УДК 517.957

М.Д. Бабич (Український держ. ун-т фінансів та міжнародної торгівлі)
О.М. Гецко (Ужгородський нац. ун-т)

Наближені методи глобальної оптимізації нелінійних функціоналів

The approach to the reduction of nonlinear global optimization problems to global approximate solution problems of the corresponding equivalent systems of nonlinear scalar equations is considered.

Розглядається підхід щодо зведення нелінійних задач глобальної оптимізації до задач глобального наближеного розв'язування відповідних еквівалентних систем нелінійних скалярних рівнянь.

Вступ. Практика створення нових матеріалів, технологічних процесів, мтехнічних систем разом з використанням нових наукових ідей, хімічних матеріалів, фізичних ефектів, що визначають властивості та структуру створюваного об'єкту передбачають вибір найкращих сполук значень параметрів цього об'єкту за різними критеріями (наприклад, за розмірами, геометрією, фізичними характеристиками), що реалізуються відповідними математичними моделями. Відомо, що математичними моделями різних складних природничих явищ і технологічних процесів часто являються нелінійні задачі глобальної оптимізації, що характеризуються нелінійними цільовими функціями, заданими на деяких обмежених, замкнених областях, що визначаються допустимими значеннями аргументів та співвідношеннями між ними. Ставиться задача глобальної оптимізації (мінімізації, максимізації або обох разом) таких функціоналів при заданих обмеженнях. Очевидно, що вибір точного або наближеного методу глобальної оптимізації таких функціоналів суттєво буде залежати від постановки задачі та структури і диференціальних властивостей як самого нелінійного функціонала, так і функцій, що визначають наявні обмеження.

Різним аспектам вивчення і дослідження таких задач та чисельних методів їх розв'язування присвячено багато робіт різних авторів, перелік яких наведено в роботах [1]- [5] та [9]. Слід зауважити, що ступінь повноти дослідження та чисельного розв'язування таких задач є різною в залежності від складності самої задачі та вимог щодо її повного розв'язання. Найскладнішими в цьому плані представляються многоекстремальні нелінійні задачі глобальної оптимізації, в яких глобальні розв'язки (разом з локальними) можуть знаходитись як в середині допустимої області так і на її границі. В цьому випадку задача полягає у знаходженні усіх локальних точок екстремуму та екстремальних значень в них цільової функції з наступним вибором оптимальних глобальних значень, які за критерієм величини невязки цільової функції можуть характеризувати стан (в даний момент) змодельованого досліджуваного явища або процесу, а за критерієм якості його вартість та оптимальні або прийнятні розміри складових. Такі задачі глобальної оптимізації в силу своєї складності розглянуті недостатньо і вимагають додаткового дослідження як у теоретичному плані виявлення і відокремлення усіх можливих точок екстремуму,так і у практичній реалізації наближеного методу пошуку усіх таких точок та знаходження в них значень екстремуму з наступним вибором глобальних значень. Якщо про функціонал нічого крім неперервності невідомо, то кращого методу як метод перебору не існує. Якщо ж функціонал неперервно диференційовний, то, реалізуючи необхідну умову екстремуму, вихідну задачу можна звести до задачі глобального розв'язування нелінійного функціонального рівняння або еквівалентної йому відповідної системи нелінійних скалярних рівнянь (СНСР).

В даній роботі розглядаються положення і елементи загальної теорії наближених методів глобальної оптимізації двічі неперервно диференційовних нелінійних функціоналів, що мають в деякій замкненій обмеженій області скінчене число точок екстремуму. Суть цієї теорії полягає в наступному: разом з вихідною задачею глобальної оптимізації нелінійного функціонала на деякій обмеженій замкненій опуклій області розглядається послідовність відповідних їй наближених задач глобальної оптимізації, кожна з яких у певному розумінні апроксимує вихідну задачу і допускає можливість її наближеного глобального розв'язання.

За різних умов гладкості цих функціоналів доводяться дві теореми. Перша теорема про розв'язність послідовності наближених задач (при довільному або досить великому значенні параметра апроксимації) за відомою розв'язністю вихідної задачі і збіжність методу переходу до послідовності наближених задач. Друга теорема про розв'язність вихідної задачі на основі розв'язності наближеної задачі (при допустимому фіксованому значенні параметра апроксимації), відповідність їх розв'язків та апостеріорна оцінка похибки, що практично характеризує відокремлення ізольованих розв'язків вихідної задачі, тобто знаходження областей єдиності локальних екстремумів або областей опуклості вверх і вниз графіка цільової функції.

