УДК 517.524

Т.М. Антонова (Національний університет "Львівська політехніка")
О.М.Сусь (Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів)

Достатні умови збіжності двовимірних неперервних дробів спеціального вигляду з дійсними елементами

Sufficient conditions of convergence for sequences of ordinary approximants $\{f_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, and of figure approximants $\{\tilde{f}_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, of two-dimensional continued fractions with real elements of special form are established. There is proved that under conditions the equality $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{f}_n$ is valid.

Встановлено достатні умови збіжності послідовностей звичайних та фігурних наближень двовимірних неперервних дробів з дійсними елементами спеціального вигляду. Доведено, що за цих умов, для послідовностей звичайних $\{f_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, та фігурних $\left\{\tilde{f}_n\right\}$, $n = 1, 2, \ldots$, наближень двовимірних неперервних дробів виконується рівність $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{f}_n$.

ВСТУП. Вивченню властивостей багатовимірних узагальнень неперервних дробів - гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД) та двовимірних неперервних дробів (ДНД)– присвячено чимало робіт. Проте дослідження властивостей ДНД з дійсними елементами почалось порівняно недавно.

Найбільш вивченими є багатовимірні узагальнення неперервних дробів (ГЛД та ДНД) з додатними елементами [1–4]. Було встановлено, що звичайні наближення ГЛД та ДНД мають властивість „вилки“, тобто наближення парних порядків утворюють зростаючу послідовність, а непарних порядків - спадну послідовність [1,5], фігурні ж наближення ДНД такою властивістю не володіють.

При вивченні ГЛД з додатними елементами було встановлено, що звичайні і фігурні наближення збігаються до однієї границі [1].

ДНД з довільними дійсними елементами вивчались в роботі [2].

Подальші дослідження багатовимірних узагальнень неперервних дробів з дійсними елементами, а саме ГЛД , стосувались дробів з недодатними та знакозмінними частинними чисельниками , частинні знаменники яких є рівними 1. Цим дослідженням присвячені роботи [6–8].

При дослідженні властивостей ДНД з недодатними та знакозмінними частинними чисельниками, частинні знаменники яких є рівними 1, використовується методика, запропонована для ГЛД. Проте сама конструкція ДНД і досліджувані наближення, як звичайні так і фігурні, вимагають своїх постановок задач [9–11].

Дана робота присвячена продовженню досліджень, започаткованих у роботі [11], де встановлено достатні умови монотонності, обмеженості та збіжності послідовності фігурних наближень ДНД вигляду

$$\Phi_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{a_{ii}}{1 + \Phi_i}, \quad \Phi_k = \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} a_{k+j,k}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} a_{k,k+j}}{1}, \tag{1}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$, частинні чисельники якого задовольняють умови

$$a_{i+j,i} \geq 0, \quad a_{i,i+j} \geq 0, \quad a_{j,j} \geq 0, \quad i = 0, 1, \ldots, \ j = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Наближення ДНД. Залишки ДНД та формули різниці

Означення 1. [12]. *Скінченні ДНД вигляду*

$$f_n = \Phi_0^{(n)} + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{n} \frac{a_{ii}}{1+\Phi_i^{(n-i)}}, \quad n=1,2,\ldots, \tag{3}$$

де

$$\Phi_i^{(0)} = 0, \ \ \Phi_i^{(k)} = \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1} a_{i+j,i}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1} a_{i,i+j}}{1}, \tag{4}$$
$$k=1,2,\ldots, i=0,1,\ldots,$$

називаються звичайними $n-$ ми наближеннями або $n-$ми підхідними дробами ДНД (1).

Означення 2. [1]. *n–ми фігурними наближеннями або n–ми фігурними підхідними дробами називаються скінченні ДНД вигляду*

$$\tilde{f}_n = \Phi_0^{(n)} + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{[n/2]} \frac{a_{ii}}{1+\Phi_i^{(n-2i)}}, \quad n=1,2,\ldots, \tag{5}$$

де $[s]$ – ціла частина числа s, $s=1,2,\ldots,$ а $\Phi_i^{(k)}$, $\ \ i=0,1,\ldots,k=0,1,\ldots,$ задаються формулами (4).

Вирази вигляду

$$Q_j^{(0)} = 1, \quad Q_j^{(p+1)} = 1 + \Phi_j^{(p+1)} + \frac{a_{j+1,j+1}}{Q_{j+1}^{(p)}}, \ \ j=1,2,\ldots,p=0,1,\ldots, \tag{6}$$

$$\tilde{Q}_j^{(0)} = 1, \ \ \tilde{Q}_j^{(1)} = 1 + \Phi_j^{(1)}, \ \ \tilde{Q}_j^{(p+2)} = 1 + \Phi_j^{(p+2)} + \frac{a_{j+1,j+1}}{\tilde{Q}_{j+1}^{(p)}}, \tag{7}$$
$$j=1,2,\ldots,p=0,1,\ldots,$$

називаються залишками звичайних наближень (3) і фігурних наближень (5) відповідно.

Для дослідження властивостей послідовностей підхідних дробів ДНД (1) використовуються формули різниці наближень (двох звичайних або двох фігурних), зокрема, [1]

$$\tilde{f}_n - \tilde{f}_m = \Phi_0^{(n)} - \Phi_0^{(m)} + \sum_{i=1}^{[m/2]} (-1)^i \prod_{j=1}^{i} \frac{a_{jj}}{\tilde{Q}_j^{(n-2j)} \tilde{Q}_j^{(m-2j)}} (\Phi_i^{(n-2i)} - \Phi_i^{(m-2i)}) +$$

$$+ (-1)^{[m/2]} \frac{a_{11}}{\tilde{Q}_1^{(n-2)}} \prod_{j=1}^{[m/2]} \frac{a_{j+1,j+1}}{\tilde{Q}_{j+1}^{(n-2-2j)} \tilde{Q}_j^{(m-2j)}} \ , n \geq m+1. \tag{8}$$

У [9], використовуючи методику виведення формули вигляду (8), одержано формулу різниці між звичайними та фігурними наближеннями

$$f_n - \tilde{f}_m = \Phi_0^{(n)} - \Phi_0^{(m)} + \sum_{i=1}^{[m/2]} (-1)^i \prod_{j=1}^{i} \frac{a_{jj}}{Q_j^{(n-j)} \tilde{Q}_j^{(m-2j)}} (\Phi_i^{(n-i)} - \Phi_i^{(m-2i)}) +$$

$$+(-1)^{[m/2]}\frac{a_{11}}{Q_1^{(n-2)}}\prod_{j=1}^{[m/2]}\frac{a_{j+1,j+1}}{Q_{j+1}^{(n-2-2j)}\tilde{Q}_j^{(m-2j)}}\ ,n\geq m+1. \tag{9}$$

Ознаки збіжності

У цьому розділі вивчається звичайна та фігурна збіжності ДНД (1) [10] та встановлюються нові ознаки еквівалентної збіжності, тобто за яких умов на елементи ДНД (1) для послідовностей звичайних $\{f_n\}$, та фігурних $\left\{\tilde{f}_n\right\}$, $n=1,2,\ldots$, наближень ДНД (1) виконується рівність $\lim\limits_{n\to\infty} f_n=\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{f}_n$.

