 2)$?

1) $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}$

2) $2 \cdot (x-3) = -1 \cdot (y+1) = 3 \cdot (z-2)$

3) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{2}$

4) $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}$

17. Яке з наведених тверджень є правильним?

1) рівняння $z = 0$ є рівнянням осі Oz ;

2) рівняння $z = 0$ є рівнянням площини Oxz ;

3) рівняння $z = 0$ є рівнянням прямої, перпендикулярної осі Oz ;

4) рівняння $z = 0$ є рівнянням прямої, не перпендикулярної площині Oxy .

18. Яке з наведених рівнянь є рівнянням площини, що проходить через точку $A(-7; 0; 3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (1; 2; 4)$?

1) $x + 2y - 4z - 10 = 0$

2) $x + 2y + 4z - 5 = 0$

3) $x - 2y - 4z + 3 = 0$

4) $2y - x - 4z - 4 = 0$

19. Яке з наведених рівнянь є рівнянням прямої, що проходить через точку $M(1; 0; -3)$ перпендикулярно до площини $x - 3y + 2z + 4 = 0$?

1) $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{2}$

2) $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{2}$

3) $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{-2}$

4) $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+3}{-2}$

20. Вказати точку симетричну точці $M(-2; 1; 3)$ відносно початку координат $O(0; 0; 0)$?

- 1) $A(2; -1; -3)$
- 2) $B(-2; -1; -3)$
- 3) $C(2; -1; 3)$
- 4) $D(2; 1; 3)$

21. Яке з наведених рівнянь є рівнянням параболі, вершина якої знаходиться у початку координат, а вісь співпадає з віссю Ox і яка проходить через точку $M(2; -4)$?

- 1) $y = \frac{1}{4}x^2$
- 2) $y^2 = 8x$
- 3) $y = \frac{1}{8}x^2$
- 4) $y^2 = 4x$

22. Яка з наведених точок лежить на прямій $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-1}$?

- 1) $M_1(2; 1; 9)$
- 2) $M_2(-1; -5; 3)$
- 3) $M_3(2; -1; 5)$
- 4) $M_4(0; 1; -5)$

23. Яка з наведених площин паралельна площині Oxy ?

- 1) $-5x + 7z + 9 = 0$
- 2) $-3x - 2y + 5 = 0$
- 3) $2z + 5 = 0$
- 4) $2z + 5y = 0$

24. Написати канонічні рівняння прямої, що проходить через початок координат та паралельна осі Oz .

- 1) $5x + 3z - 9 = 0$
- 2) $\frac{x-4}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-0}{2}$
- 3) $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{6}$
- 4) $\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$

25. Написати рівняння площини, що проходить через точку $A(3; -2; 1)$ та має нормальний вектор $\vec{N} = (1; 2; -2)$.

$$1) x + 2y - 2z + 3 = 0$$

$$2) x + 2y - z = 5$$

$$3) x + 2y - 2z - 6 = 0$$

$$4) 5z + 5 = 0$$

26. Яка з наведених прямих проходить через початок координат?

$$1) 2x - 3y + 1 = 0$$

$$2) 4x - 7y = 0$$

$$3) y - 2 = 0$$

$$4) 5x + 5 = 0$$

27. Знайти точку перетину прямої $-9x + 18 = 0$ з віссю Oy .

$$1) (2; 0)$$

$$2) (0; 2)$$

$$3) (0; 0)$$

4) не перетинається

28. Визначити півосі еліпса $9x^2 + 25y^2 = 1$.

$$1) 3 \text{ і } 5$$

$$2) 2 \text{ і } 4$$

$$3) 1/3 \text{ і } 1/5$$

$$4) 5 \text{ і } 3$$

29. Яке з рівнянь є рівнянням прямої, що проходить через задану точку і має заданий кутовий коефіцієнт?

$$1) \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$2) \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$3) y = kx + b$$

$$4) y - y_0 = k(x - x_0)$$

30. Яка з прямих відсікає на осях координат Ox , Oy відповідно відрізки $a = 2$, $b = 5$?

$$1) 5x + 3y - 10 = 0$$

$$2) 5x + 2y - 9 = 0$$

$$3) 5x + 2y - 10 = 0$$

$$4) 5x - 2y - 10 = 0$$

31. Яка з прямих паралельна прямій $y = 3x + 7$?

$$1) \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{3}$$

$$2) \frac{x-3}{6} = \frac{y-2}{-2}$$

$$3) \frac{x-3}{5} = \frac{y-2}{-3}$$

$$4) \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{3}$$

32. Яка з прямих перпендикулярна до прямої $y = \frac{4}{3}x - 6$?