Елементи загальної теорії глобальної оптимізації функціоналів. Постановка задачі. Розглянемо двічі неперервно диференційовний за Фреше нелінійний функціонал $\varphi(u)$, заданий в гільбертовому просторі H. Задача полягає в глобальній оптимізації даного функціонала $\varphi(u)$ на деякій обмеженій замкненій множині $\overline{R} \subset H$, тобто потрібно знайти такі елементи $u_* \in \overline{R}$, $u^* \in \overline{R}$, що для $\varphi(u_*)$ і $\varphi(u^*)$ справедливі рівності:

$$\varphi(u_*) = \min_{u \in \overline{R}} \varphi(u), \varphi(u^*) = \max_{u \in \overline{R}} \varphi(u). \tag{1}$$

Очевидно, що методика безпосереднього дослідження і наближеного розв'язування задачі (1) визначається структурою функціонала $\varphi(u)$ та його диференційовними властивостями, зокрема градієнта $\varphi^{'}(u)$. Відомі різні підходи щодо розв'язання задачі (1):

1. задача на екстремум розглядається як основна, а рівняння $\varphi^{'}(u) = 0$ характеризує необхідну умову екстремуму. В цьому випадку ті чи інші умови або обмеження накладаються і на функціонал $\varphi(u)$ (наприклад обмеженість зверху, знизу) і на його градієнт $\varphi^{'}(u)$.

2. задача на екстремум $\varphi(u)$ розглядається як допоміжна, пов'язана з реалізацією необхідної умови екстремуму, тобто глобального розв'язання рівняння $\varphi^{'}(u) = 0$. В цьому випадку умови збіжності за аргументом і функціоналом виражаються у вигляді обмежень на $\varphi(u)$, $\varphi^{'}(u)$, $\varphi^{''}(u)$. Надалі будуть розглядатися обидва підходи.

В загальному випадку більш складних задач глобальної оптимізації, що виникають на практиці, процес їх розв'язання має наближений характер і полягає в наступному. Згідно положень загальної теорії наближених методів функціонал $\varphi(u)$ апроксимується послідовністю наближених функціоналів $\varphi_n(u)$, заданих в H або підпросторах $H_n \subset H$. В цьому випадку задача (1) ставиться для функціоналів $\varphi_n(u)$, тобто підлягають відшуканню в $R \subset H$ елементи u_*^n і u_n^* такі, щоб для функціоналів $\varphi_n(u)$ мали місце нерівності

$$\varphi_n(u_*^n) = \min_{u \in \overline{R}} \varphi_n(u), \varphi_n(u_n^*) = \max_{u \in \overline{R}} \varphi_n(u). \quad (2)$$

Припустимо, що функціонал $\varphi(u)$ в області $\overline{R}$ має скінченну множину $\Omega = \{u^i\} \, (i = \overline{1,m})$ стаціонарних точок u^i, тобто точок, в яких $\varphi^{'}(u^i) = 0$, а $\varphi(u^i)$ — відповідна множина значень функціоналу $\varphi(u)$ в точках u^i.

Нехай побудована послідовність наближених апроксимаційних до $\varphi(u)$ функціоналів $\varphi_n(u)$. Має місце наступне твердження.

Твердження 1. *Якщо при будь-яких або досить великих "n"задача (2) $\varphi_n(u) \to extr(u \in \overline{R})$ має розв'язки u_n^i і при кожному фіксованому "i"для послідовності $\{u_n^i\}$ має місце рівність*

$$\lim_{n \to \infty} \rho(u_n^i, \Omega) = 0,$$

то кажуть, що метод переходу від задачі (1) до послідовності задач (2) збігаєтьcя. Вираз $\rho(u_n^i, \Omega)$ означає відстань від елементів послідовності u_n^i до множини стаціонарних точок Ω.

Послідовність розв'язків u_n^i задачі (2 називається відповідною розв'язку u^i задачі (1), якщо виконуються умови

$$\lim_{u \to \infty} \left\| u_n^i - u^i \right\| = 0$$

і

$$\lim_{u \to \infty} \left\| \varphi(u_n^i) - \varphi(u^i) \right\| = 0$$

Тут норми до конкретного простору не прив'язуються.