Теорема 1. *Нехай для елементів ДНД (1) виконуються наступні умови*

$$a_{i+j,i}\geq 0,\quad a_{i,i+j}\geq 0,\quad i=0,1,\ldots,j=1,2,\ldots, \tag{10}$$

$$a_{i+2k,i}\leq\frac{1}{1+\mu_{i+k,i}},\ \ a_{i,i+2k}\leq\frac{1}{1+\mu_{i,i+k}}, \tag{11}$$

де $\mu_{i+k,i},\quad \mu_{i,i+k}-$ *додатні числа,* $i=0,1,\ldots,k=1,2,\ldots,$

$$a_{k,k}>-\beta_k(1-\beta_{k-1}),\ \ \frac{1}{2}\leq\beta_{k-1}\leq 1, k=2,3,\ldots, \tag{12}$$

причому

$$(2\beta_{k-1}-1)^2+(a_{k,k-1})^2+(a_{k-1,k})^2\neq 0,\ \ k=2,3\ldots. \tag{13}$$

Тоді, якщо існують такі послідовності додатних чисел чисел $\{\eta_j^{'}\}$, $\{\eta_j^{''}\}$, $\{\pi_j\}$, *що*

$$\begin{gathered}\eta_j^{'}\leq\mu_{i+j,i}+a_{i+2j+1,i}+\mu_{i+j,i}\cdot a_{i+2j+1,i},\quad i=0,1,\ldots,j=1,2,\ldots,\\ \eta_j^{''}\leq\mu_{i,i+j}+a_{i,i+2j+1}+\mu_{i,i+j}\cdot a_{i,i+2j+1},\quad i=0,1,\ldots,j=1,2,\ldots,\end{gathered} \tag{14}$$

$$\frac{|a_{jj}|}{\beta_j(2\beta_{j-1}-1+a_{j-1,j}+a_{j,j-1})}\leq\pi_j,\quad j=2,3\ldots, \tag{15}$$

та

$$\lim_{p\to\infty}p\prod_{j=1}^{p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}=0,\lim_{p\to\infty}p\prod_{j=1}^{p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}=0,\lim_{p\to\infty}p\prod_{j=1}^{p}\frac{\pi_{j+1}}{1+\pi_{j+1}}=0, \tag{16}$$

то ДНД (1) є збіжним і для $n\geq 4p+1$ *справджується нерівність*

$$|\tilde{f}_n-\tilde{f}_{4p+1}|\leq\left(\frac{\mu_{1,0}+1}{\mu_{1,0}}a_{1,0}+\frac{\mu_{0,1}+1}{\mu_{0,1}}a_{0,1}\right)\left(\prod_{j=1}^{2p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{2p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right)+$$

$$p\frac{|a_{11}|}{\beta_1}\left\{\prod_{j=1}^{p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}+2\prod_{j=1}^{p}\frac{\pi_{j+1}}{1+\pi_{j+1}}\right\}+\frac{|a_{11}|}{\beta_1}\cdot\prod_{j=1}^{2p}\frac{\pi_{j+1}}{1+\pi_{j+1}}. \tag{17}$$

При доведенні теореми використовується наступна лема.

Лема. *Нехай елементи неперервного дробу (НД)*

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} a_k}{1} \tag{18}$$

задовольняють умови

$$a_k \geq 0, \;\; a_{2k} \leq \frac{1}{1+\mu_k}, \;\; k = 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

де $\{\mu_k\}, k = 1, 2, \ldots,$ *— послідовність додатних чисел. Тоді для підхідних дробів*

$$\varphi_m = \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1} a_k}{1}, \;\; m = 1, 2, \ldots, \tag{20}$$

НД (18) справджуються нерівності

$$\begin{aligned}
|\varphi_n - \varphi_{4p}| &\leq \frac{a_1}{G_1^{(n)}} \prod_{k=1}^{2p-1} \frac{1}{1+a_{2k+1}} \prod_{k=1}^{2p} \frac{1}{1+\mu_k}, \;\; p = 1, 2, \ldots, \;\; n \geq 4p+1, \\
|\varphi_n - \varphi_{4p+1}| &\leq \frac{a_1}{G_1^{(n)}} \prod_{k=1}^{2p+1} \frac{1}{1+a_{2k+1}} \prod_{k=1}^{2p+1} \frac{1}{1+\mu_k}, \; p = 0, 1, \ldots, \;\; n \geq 4p+3, \\
|\varphi_n - \varphi_{4p+2}| &\leq \frac{a_1}{G_1^{(4p+2)}} \prod_{k=1}^{2p} \frac{1}{1+a_{2k+1}} \prod_{k=1}^{2p+1} \frac{1}{1+\mu_k}, \;\; p = 0, 1, \ldots, \;\; n \geq 4p+3, \\
|\varphi_n - \varphi_{4p+3}| &\leq \frac{a_1}{G_1^{(4p+3)}} \prod_{k=1}^{2p+2} \frac{1}{1+a_{2k+1}} \prod_{k=1}^{2p+2} \frac{1}{1+\mu_k}, \;\; p = 0, 1, \ldots, \;\; n \geq 4p+5,
\end{aligned} \tag{21}$$

де залишки скінченного НД (20) $G_k^{(n)}, \;\; k = 1, \ldots, n, \; n = 1, 2, \ldots,$*— це вирази вигляду*

$$G_k^{(n)} = 1 + \frac{(-1)^k a_{k+1}}{G_{k+1}^{(n)}}, \quad G_s^{(s)} = 1, \tag{22}$$

$k = 1, \ldots, n-1, \;\; n = 2, 3, \ldots, \;\; s = 1, 2, \ldots.$

Доведення. Спочатку, використовуючи метод математичної індукції та умови (19) леми покажемо, що для залишків (22) правильними є нерівності

$$\frac{\mu_{k+1}}{1+\mu_{k+1}} \leq G_{2k+1}^{(n)} \leq 1, \;\; k = 0, \ldots, [\frac{n-1}{2}], \;\; n = 2, 3, \ldots, \tag{23}$$

$$G_{2k}^{(n)} \geq 1 + a_{2k+1}, \;\; k = 1, \ldots, [\frac{n-1}{2}], \;\; n = 3, 4, \ldots. \tag{24}$$

Дійсно, для будь-яких $m = 0, 1, \ldots$

$$G_{2m+2}^{(2m+2)} = 1,$$

$$\frac{\mu_{m+1}}{1+\mu_{m+1}} \le G_{2m+1}^{(2m+2)} = 1 - \frac{a_{2m+2}}{G_{2m+2}^{(2m+2)}} = 1 - a_{2m+2} \le 1,$$

і для $m = 1, 2, \ldots$

$$G_{2m}^{(2m+2)} = 1 + \frac{a_{2m+1}}{G_{2m+1}^{(2m+2)}} \ge 1 + a_{2m+1}.$$

$$G_{2m+1}^{(2m+1)} = 1, \quad G_{2m}^{(2m+1)} = 1 + \frac{a_{2m+1}}{G_{2m+1}^{(2m+1)}} = 1 + a_{2m+1}.$$

Припустимо, що нерівності (23), (24) справджуються для деякого значення $k > 1$ і натуральних $n \ge 3$. Враховуючи позначення (22), маємо

$$1 \ge G_{2k-1}^{(n)} = 1 - \frac{a_{2k}}{G_{2k}^{(n)}} \ge 1 - a_{2k} \ge \frac{\mu_k}{1+\mu_k},$$

$$G_{2k-2}^{(n)} = 1 + \frac{a_{2k-1}}{G_{2k-1}^{(n)}} \ge 1 + a_{2k-1},$$

отже, нерівності (23), (24) правильні і для $k-1$ і натуральних $n \ge 3$.