$$1) 3x + 4y - 8 = 0$$

$$2) 3x - 4y + 7 = 0$$

$$3) 4x + 3y - 7 = 0$$

$$4) 4x - 3y + 8 = 0$$

33. Для якої кривої другого порядку сума відстаней від довільної точки M цієї лінії до двох різних фіксованих точок F_1 і F_2 (фокусів) є величиною сталою: $F_1M + F_2M = 2a$?

$$1) \text{ для гіперболи } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$2) \text{ для еліпса } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$3) \text{ для кола } x^2 + y^2 = R^2$$

$$4) \text{ для параболи } y^2 = 2px$$

34. Для якої кривої другого порядку ексцентриситет задовольняє умові: $\varepsilon = \frac{2c}{2a} > 1$?

$$1) \text{ для еліпса } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$2) \text{ для кола } x^2 + y^2 = R^2$$

$$3) \text{ для гіперболи } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$4) \text{ для параболи } y^2 = 2px$$

35. Рівняння сфери, центр якої знаходиться в точці $O(1;2;3)$ та радіусом $R=1$, має вигляд:

$$1) (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

$$2) x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$3) (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 - 1 = 0$$

$$4) (x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 1$$

36. Нехай ε – ексцентриситет лінії другого порядку. Які з наведених нижче тверджень є правильними: 1) для еліпса $\varepsilon > 1$; 2) для кола $\varepsilon = 1$; 3) для гіперболи $\varepsilon > 1$; 4) для кола $\varepsilon = 0$.

- 1) 2 і 3
- 2) 1 і 4
- 3) 3 і 4
- 4) 1 і 2

37. Яка з кривих другого порядку має лише одну вісь симетрії?

- 1) парабола
- 2) коло
- 3) еліпс
- 4) гіпербола

38. Яка з прямих проходить через дві точки $M_1(1; -1; 1)$ і $M_2(3; -4; 6)$?

- 1) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{5}$
- 2) $\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-6}{4}$
- 3) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$
- 4) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{5} = \frac{z}{7}$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вища математика: Збірник задач: навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін.; за ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. К.: А.С.К., 2005. 480 с.
2. Гриньов Б.В., Кириченко І.К. Вища алгебра: підручник для вищих техн. закладів / За ред. О.М. Литвина. Х.: Гімназія, 2008. 164 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навч. посібник. К.: А.С.К., 2005. 648 с.
4. Конспект лекцій з аналітичної геометрії та лінійної алгебри для студентів технічних факультетів / Уклад.: З.П. Ординська, І.В. Орловський, М.К. Руновська. К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2014. 176 с.
5. Лубенська Т.В., Чупаха Л.Д. Збірник задач з лінійної, векторної та аналітичної геометрії: навч. посібник. К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. 212 с.
6. Математика в технічному університеті: підручник. Том 1 / І.В. Алексєєва, В.О. Гайдей, О.О. Диховичний, Л.Б. Федорова; за ред. О.І. Клесова. К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. 496 с.
7. Рудавський Ю.К., Костробій П.П., Луник Х.П., Уханська Д.В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. підручник. Л.: Видавництво «Бескид Біт», 2002. 262 с.
8. Сердюк І.В. Практикум з курсу «Алгебра і геометрія». Векторна алгебра: навч. посібник / І.В. Сердюк, О.Б. Ахієзер, О.І. Дунаєвська, А.О. Нікульченко, А.Ю. Стрельнікова. Х.: «НТМТ», 2022. 88 с.

Навчальне видання

**ВИЩА МАТЕМАТИКА.
АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ**

Частина I

Навчальний посібник

**Укладач
Морохович Василь Степанович**

Гарнітура Times New Roman.

Формат 60х84/16.

Ум.друк.арк. 11,85. Обл.вид.арк. 4,79.

Зам. № 35. Наклад: 100 прим.

Оригінал-макет виготовлено
в редакційно-видавничому відділі ДВНЗ «УжНУ».

88000, м. Ужгород, вул. Заньковецької, 89.

E-mail: dep-editors@uzhnu.edu.ua

Видавництво УжНУ «Говерла».

88000, м. Ужгород, вул. Капітульна, 18.

E-mail: goverla-print@uzhnu.edu.ua

*Свідоцтво про внесення до державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції*

Серія 3т № 32 від 31 травня 2006 року