Встановлення збіжності апроксимаційного методу переходу до задачі (2) є достатньою умовою для практичного розв'язування задачі (2) при кожному допустимому фіксованому n і проведення апостеріорного аналізу отриманих наближених розв'язків як по аргументу, так і по функціоналу.

Практично більш повним і доцільним є аналіз методу переходу до задач (2) і відповідності розв'язків задач (1) і (2) за умови наявності оцінок

$$\rho\left(u_n^i, \Omega\right) \le \delta_n^{(1)}; \left\| u_n^i - u^i \right\| \le \delta_n^{(2)}; \left| \varphi(u_n^i) - \varphi(u^i) \right| \le \delta_n^{(3)}$$

де $\delta_n^{(j)} \to 0 \; (j = 1, 2, 3)$ при $n \to \infty$ характеризують відповідно швидкість збіжності методу переходу та збіжність за аргументом і функціоналом.

В цьому випадку природно виникають запитання щодо умов, за яких будуть справедливі наступні твердження:

а) із існування точок екстремуму u^i функціонала $\varphi(u)$ (при будь-якому або досить великому n) буде випливати існування відповідних послідовностей точок екстремумів u_n^i функціоналів $\varphi_n(u)$ та їх збіжність при $n \to \infty$ по функціоналу і аргументу, тобто $|\varphi_n(u_n^i) - \varphi(u^i)| \to 0$, $\|u_n^i - u^i\| \to 0$.

б) із існування точок екстремумів функціоналів $\varphi_n(u)$ буде випливати (при кожному допустимому фіксованому значенні параметра апроксимації n) існування відповідних точок екстремумів функціоналу $\varphi(u)$ та апостеріорні оцінки похибок за аргументом і функціоналом.

Для випадку єдиності точки екстремуму, зокрема, мінімуму, в заданій області $\overline{R}$ наведені твердження за різних умов досліджувались в роботі [4]. Що стосується глобальної оптимізації многоекстремальних задач в $\overline{R}$, то твердження а) і б) можуть бути досліджені після відокремлення всіх екстремальних точок, тобто побудови таких підобластей області $\overline{R}$, кожна з яких буде містити одну точку екстремуму. За такі підобласті доцільно брати замкнені кулі $\overline{S}(v_i, r_i) = \left\{u \in \overline{R} : \|u - v_i\| \le r_i\right\}$ $(i = \overline{1, m})$, як області опуклості вверх або вниз графіків функціоналів $\varphi(u)$ та $\varphi_n(u)$, де v_i, як центр кулі, визначає точну або наближену стаціонарну точку функціоналів $\varphi(u)$ або $\varphi_n(u)$, а r_i — відповідний йому радіус кулі, числове значення якого визначається із достатніх умов теореми існування та збіжності застосованого ітераційного методу.

Доведення сформульованих тверджень в задачах глобальної оптимізації многоекстремальних функціоналів і знаходження оцінок точності за аргументом і функціоналом розглянемо за різних умов гладкості функціоналів $\varphi(u)$ та $\varphi_n(u)$. Надалі будемо вважати функціонал $\varphi_n(u)$ також двічі неперервно диференційовним. Умови близькості функціоналів $\varphi(u)$, $\varphi_n(u)$ та їх похідних $\varphi'(u)$, $\varphi_n'(u)$, $\varphi''(u)$, $\varphi_n''(u)$ введемо так: кажуть, що на елементі $u \in \overline{R} = \overline{S}(v, r)$ виконуються умови апроксимації функціоналів $\varphi(u)$, $\varphi_n(u)$ та їх похідних $\varphi'(u)$, $\varphi_n'(u)$, $\varphi''(u)$, $\varphi_n''(u)$, якщо існують такі функціонали $\eta_j(n, u) \to 0$ при $n \to \infty$ $(j = 1, 2, 3)$, що виконуються умови:

$$|\varphi(u) - \varphi_n(u)| \le \eta_1(n, u), \tag{3}$$

$$\left\|\varphi'(u) - \varphi_n'(u)\right\| \le \eta_2(n, u), \tag{4}$$

$$\left\|\varphi''(u) - \varphi_n''(u)\right\| \le \eta_3(n, u). \tag{5}$$

Правомірність даного означення близькості в кулі $\overline{S}(v, r)$ функціоналів $\varphi(u)$ і $\varphi_n(u)$ та їх двох похідних виправдана тим, що нелінійні функціонали можуть мати багато екстремальних точок, достатні умови існування яких і збіжності ітераційних методів можуть виконуватись в досить малих околах цих точок. Наведені оцінки (3)-(5) надалі будуть використані при отриманні оцінок близькості відповідних розв'язків функціоналів $\varphi(u)$ та $\varphi_n(u)$.