Розглянемо тепер різниці $\varphi_n - \varphi_r, \;\; n \ge r+1$. Враховуючи, що

$$a_1 \le \varphi_m = \frac{a_1}{G_1^{(m)}} \le a_1 \frac{1+\mu_1}{\mu_1} \tag{25}$$

формулу різниці

$$\varphi_n - \varphi_r = (-1)^r \frac{a_1}{G_1^{(n)}} \prod_{k=1}^{r} \frac{(-1)^k a_{k+1}}{G_{k+1}^{(n)} G_k^{(r)}}$$

та оцінки (23), (24), маємо

а) $r = 4p, \;\; p = 1, 2, \ldots, \;\; n \ge 4p+1$

$$\frac{a_1}{G_1^{(n)}} \prod_{k=1}^{4p} \frac{a_{k+1}}{G_{k+1}^{(n)} G_k^{(4p)}} = \frac{a_1}{G_1^{(n)}} \prod_{k=1}^{p} \frac{a_{4k-2} a_{4k-1}}{G_{4k-3}^{(4p)} G_{4k-2}^{(4p)} G_{4k-1}^{(4p)}} \cdot \prod_{k=1}^{p} \frac{a_{4k} a_{4k+1}}{G_{4k-1}^{(n)} G_{4k}^{(n)} G_{4k+1}^{(n)}} \prod_{k=1}^{p} \frac{1}{G_{4k-2}^{(n)} G_{4k}^{(4p)}}.$$

Використовуючи нерівності (24), оцінимо останній співмножник у попередній формулі і одержимо

$|\varphi_n - \varphi_{4p}| \le$

$$\le \frac{a_1}{G_1^{(n)}} \prod_{k=1}^{2p-1} \frac{1}{1+a_{2k+1}} \prod_{k=1}^{p} \frac{a_{4k-2} a_{4k-1}}{G_{4k-3}^{(4p)} G_{4k-2}^{(4p)} G_{4k-1}^{(4p)}} \prod_{k=1}^{p} \frac{a_{4k} a_{4k+1}}{G_{4k-1}^{(n)} G_{4k}^{(n)} G_{4k+1}^{(n)}}; \tag{26}$$

б) $r = 4p+1, \;\; p = 0, 1, \ldots, \;\; n \ge 4p+3$,

$$\frac{a_1}{G_1^{(n)}} \prod_{k=1}^{4p+1} \frac{a_{k+1}}{G_{k+1}^{(n)} G_k^{(4p+1)}} = \prod_{k=1}^{4p} \frac{a_{k+1}}{G_{k+1}^{(n)} G_k^{(4p+1)}} \cdot \frac{a_{4p+2}}{G_{4p+1}^{(4p+1)} G_{4p+2}^{(n)}}.$$

Враховуючи, що $G_{4p+1}^{(4p+1)} = 1$, та використовуючи умови леми (19), нерівності (24), а також схему доведення нерівності (26), одержимо

$$|\varphi_n - \varphi_{4p+1}| \le \frac{a_1}{G_1^{(n)}} \cdot \frac{1}{1+\mu_{2p+1}}.$$

$$\cdot\prod_{k=1}^{2p+1}\frac{1}{1+a_{2k+1}}\cdot\prod_{k=1}^{p}\frac{a_{4k-2}a_{4k-1}}{G_{4k-3}^{(4p+1)}G_{4k-2}^{(4p+1)}G_{4k-1}^{(4p+1)}}\cdot\prod_{k=1}^{p}\frac{a_{4k}a_{4k+1}}{G_{4k-1}^{(n)}G_{4k}^{(n)}G_{4k+1}^{(n)}}; \qquad (27)$$

в) $r=4p+2,\ \ p=0,1,\ldots,\ \ n\geq 4p+3,$

$$\frac{a_1}{G_1^{(4p+2)}}\prod_{k=1}^{4p+2}\frac{a_{k+1}}{G_{k+1}^{(n)}G_k^{(4p+2)}}=\frac{a_1}{G_1^{(4p+2)}}\prod_{k=1}^{4p}\frac{a_{k+1}}{G_{k+1}^{(4p+2)}G_k^{(n)}}\cdot\frac{a_{4p+2}a_{4p+3}}{G_{4p+2}^{(4p+2)}G_{4p+1}^{(n)}G_{4p+2}^{(n)}G_{4p+3}^{(n)}}=$$

$$=\frac{a_1}{G_1^{(4p+2)}}\prod_{k=1}^{p+1}\frac{a_{4k-2}a_{4k-1}}{G_{4k-3}^{(n)}G_{4k-2}^{(n)}G_{4k-1}^{(n)}}\cdot\prod_{k=1}^{p}\frac{a_{4k}a_{4k+1}}{G_{4k-1}^{(4p+2)}G_{4k}^{(4p+2)}G_{4k+1}^{(4p+2)}}\cdot\prod_{k=1}^{p}\frac{1}{G_{4k}^{(n)}G_{4k-2}^{(4p+2)}}.$$

Враховуючи нерівності (24) і, оцінивши останній співмножник у попередній формулі, одержимо

$|\varphi_n-\varphi_{4p+2}|\leq$

$$\frac{a_1}{G_1^{(4p+2)}}\cdot\prod_{k=1}^{2p}\frac{1}{1+a_{2k+1}}\cdot\prod_{k=1}^{p+1}\frac{a_{4k-2}a_{4k-1}}{G_{4k-3}^{(n)}G_{4k-2}^{(n)}G_{4k-1}^{(n)}}\prod_{k=1}^{p}\frac{a_{4k}a_{4k+1}}{G_{4k-1}^{(4p+2)}G_{4k}^{(4p+2)}G_{4k+1}^{(4p+2)}}; \qquad (28)$$

г) $r=4p+3,\ \ p=0,1,\ldots,\ \ n\geq 4p+5,$

$$\frac{a_1}{G_1^{(4p+3)}}\prod_{k=1}^{4p+3}\frac{a_{k+1}}{G_{k+1}^{(n)}G_k^{(4p+3)}}=\frac{a_1}{G_1^{(4p+3)}}\prod_{k=1}^{4p}\frac{a_{k+1}}{G_{k+1}^{(4p+3)}G_k^{(n)}}\cdot$$

$$\cdot\frac{a_{4p+2}a_{4p+3}}{G_{4p+3}^{(4p+3)}G_{4p+1}^{(n)}G_{4p+2}^{(n)}G_{4p+3}^{(n)}}\frac{a_{4p+4}}{G_{4p+2}^{(4p+3)}G_{4p+4}^{(n)}}\leq\frac{a_1}{G_1^{(4p+3)}}\cdot\frac{1}{(1+a_{4p+3})(1+a_{4p+5})}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{1+\mu_{2p+2}}\cdot\frac{a_{4p+2}a_{4p+3}}{G_{4p+1}^{(n)}G_{4p+2}^{(n)}G_{4p+3}^{(n)}}\prod_{k=1}^{4p}\frac{a_{k+1}}{G_{k+1}^{(4p+3)}G_k^{(n)}}.$$

Використовуючи методику доведення попередніх нерівностей, одержимо

$$|\varphi_n-\varphi_{4p+3}|\leq\frac{a_1}{G_1^{(4p+3)}}\cdot\frac{1}{1+\mu_{2p+2}}\cdot$$

$$\prod_{k=1}^{2p+2}\frac{1}{1+a_{2k+1}}\prod_{k=1}^{p+1}\frac{a_{4k-2}a_{4k-1}}{G_{4k-3}^{(4p+3)}G_{4k-2}^{(4p+3)}G_{4k-1}^{(4p+3)}}\prod_{k=1}^{p}\frac{a_{4k}a_{4k+1}}{G_{4k-1}^{(n)}G_{4k}^{(n)}G_{4k-1}^{(n)}}. \qquad (29)$$

Оцінимо вирази $\dfrac{a_{2k}a_{2k+1}}{G_{2k-1}^{(m)}G_{2k}^{(m)}G_{2k+1}^{(m)}}, k=1,2,\ldots,m\geq 2k+1:$

$$\frac{a_{2k}a_{2k+1}}{G_{2k-1}^{(m)}G_{2k}^{(m)}G_{2k+1}^{(m)}}=\frac{a_{2k}a_{2k+1}}{\left(1-\dfrac{a_{2k}}{G_{2k}^{(m)}}\right)G_{2k}^{(m)}G_{2k+1}^{(m)}}=\frac{a_{2k}}{G_{2k}^{(m)}-a_{2k}}\cdot\frac{a_{2k+1}}{G_{2k+1}^{(m)}}\leq$$

$$\leq\frac{a_{2k}}{G_{2k}^{(m)}-\dfrac{1}{1+\mu_k}}\cdot\frac{a_{2k+1}}{G_{2k+1}^{(m)}}=\frac{a_{2k}}{\dfrac{\mu_k}{1+\mu_k}+\dfrac{a_{2k+1}}{G_{2k+1}^{(m)}}}\cdot\frac{a_{2k+1}}{G_{2k+1}^{(m)}}\leq a_{2k}\leq\frac{1}{1+\mu_k}.$$

Отже,

$$\frac{a_{2k}a_{2k+1}}{G_{2k-1}^{(m)}G_{2k}^{(m)}G_{2k+1}^{(m)}} \leq \frac{1}{1+\mu_k}, k=1,2,\ldots,m \geq 2k+1. \tag{30}$$

Враховуючи оцінки (30) у нерівностях (26)-(29), доходимо висновку про правильність оцінок (21).

Лему доведено.

Доведення теореми. З формул (8) випливає, що при $n \geq 4p+2$

$$\left|\tilde{f}_n - \tilde{f}_{4p+1}\right| \leq \left|\Phi_0^{(n)} - \Phi_0^{(4p+1)}\right| + \frac{|a_{11}|}{|\tilde{Q}_1^{(n-2)}|}\prod_{j=1}^{2p}\frac{|a_{j+1,j+1}|}{|\tilde{Q}_{j+1}^{(n-2-2j)}\tilde{Q}_j^{(4p+1-2j)}|}+$$

$$\sum_{i=1}^{p}\prod_{j=1}^{2i-1}\frac{|a_{jj}|}{\left|\tilde{Q}_j^{(n-2j)}\tilde{Q}_j^{(4p+1-2j)}\right|}\left|\Phi_{2i-1}^{(n-4i+2)} - \Phi_{2i-1}^{(4p-4i+3)}\right|+$$

$$\sum_{i=1}^{p}\prod_{j=1}^{2i}\frac{|a_{jj}|}{\left|\tilde{Q}_j^{(n-2j)}\tilde{Q}_j^{(4p+1-2j)}\right|}\left|\Phi_{2i}^{(n-4i)} - \Phi_{2i}^{(4p-4i+1)}\right|. \tag{31}$$

Враховуючи, що для $k=0,1,\ldots,\ n \geq 2s+1, \quad s=0,1,\ldots,$

$$\left|\Phi_k^{(n)} - \Phi_k^{(2s+1)}\right| \leq \left|\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n}\frac{a_{k+j,k}}{1} - \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{2s+1}\frac{a_{k+j,k}}{1}\right| + \left|\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n}\frac{a_{k,k+j}}{1} - \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{2s+1}\frac{a_{k,k+j}}{1}\right|$$

і, використовуючи умови теореми (10), (11), (14) , другу та останню з нерівностей (21) , маємо

$$\left|\Phi_0^{(n)} - \Phi_0^{(4p+1)}\right| \leq \Phi_0^{(n)}\left(\prod_{j=1}^{2p+1}\frac{1}{(1+a_{2j+1,0})(1+\mu_{j,0})} + \prod_{j=1}^{2p+1}\frac{1}{(1+a_{0,2j+1})(1+\mu_{0,j})}\right) \leq$$

$$\leq \Phi_0^{(n)}\left(\prod_{j=1}^{2p+1}\frac{1}{1+\eta_j'} + \prod_{j=1}^{2p+1}\frac{1}{1+\eta_j''}\right), \tag{32}$$

$$\left|\Phi_{2k-1}^{(n+2-4k)} - \Phi_{2k-1}^{(4p+3-4k)}\right| \leq \Phi_{2k-1}^{(4p+3-4k)}\cdot\left\{\prod_{j=1}^{2p-2k+2}\frac{1}{(1+a_{2k+2j,2k-1})(1+\mu_{2k-1+j,2k-1})}+\right.$$

$$\left.+\prod_{j=1}^{2p-2k+2}\frac{1}{(1+a_{2k-1,2k+2j})(1+\mu_{2k-1,2k-1+j})}\right\} \leq$$

$$\leq \Phi_{2k-1}^{(4p+3-4k)}\left(\prod_{j=1}^{2p-2k+2}\frac{1}{1+\eta_j'} + \prod_{j=1}^{2p-2k+2}\frac{1}{1+\eta_j''}\right), \tag{33}$$

$$\left|\Phi_{2k}^{(n-4k)} - \Phi_{2k}^{(4p+1-4k)}\right| \leq \Phi_{2k}^{(n-4k)}\cdot$$

$$\left\{\prod_{j=1}^{2p-2k+1}\frac{1}{(1+a_{2k+2j+1,2k})(1+\mu_{2k+j,2k})} + \prod_{j=1}^{2p-2k+1}\frac{1}{(1+a_{2k,2k+2j+1})(1+\mu_{2k,2k+j})}\right\} \leq$$

$$\leq \Phi_{2k}^{(n-4k)}\left(\prod_{j=1}^{2p-2k+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{2p-2k+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right). \tag{34}$$

Покажемо, що за умов теореми для залишків $Q_i^{(k)}$, $\tilde{Q}_i^{(k)}$, $i=1,2,\ldots,$ $k=0,1,\ldots,$ які визначаються за формулами (6),(7), виконуються нерівності

$$\tilde{Q}_i^{(k)}\geq\beta_i+\Phi_i^{(k)},\ \ i=1,2,\ldots,\ \ k=0,1,\ldots. \tag{35}$$

$$Q_i^{(k)}\geq\beta_i+\Phi_i^{(k)},\ \ i=1,2,\ldots,\ \ k=0,1,\ldots. \tag{36}$$

При $k=0$ і $k=1$ правильність оцінок (35) очевидна. Якщо оцінки (35) справджуються для деякого значення $k=s-2, s\geq 2$, та $i=1,2,\ldots,$ то

$$\tilde{Q}_i^{(s)}=1+\Phi_i^{(s)}+\frac{a_{i+1,i+1}}{\tilde{Q}_i^{(s-2)}}\geq 1+\Phi_i^{(s)}-\frac{\beta_{i+1}(1-\beta_i)}{\beta_{i+1}}\geq\Phi_i^{(s)}+\beta_i,$$

отже, нерівність (35) справджується для довільних $s=0,1,\ldots,$ $i=1,2,\ldots.$

Правильність нерівностей (36) доводиться аналогічно.

Тоді

$$\frac{\Phi_i^{(s)}}{\tilde{Q}_i^{(s)}}\leq\frac{\Phi_i^{(s)}}{\Phi_i^{(s)}+\beta_i}<1,\ \ \frac{\Phi_i^{(s)}}{Q_i^{(s)}}\leq\frac{\Phi_i^{(s)}}{\Phi_i^{(s)}+\beta_i}<1, s=0,1,\ldots,\ \ i=1,2,\ldots. \tag{37}$$

З урахуванням оцінок (32)-(35),(37) нерівність (31) перепишемо у вигляді $|\tilde{f}_n-\tilde{f}_{4p+1}|\leq$

$$\leq\Phi_0^{(n)}\left\{\prod_{j=1}^{2p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{2p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right\}+\frac{|a_{11}|}{|\tilde{Q}_1^{(n-2)}|}\prod_{j=1}^{2p}\frac{|a_{j+1,j+1}|}{|\tilde{Q}_{j+1}^{(n-2-2j)}\tilde{Q}_j^{(4p+1-2j)}|}+$$

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{\Phi_{2i-1}^{(4p+3-4i)}}{\tilde{Q}_{2i-1}^{(4p+3-4i)}}\left\{\prod_{j=1}^{2p-2i+2}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{2p-2i+2}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right\}\prod_{j=1}^{2i-1}\frac{|a_{j,j}|}{\tilde{Q}_j^{(n-2j)}}\prod_{j=1}^{2i-2}\frac{1}{\tilde{Q}_j^{(4p+1-2j)}}+$$

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{\Phi_{2i}^{(n-4i)}}{\tilde{Q}_{2i}^{(n-4i)}}\left\{\prod_{j=1}^{2p-2i+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{2p-2i+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right\}\prod_{j=1}^{2i}\frac{|a_{j,j}|}{\tilde{Q}_j^{(4p+1-2j)}}\prod_{j=1}^{2i-1}\frac{1}{\tilde{Q}_j^{(n-2j)}}=$$

$$=\Phi_0^{(n)}\left\{\prod_{j=1}^{2p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{2p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right\}+$$

$$\frac{|a_{1,1}|}{\tilde{Q}_1^{(n-2)}}\left\{\prod_{j=1}^{p}\frac{|a_{2j,2j}|}{\tilde{Q}_{2j}^{(4p+1-4j)}\tilde{Q}_{2j-1}^{(4p+3-4j)}}\prod_{j=1}^{p}\frac{|a_{2j+1,2j+1}|}{\tilde{Q}_{2j}^{(n-4j)}\tilde{Q}_{2j+1}^{(n-4j-2)}}+\right.$$

$$\sum_{i=1}^{p}\left\{\prod_{j=1}^{2p-2i+2}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{2p-2i+2}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right\}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{|a_{2j,2j}|}{\tilde{Q}_{2j}^{(4p+1-4j)}\tilde{Q}_{2j-1}^{(4p+3-4j)}}\cdot\frac{|a_{2j+1,2j+1}|}{\tilde{Q}_{2j}^{(n-4j)}\tilde{Q}_{2j+1}^{(n-4j-2)}}+$$

$$\left.\sum_{i=1}^{p}\left\{\prod_{j=1}^{2p-2i+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{2p-2i+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right\}\prod_{j=1}^{i}\frac{|a_{2j,2j}|}{\tilde{Q}_{2j}^{(4p+1-4j)}\tilde{Q}_{2j-1}^{(4p+3-4j)}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{|a_{2j+1,2j+1}|}{\tilde{Q}_{2j}^{(n-4j)}\tilde{Q}_{2j+1}^{(n-4j-2)}}\right\}.$$

Оцінимо тепер $\dfrac{|a_{j,j}|}{\tilde{Q}^{(s)}_{j-1}\tilde{Q}^{(s-2)}_{j}}$. Враховуючи умови (12), (15) теореми , одержимо

а) $a_{j,j}\geq 0,\ \ j=2,3,\ldots:$

$$\frac{|a_{j,j}|}{\tilde{Q}^{(s)}_{j-1}\tilde{Q}^{(s-2)}_{j}}=\frac{|a_{j,j}|}{\left(1+\Phi^{(s)}_{j-1}+\dfrac{|a_{j,j}|}{\tilde{Q}^{(s-2)}_{j}}\right)\tilde{Q}^{(s-2)}_{j}}=$$

$$=\frac{|a_{j,j}|}{\left(1+\Phi^{(s)}_{j-1}\right)\tilde{Q}^{(s-2)}_{j}+|a_{j,j}|}\leq\frac{|a_{j,j}|}{\left(2\beta_{j-1}-1+a_{j-1,j}+a_{j,j-1}\right)\beta_{j}+|a_{j,j}|};$$

б) $a_{j,j}<0,\ \ j=2,3,\ldots:$

$$\frac{|a_{j,j}|}{\tilde{Q}^{(s)}_{j-1}\tilde{Q}^{(s-2)}_{j}}=\frac{|a_{j,j}|}{\left(1+\Phi^{(s)}_{j-1}-\dfrac{|a_{j,j}|}{\tilde{Q}^{(s-2)}_{j}}\right)\tilde{Q}^{(s-2)}_{j}}=\frac{|a_{j,j}|}{\left(1+\Phi^{(s)}_{j-1}\right)\tilde{Q}^{(s-2)}_{j}-2|a_{j,j}|+|a_{j,j}|}\leq$$

$$\leq\frac{|a_{j,j}|}{\left(1+a_{j,j-1}+a_{j-1,j}\right)\beta_{j}-2\beta_{j}\left(1-\beta_{j-1}\right)+|a_{j,j}|}=$$

$$=\frac{|a_{j,j}|}{\left(2\beta_{j-1}-1+a_{j-1,j}+a_{j,j-1}\right)\beta_{j}+|a_{j,j}|}.$$

Отже,

$$\frac{|a_{j,j}|}{\tilde{Q}^{(s)}_{j-1}\tilde{Q}^{(s-2)}_{j}}\leq\frac{\pi_j}{\pi_j+1},\quad j=2,3,\ldots,\quad s=2,3,\ldots. \tag{38}$$

Аналогічно можна показати, що

$$\frac{|a_{j,j}|}{Q^{(s)}_{j-1}Q^{(s-1)}_{j}}\leq\frac{\pi_j}{\pi_j+1},\quad j=2,3,\ldots,\quad s=1,2,\ldots. \tag{39}$$

З нерівностей (35), (38) випливає, що

$$|\tilde{f}_n-\tilde{f}_{4p+1}|\leq\Phi^{(n)}_0\left\{\prod_{j=1}^{2p+1}\frac{1}{1+\eta'_j}+\prod_{j=1}^{2p+1}\frac{1}{1+\eta''_j}\right\}+\frac{|a_{1,1}|}{\beta_1}\prod_{j=1}^{2p}\frac{\pi_{j+1}}{\pi_{j+1}+1}+$$

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{|a_{1,1}|}{\beta_1}\left\{\prod_{j=1}^{2p-2i+2}\frac{1}{1+\eta'_j}+\prod_{j=1}^{2p-2i+2}\frac{1}{1+\eta''_j}\right\}\cdot\prod_{j=1}^{2i-2}\frac{\pi_{j+1}}{\pi_{j+1}+1}+$$

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{|a_{1,1}|}{\beta_1}\left\{\prod_{j=1}^{2p-2i+1}\frac{1}{1+\eta'_j}+\prod_{j=1}^{2p-2i+1}\frac{1}{1+\eta''_j}\right\}\cdot\prod_{j=1}^{2i-1}\frac{\pi_{j+1}}{\pi_{j+1}+1}=$$

$$S+\frac{|a_{1,1}|}{\beta_1}\sum_{i=2}^{2p}\left\{\prod_{j=1}^{2p-i+1}\frac{1}{1+\eta'_j}+\prod_{j=1}^{2p-i+1}\frac{1}{1+\eta''_j}\right\}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{\pi_{j+1}}{\pi_{j+1}+1}=$$

$$S+\frac{|a_{1,1}|}{\beta_1}\sum_{i=2}^{p}\left\{\prod_{j=1}^{2p-i+1}\frac{1}{1+\eta'_j}+\prod_{j=1}^{2p-i+1}\frac{1}{1+\eta''_j}\right\}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{\pi_{j+1}}{\pi_{j+1}+1}+$$

$$\frac{|a_{1,1}|}{\beta_1}\sum_{i=p+1}^{2p}\left\{\prod_{j=1}^{2p-i+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{2p-i+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right\}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{\pi_{j+1}}{\pi_{j+1}+1}\leq S+$$

$$\frac{|a_{1,1}|}{\beta_1}\sum_{i=2}^{p}\left\{\prod_{j=1}^{2p-i+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{2p-i+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right\}+2\frac{|a_{1,1}|}{\beta_1}\sum_{i=p+1}^{2p}\prod_{j=1}^{p}\frac{\pi_{j+1}}{\pi_{j+1}+1}\leq$$

$$\left(\frac{\mu_{1,0}+1}{\mu_{1,0}}a_{1,0}+\frac{\mu_{0,1}+1}{\mu_{0,1}}a_{0,1}\right)\left(\prod_{j=1}^{2p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{2p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right)+$$

$$\frac{|a_{1,1}|}{\beta_1}p\left(\prod_{j=1}^{p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}+2\prod_{j=1}^{p}\frac{\pi_{j+1}}{\pi_{j+1}+1}\right)+\frac{|a_{1,1}|}{\beta_1}\prod_{j=1}^{2p}\frac{\pi_{j+1}}{\pi_{j+1}+1}, \qquad (40)$$

де

$$S=\Phi_0^{(n)}\left\{\prod_{j=1}^{2p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{2p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right\}+\frac{|a_{1,1}|}{\beta_1}\left\{\prod_{j=1}^{2p}\frac{\pi_{j+1}}{\pi_{j+1}+1}+\prod_{j=1}^{2p}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{2p}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right\}.$$

Спрямовуючи $p\to\infty$ і враховуючи умови (16) теореми, доходимо висновку про фігурну збіжність ДНД (1).

Використовуючи наведену методику, а також нерівності (32)-(34), (36),(39) і формулу різниці (9), доходимо висновку, що при $n>4p+1$

$$|f_n-\tilde{f}_{4p+1}|\leq\left(\frac{\mu_{1,0}+1}{\mu_{1,0}}a_{1,0}+\frac{\mu_{0,1}+1}{\mu_{0,1}}a_{0,1}\right)\left(\prod_{j=1}^{2p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{2p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right)+$$

$$+\frac{|a_{1,1}|p}{\beta_1}\left(\prod_{j=1}^{p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}+2\prod_{j=1}^{p}\frac{\pi_{j+1}}{\pi_{j+1}+1}\right)+\frac{|a_{1,1}|}{\beta_1}\prod_{j=1}^{2p}\frac{\pi_{j+1}}{\pi_{j+1}+1},$$

звідси випливає звичайна збіжність ДНД (1), причому $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{f}_n$.

Теорему доведено.

Зауваження 1. Якщо вважати, що $a_{j,j}\neq 0,\quad j=1,2,\ldots$, тоді умови (12)-(13) можна послабити, усунувши умову (13), а умови (15),(16) і оцінку (17) тоді доцільно замінити відповідно такими

$$\frac{\beta_j(2\beta_{j-1}-1+a_{j,j-1}+a_{j-1,j})}{|a_{j,j}|}\geq\pi_j,\quad j=2,3,\ldots,$$

$$\lim_{p\to\infty}p\prod_{j=1}^{p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}=0,\lim_{p\to\infty}p\prod_{j=1}^{p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}=0,\lim_{p\to\infty}p\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{1+\pi_{j+1}}=0,$$

$$|f_n-\tilde{f}_{4p+1}|\leq\left(\frac{\mu_{1,0}+1}{\mu_{1,0}}a_{1,0}+\frac{\mu_{0,1}+1}{\mu_{0,1}}a_{0,1}\right)\left(\prod_{j=1}^{2p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{2p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right)+$$

$$\frac{|a_{1,1}|p}{\beta_1}\left(\prod_{j=1}^{p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}+2\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{\pi_{j+1}+1}\right)+\frac{|a_{1,1}|}{\beta_1}\prod_{j=1}^{2p}\frac{1}{\pi_{j+1}+1}.$$

Зауваження 2. Якщо

$$a_{2k-1,2k-1} > 0, \;\; 0 > a_{2k,2k} \geq -\beta, \;\; 0 < \beta < \frac{1}{2}, \;\; k = 2, 3, \ldots, \tag{41}$$

то умови (12),(16) виконуються. Дійсно, якщо покласти

$$\beta_{2j-1} = 1 - \beta, \;\; \beta_{2j} = 1, \pi_{2j} = \frac{\beta}{1-2\beta}, \;\; \pi_{2j-1} = |a_{2j-1,2j-1}|, \;\; j = 1, 2, \ldots,$$

тоді

$$p \prod_{j=1}^{p} \frac{\pi_{j+1}}{\pi_{j+1}+1} \leq p \prod_{j=1}^{[\frac{p+1}{2}]} \frac{\pi_{2j}}{\pi_{2j}+1} = p \left(\frac{\beta}{1-\beta} \right)^{[\frac{p+1}{2}]} \to 0, \text{ при } p \to \infty.$$

Виявляється, що умови (41) можна послабити, замінивши їх такими

$$a_{2k-1,2k-1} > 0, \; 0 > a_{2k,2k} \geq -\frac{1}{1+\varepsilon}, \;\; 0 < \varepsilon < 1, \;\; k = 2, 3, \ldots. \tag{42}$$

Теорема 2. *Нехай для елементів ДНД (1) виконуються умови (10), (11),(14),(16), (42). Тоді ДНД (1) є збіжним і фігурно збіжним, причому*

$$|\tilde{f}_n - \tilde{f}_{8p+1}| \leq \left(\frac{\mu_{1,0}+1}{\mu_{1,0}} a_{1,0} + \frac{\mu_{0,1}+1}{\mu_{0,1}} a_{0,1} \right) \left(\prod_{j=1}^{4p+1} \frac{1}{1+\eta_j^{'}} + \prod_{j=1}^{4p+1} \frac{1}{1+\eta_j^{''}} \right) +$$

$$+ \frac{a_{1,1}(1+\varepsilon)^2 p}{\varepsilon^2} \left(\prod_{j=1}^{2p+1} \frac{1}{1+\eta_j^{'}} + \prod_{j=1}^{2p+1} \frac{1}{1+\eta_j^{''}} + \frac{2}{(1+\varepsilon)^p} \right) + \frac{a_{1,1}}{\varepsilon(1+\varepsilon)^{2p-1}}$$

і $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{f}_n$.

Доведення. Використовуючи міркування аналогічні тим, які були використані при доведенні леми та теореми 1, неважко показати, що для фігурних і звичайних залишків ДНД (1) справджуються нерівності

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + \Phi_{2i-1}^{(k)} \leq \tilde{Q}_{2i-1}^{(k)} \leq 1 + \Phi_{2i-1}^{(k)}, \;\; 1 + \Phi_{2i}^{(k)} \leq \tilde{Q}_{2i}^{(k)}, \tag{43}$$

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + \Phi_{2i-1}^{(k)} \leq Q_{2i-1}^{(k)} \leq 1 + \Phi_{2i-1}^{(k)}, \;\; 1 + \Phi_{2i}^{(k)} \leq Q_{2i}^{(k)}, \tag{44}$$

$$i = 1, 2, \ldots, k = 0, 1 \ldots.$$

Тоді

$$\frac{\Phi_i^{(s)}}{\tilde{Q}_i^{(s)}} \leq \frac{\Phi_i^{(s)}}{\Phi_i^{(s)} + \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} < 1, \quad \frac{\Phi_i^{(s)}}{Q_i^{(s)}} \leq \frac{\Phi_i^{(s)}}{\Phi_i^{(s)} + \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} < 1, \tag{45}$$

$$i = 1, 2, \ldots, \;\; k = 0, 1, \ldots.$$

З формули (33), в якій $4p+1$ замінити на $8p+1$ випливає, що $|\tilde{f}_n - \tilde{f}_{8p+1}| \leq$

$$\Phi_0^{(n)}\left\{\prod_{j=1}^{4p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{4p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right\}+\frac{a_{1,1}}{\tilde{Q}_1^{(n-2)}}\prod_{j=1}^{4p}\frac{|a_{j+1,j+1}|}{|\tilde{Q}_j^{(8p+1-2j)}||\tilde{Q}_{j+1}^{(n-2-2j)}|}+$$

$$\sum_{i=1}^{2p}\frac{\Phi_{2i-1}^{(8p+3-4i)}}{\tilde{Q}_{2i-1}^{(8p+3-4i)}}\left\{\prod_{j=1}^{4p-2i+2}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{4p-2i+2}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right\}\prod_{j=1}^{2i-1}\frac{|a_{j,j}|}{\tilde{Q}_j^{(n-2j)}}\prod_{j=1}^{2i-2}\frac{1}{\tilde{Q}_j^{(8p+1-2j)}}+$$

$$\sum_{i=1}^{2p}\frac{\Phi_{2i}^{(n-4i)}}{\tilde{Q}_{2i}^{(n-4i)}}\left\{\prod_{j=1}^{4p-2i+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{4p-2i+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right\}\prod_{j=1}^{2i}\frac{|a_{j,j}|}{\tilde{Q}_j^{(8p+1-2j)}}\prod_{j=1}^{2i-1}\frac{1}{\tilde{Q}_j^{(n-2j)}}=$$

$$=\Phi_0^{(n)}\left\{\prod_{j=1}^{4p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{4p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right\}+\frac{a_{1,1}}{\tilde{Q}_1^{(n-2)}}\prod_{j=1}^{4p}\frac{|a_{j+1,j+1}|}{|\tilde{Q}_j^{(8p+1-2j)}||\tilde{Q}_{j+1}^{(n-2-2j)}|}+$$

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{\Phi_{4i-3}^{(8p+7-8i)}}{\tilde{Q}_{4i-3}^{(8p+7-4i)}}\left\{\prod_{j=1}^{4p-4i+4}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{4p-4i+4}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right\}\prod_{j=1}^{4i-3}\frac{|a_{j,j}|}{\tilde{Q}_j^{(n-2j)}}\prod_{j=1}^{4i-4}\frac{1}{\tilde{Q}_j^{(8p+1-2j)}}+$$

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{\Phi_{4i-1}^{(8p+3-8i)}}{\tilde{Q}_{4i-1}^{(8p+3-4i)}}\left\{\prod_{j=1}^{4p-4i+2}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{4p-4i+2}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right\}\prod_{j=1}^{4i-1}\frac{|a_{j,j}|}{\tilde{Q}_j^{(n-2j)}}\prod_{j=1}^{4i-2}\frac{1}{\tilde{Q}_j^{(8p+1-2j)}}+$$

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{\Phi_{4i-2}^{(n-8i+4)}}{\tilde{Q}_{4i-2}^{(n-8i+4)}}\left\{\prod_{j=1}^{4p-4i+3}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{4p-4i+3}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right\}\prod_{j=1}^{4i-2}\frac{|a_{j,j}|}{\tilde{Q}_j^{(8p+1-2j)}}\prod_{j=1}^{4i-3}\frac{1}{\tilde{Q}_j^{(n-2j)}}+$$

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{\Phi_{4i}^{(n-8i)}}{\tilde{Q}_{4i}^{(n-8i)}}\left\{\prod_{j=1}^{4p-4i+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{4p-4i+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right\}\prod_{j=1}^{4i}\frac{|a_{j,j}|}{\tilde{Q}_j^{(8p+1-2j)}}\prod_{j=1}^{4i-1}\frac{1}{\tilde{Q}_j^{(n-2j)}}. \qquad (46)$$

Використовуючи оцінки (43),(45), оцінимо, аналогічно як в доведенні леми, добутки

$$\frac{|a_{2k,2k}|a_{2k+1,2k+1}}{\tilde{Q}_{2k-1}^{(s+2)}\tilde{Q}_{2k}^{(s)}\tilde{Q}_{2k+1}^{(s-2)}}=\frac{|a_{2k,2k}|}{\left(1+\Phi_{2k-1}^{(s+2)}-\dfrac{|a_{2k,2k}|}{\tilde{Q}_{2k}^{(s)}}\right)\tilde{Q}_{2k}^{(s)}}\cdot\frac{a_{2k+1,2k+1}}{\tilde{Q}_{2k+1}^{(s-2)}}\leq$$

$$\leq\frac{|a_{2k,2k}|}{\left(1-\dfrac{|a_{2k,2k}|}{\tilde{Q}_{2k}^{(s)}}\right)\tilde{Q}_{2k}^{(s)}}\cdot\frac{a_{2k+1,2k+1}}{\tilde{Q}_{2k+1}^{(s-2)}}=\frac{|a_{2k,2k}|}{\tilde{Q}_{2k}^{(s)}-|a_{2k,2k}|}\cdot\frac{a_{2k+1,2k+1}}{\tilde{Q}_{2k+1}^{(s-2)}}\leq$$

$$\leq\frac{|a_{2k,2k}|}{\tilde{Q}_{2k}^{(s)}-\dfrac{1}{1+\varepsilon}}\cdot\frac{a_{2k+1,2k+1}}{\tilde{Q}_{2k+1}^{(s-2)}}=$$

$$=\frac{|a_{2k,2k}|a_{2k+1,2k+1}}{\left(\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}+\Phi_{2k}^{(s)}+\dfrac{a_{2k+1,2k+1}}{\tilde{Q}_{2k+1}^{(s-2)}}\right)\tilde{Q}_{2k+1}^{(s-2)}}\leq|a_{2k,2k}|\leq\frac{1}{1+\varepsilon}.$$

Отже,
$$\frac{|a_{2k,2k}|a_{2k+1,2k+1}}{\tilde{Q}_{2k-1}^{(s+2)}\tilde{Q}_{2k}^{(s)}\tilde{Q}_{2k+1}^{(s-2)}}\leq\frac{1}{1+\varepsilon},\quad k=1,2,\ldots,\ s\geq 2.$$
Тому
$$\prod_{j=1}^{4i-3}\frac{|a_{j,j}|}{\tilde{Q}_j^{(n-2j)}}\prod_{j=1}^{4i-4}\frac{1}{\tilde{Q}_j^{(8p+1-2j)}}=\frac{|a_{11}|}{\tilde{Q}_1^{(n-2)}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{|a_{4j-2,4j-2}|a_{4j-1,4j-1}}{\tilde{Q}_{4j-3}^{(8p+7-8j)}\tilde{Q}_{4j-2}^{(8p+5-8j)}\tilde{Q}_{4j-1}^{(8p+3-8j)}\tilde{Q}_{4j}^{(8p+1-8j)}}\times$$
$$\prod_{j=1}^{i-1}\frac{|a_{4j,4j}|a_{4j+1,4j+1}}{\tilde{Q}_{4j-1}^{(n+2-8j)}\tilde{Q}_{4j}^{(n-8j)}\tilde{Q}_{4j+1}^{(n-2-8j)}\tilde{Q}_{4j-2}^{(n-4-8j)}}\leq\frac{|a_{11}|}{\tilde{Q}_1^{(n-2)}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{|a_{4j-2,4j-2}|a_{4j-1,4j-1}}{\tilde{Q}_{4j-3}^{(8p+7-8j)}\tilde{Q}_{4j-2}^{(8p+5-8j)}\tilde{Q}_{4j-1}^{(8p+3-8j)}}\times$$
$$\prod_{j=1}^{i-1}\frac{|a_{4j,4j}|a_{4j+1,4j+1}}{\tilde{Q}_{4j-1}^{(n+2-8j)}\tilde{Q}_{4j}^{(n-8j)}\tilde{Q}_{4j+1}^{(n-2-8j)}}\leq\frac{a_{1,1}(1+\varepsilon)}{\varepsilon(1+\varepsilon)^{2i-2}}.$$
Аналогічно покажемо, що
$$\prod_{j=1}^{4i-1}\frac{|a_{j,j}|}{\tilde{Q}_j^{(n-2j)}}\cdot\prod_{j=1}^{4i-2}\frac{1}{\tilde{Q}_j^{(8p+1-2j)}}=$$
$$\frac{a_{11}}{\tilde{Q}_1^{(8p-1)}}\prod_{j=1}^{4i-4}\frac{|a_{j+1,j+1}|}{\tilde{Q}_j^{(n-2j)}\tilde{Q}_{j+1}^{(8p+3-2j)}}\cdot\frac{|a_{4i-2,4i-2}|a_{4i-1,4i-1}}{\tilde{Q}_{4i-3}^{(n+6-8i)}\tilde{Q}_{4i-2}^{(n+4-8i)}\tilde{Q}_{4i-1}^{(n+2-8i)}\tilde{Q}_{4i-2}^{(8p+5-8i)}}\leq\frac{a_{1,1}(1+\varepsilon)}{\varepsilon(1+\varepsilon)^{2i-1}}.$$
$$\prod_{j=1}^{4i-2}\frac{|a_{j,j}|}{\tilde{Q}_j^{(8p+1-2j)}}\prod_{j=1}^{4i-3}\frac{1}{\tilde{Q}_j^{(n-2j)}}=$$
$$\frac{a_{11}}{\tilde{Q}_1^{(8p-1)}}\prod_{j=1}^{4i-4}\frac{|a_{j+1,j+1}|}{\tilde{Q}_j^{(n-2j)}\tilde{Q}_{j+1}^{(8p+3-2j)}}\frac{|a_{4i-2,4i-2}|}{\tilde{Q}_{4i-2}^{(8p+5-8i)}\tilde{Q}_{4i-3}^{(n+6-8i)}}\leq\frac{a_{1,1}(1+\varepsilon)}{\varepsilon^2(1+\varepsilon)^{2i-2}},$$
$$\prod_{j=1}^{4i}\frac{|a_{j,j}|}{\tilde{Q}_j^{(8p+1-2j)}}\cdot\prod_{j=1}^{4i-1}\frac{1}{\tilde{Q}_j^{(n-2j)}}=\frac{a_{11}}{\tilde{Q}_1^{(n-2)}}\prod_{j=1}^{4i-4}\frac{|a_{j+1,j+1}|}{\tilde{Q}_{j+1}^{(n-2-2j)}\tilde{Q}_{j1}^{(8p+1-2j)}}\times$$
$$\frac{|a_{4i-2,4i-2}|a_{4i-1,4i-1}|a_{4i,4i}|}{\tilde{Q}_{4i-3}^{(8p+7-8i)}\tilde{Q}_{4i-2}^{(8p+5-8i)}\tilde{Q}_{4i-1}^{(8p+3-8i)}\tilde{Q}_{4i}^{(8p+1-8i)}\tilde{Q}_{4i-2}^{(n+4-8i)}\tilde{Q}_{4i-2}^{(n+4-8i)}}\leq\frac{a_{1,1}(1+\varepsilon)}{\varepsilon^2(1+\varepsilon)^{2i-1}}.$$
Крім того,
$$\frac{a_{1,1}}{\tilde{Q}_1^{(n-2)}}\prod_{j=1}^{4p}\frac{|a_{j+1,j+1}|}{\tilde{Q}_j^{(8p+1-2j)}\tilde{Q}_{j+1}^{(n-2-2j)}}\leq\frac{a_{1,1}}{\varepsilon(1+\varepsilon)^{2p-1}}.$$

Підставляючи наведені оцінки у формулу (46), одержимо
$$|\tilde{f}_n-\tilde{f}_{8p+1}|\leq\Phi_0^{(n)}\left\{\prod_{j=1}^{4p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{4p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right\}+\frac{a_{1,1}}{\varepsilon(1+\varepsilon)^{2p-1}}+$$
$$\frac{a_{1,1}(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{p}\left\{\prod_{j=1}^{4p-4i+4}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{4p-4i+4}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right\}\frac{1}{(1+\varepsilon)^{2i-2}}+$$

$$\frac{a_{1,1}(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{p}\left\{\prod_{j=1}^{4p-4i+2}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{4p-4i+2}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right\}\frac{1}{(1+\varepsilon)^{2i-1}}+$$

$$\frac{a_{1,1}(1+\varepsilon)}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{p}\left\{\prod_{j=1}^{4p-4i+3}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{4p-4i+3}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right\}\frac{1}{(1+\varepsilon)^{2i-2}}+$$

$$\frac{a_{1,1}(1+\varepsilon)}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{p}\left\{\prod_{j=1}^{4p-4i+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{4p-4i+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right\}\frac{1}{(1+\varepsilon)^{2i-1}}\leq$$

$$\leq\Phi_0^{(n)}\left\{\prod_{j=1}^{4p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{4p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right\}+\frac{a_{1,1}}{\varepsilon(1+\varepsilon)^{2p-1}}+$$

$$\frac{a_{1,1}(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{2p}\left\{\prod_{j=1}^{4p-2i+2}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{4p-2i+2}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right\}\frac{1}{(1+\varepsilon)^{i-1}}+$$

$$\frac{a_{1,1}(1+\varepsilon)}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{2p}\left\{\prod_{j=1}^{4p-2i+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{4p-2i+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right\}\frac{1}{(1+\varepsilon)^{i-1}}.$$

Провівши перетворення за схемою доведення нерівності (40), одержимо

$$|\tilde{f}_n-\tilde{f}_{8p+1}|\leq$$

$$\leq\left(\frac{\mu_{1,0}+1}{\mu_{1,0}}a_{1,0}+\frac{\mu_{0,1}+1}{\mu_{0,1}}a_{0,1}\right)\left\{\prod_{j=1}^{4p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{4p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right\}+$$

$$\frac{a_{1,1}(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon^2}p\left\{\prod_{j=1}^{2p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{2p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}+\frac{2}{(1+\varepsilon)^p}\right\}+\frac{a_{1,1}}{\varepsilon(1+\varepsilon)^{2p-1}},$$

звідси випливає фігурна збіжність ДНД (1).

Аналогічно можна показати, що при виконанні умов теореми 2 виконується нерівність

$|f_n-\tilde{f}_{8p+1}|\leq$

$$\leq\left(\frac{\mu_{1,0}+1}{\mu_{1,0}}a_{1,0}+\frac{\mu_{0,1}+1}{\mu_{0,1}}a_{0,1}\right)\left\{\prod_{j=1}^{4p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{4p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}\right\}+$$

$$\frac{a_{1,1}(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon^2}p\left\{\prod_{j=1}^{2p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{'}}+\prod_{j=1}^{2p+1}\frac{1}{1+\eta_j^{''}}+\frac{2}{(1+\varepsilon)^p}\right\}+\frac{a_{1,1}}{\varepsilon(1+\varepsilon)^{2p-1}},$$

з якої випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{f}_n$.

Теорема доведена.

1. *Боднар Д.И.* Ветвящиеся цепные дроби. – К.: Наук. думка, 1986. – 176 с.
2. *Боднар Д.И., Кучминская Х.И.* О сходимости разожения функций двух переменных в соответствующую ветвящуюся цепную дробь //Мат. методы и физ.- мех. поля. – 1980.– Вып. 11. – С. 3–6.

3. *Боднар Д.И., Кучминская Х.И.* Параболічна область збіжності для двовимірних неперервних дробів //Матем. студії. – 1995. – № 4. – С.29–36.
4. *Боднар Д.И., Кучминская Х.И.* Аналог теореми Ван Флека для двовимірних неперервних дробів // Мат. методи та фіз.–мех. поля. – 1999. – **42**, № 4. – С.55–61.
5. *Кучмінська Х.Й.* Про збіжність двовимірних неперервних дробів // Праці ІМ НАН України. Теорія наближення функцій та її застосування. – 2000. – **31**. – С. 282–296.
6. *Антонова Т.М.* Деякі властивості гіллястих ланцюгових дробів з недодатними частинними чисельниками // Мат.методи та фіз.-мех.поля.– 2002. –**45**, № 1.– С.11-15.
7. *Антонова Т.М., Гладун В.Р.* Ознаки збіжності та стійкості гіллястих ланцюгових дробів зі знакозмінними частинними чисельниками //Мат.методи та фіз.-мех.поля.– 2004. –**47**, № 4.– С.27-35.
8. *Гладун В.Р.* Ознаки збіжності та стійкості гіллястих ланцюгових дробів із від'ємними частинними чисельниками //Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. –**46**, № 4. – С.16-26.
9. *Антонова Т.М., Сусь О.М.* Про властивості деяких послідовностей наближень парного порядку двовимірних неперервних дробів // Наук. вісник Ужгород. нац. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2006. – Вип. 12–13. – С. 4–9.
10. *Антонова Т.М., Сусь О.М.* Деякі достатні умови збіжності двовимірних неперервних дробів з дійсними елементами // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.матем. і інформ. – 2008. – Вип. 16. – С. 5–15.
11. *Антонова Т.М., Сусь О.М.* Про властивості послідовностей фігурних наближень двовимірних неперервних дробів спеціального вигляду з дійсними елементами //Математичний вісник НТШ. – 2007. – Т. 4. – С. 5–16.
12. *Кучмінська Х.Й., Сусь О.М., Возна С.М.* Апроксимативні властивості двовимірних неперервних дробів // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 1. – С. 30–44.

Одержано 24.10.2010