Усі наступні теореми, теоретичні та практичні результати будуть відображати задачу глобальної мінімізації нелінійного функціонала $\varphi(u)$, оскільки задача максимізації $\varphi(u)$ розв'язується аналогічно. У зв'язку з цим екстремальну точку мінімуму надалі будемо позначати u^*.

Отже, розглянемо задачу мінімізації диференційовного функціонала $\varphi(u)$ на обмеженій замкненій множині $\overline{R}$ гільбертового простору H. Припустимо, що в $\overline{R}$ міститься єдина точка мінімуму і задача полягає в наведені умов існування єдиного розвэязку в $\overline{R}$ та в уточненні його ітераційними методами. В теоретичному плані така задача розглядалась в роботі [4] із застосуванням методу проекції градієнта. Наведемо деякі з цих результатів.

Розглянемо метод проекції градієнта, який для мінімізації функціонала $\varphi(u)$ на $\overline{R} \subset H$ полягає у побудові послідовності.

$$u^{k+1} = P_R(u^k - \alpha_k \varphi^{'}(u^k)), \tag{6}$$

де P_R — оператор проектування на $\overline{R}$ (а саме $w = P_R(u)$) визначається умовою:

$$u \in R : \|w - u\| = \inf_{z \in R} \|z - u\| \,.$$

Існування єдиного розв'язку задачі (1) в області $\overline{R} = \overline{S}(v_i, r_i)$ і збіжність методу (6) визначає теорема.

Теорема 1. *Нехай R — обмежена, замкнена, опукла множина із H, $\varphi(u)$ — двічі диференційовний на R функціонал, причому для всіх $u \in R$ і всіх $h \in H$ виконується умова*

$$m \|h\|^2 \leq (\varphi^{''}(u)h, h) \leq M \|h\|^2 \,, m > 0 \tag{7}$$

Тоді $\varphi(u)$ має на R єдину точку мінімуму u^* і при $\alpha = \alpha_k$, де $0 < \alpha \leq \frac{2}{M}$, послідовність (6) збігається до u^* і має місце оцінка похибки

$$\left\|u^* - u^k\right\| \leq C(u^{(0)}, \epsilon)(q + \epsilon)^k, \tag{8}$$

де $q = \max\left\{|1 - \alpha m| \,, |1 - \alpha M|\right\}$, $0 \leq q < 1$, $\epsilon > 0$. Величина $q_{min} = \frac{M-m}{M+m}$ при $\alpha = \frac{2}{M+m}$

Доведення цієї теореми наведено в [4].

Згідно загальної теорії наближених методів сформулюємо теорему про розв'язність задачі (2) за даними існування розв'язків u^i задача (1) і збіжності будь-яких послідовностей наближених розв'язків u^i_n задачі (2) до відповідних точних розв'язків задачі (1) при прямуванні параметру апроксимації до свого граничного значення.

Теорема 2. *Нехай $u^*_i \in \Omega$ — одна з стаціонарних точок мінімуму задачі (1) і при всіх $u \in \overline{S}(u_i, r_i) = \left\{u \in \overline{R} : \|u - u_i\| \leq r_i\right\}$ виконується умова (5), а для оператора $\varphi''(u)$ виконується умова (7).*

Тоді справедливі наступні твердження:

1. Для оператора ${\varphi''}_n(u)$ в кулі $\overline{S}(u^*_i, r_i)$ виконується умова:

$$m_n \|h\|^2 \leq (\varphi^{''}_n(u)h, h) \leq M_n \|h\|^2 \,, m > 0, \tag{9}$$

де $m_n = m - \eta_3(n, u^*_i)$; $M_n = M + \eta_3(n, u^*_i)$

2. Для кожного u^*_i існує така область $d(r_i) \subset (0, \infty)$, що для будь-якого $r \in d(r_i)$ знайдеться таке $n_i(r)$, що при $n \geq n_i(r)$ у нерівності (9) $m_n = m - \eta_3(n, u^*_i) > 0$ і при $0 < \alpha \leq \frac{2}{M}$ виконується умова:

$$q_n(r_i) = \max\left\{|1 - \alpha m_n| \,, |1 - \alpha M_n|\right\} < 1. \tag{10}$$

3. При кожному із вказаних $n \geq n_i(r)$ задача (2) має в кулі $\overline{S}(u_i^*, r_i)$ єдину точку мінімуму u_{in}^*, відповідну точці u_i^* мінімуму задачі (1), до якої, починаючи із $u_{in}^0 = u_i$ при $n \to \infty$ і $k \to \infty$ буде збігатися послідовність $\{u_{in}^k\}$, побудована за методом проекції градієнта (6) і має місце оцінка, яка характеризує швидкість збіжності і оцінку похибки

$$\left\|u_{in}^* - u_{in}^k\right\| \leq C_n(u_{in}^{(0)}, \epsilon)(q_n + \epsilon)^k, \tag{11}$$

де q_n визначається за формулою (10), $\epsilon \geq 0$.

4. Будь-яка послідовність наближених розв'язків u_{in}^* задачі (2) при $n \to \infty$ прямує за нормою до відповідної точки мінімуму u_i^* функціоналу $\varphi(u)$ задачі (1), причому має місце оцінка похибки

$$\|u_i^* - u_{in}^*\| \leq C_n(u_{in}^0, \epsilon) \tag{12}$$

із якої при $n \to \infty$ випливає збіжність методу переходу до задач (2).

Доведення теореми випливає із умов (5), (7) на основі принципу стислих відображень та нерівності трикутника.

Розглянемо випадок, коли на функціонал $\varphi(u)$ накладені більш слабкі обмеження, а саме: припустимо, що функціонал $\varphi(u) \in C^1(\overline{R})$, тобто неперервно диференційовний на множині $\overline{R}$, а його градієнт $\varphi'(u)$ задовольняє умовам:

$$\left\|\varphi'(u_1) - \varphi'(u_2)\right\| \leq M \left\|u_1 - u_2\right\|, \tag{13}$$

$$(\varphi'(u_1) - \varphi'(u_2), u_1 - u_2) \geq m \left\|u_1 - u_2\right\|^2, m > 0. \tag{14}$$

В цьому випадку теорема існування розв'язку і збіжності методу (6) набуде вигляду:

Теорема 3. *Нехай $\overline{R} \subset H$ – обмежена замкнена опукла множина, $\varphi(u)$ – неперервно диференційовний функціонал, що задовольняє умови (3)-(5), (13), (14). Тоді при $\alpha = \alpha_k$, де $0 < \alpha < 2mM^{-2}$, справедливі наступні твердження:*

1) рівняння $u = P_R(u - \alpha\varphi'(u)) = Du$ буде мати єдиний розв'язок u^* в кулі $\overline{S}(v, r) = R$ (точка мінімуму $\varphi(u)$), $v = u^0$;

2) послідовність $u^{(k)}$, побудована згідно (6), збігатиметься до розв'язку u^*, причому швидкість збіжності і оцінка похибки характеризуються нерівністю

$$\left\|u^* - u^{(k)}\right\| \leq \left\|u^1 - u^0\right\| (1 - q(r))^{-1}[q(r)]^k; k = 0, 1, ... \tag{15}$$

де $q = (1 - 2\alpha m + \alpha^2 M^2)^{1/2}$

Доведення. Для доведення теореми використовуємо принцип стислих відображень. Розглянемо відображення $Du = P_{\overline{R}}(u - \alpha\varphi'(u))$, що діє із області $\overline{R}$ в $\overline{R}$. Покажемо, що оператор Du є стискуючим в $\overline{R}$ при $0 < \alpha < 2mM^{-2}$. Оскільки куля $\overline{S}(v, r) = \overline{R}$ – замкнута, випукла множина із H, то для всіх $u, v \in \overline{R}$ має місце співвідношення:

$$|Du - Dv|^2 = |P_R(u - \alpha\varphi'(u)) - P_R(v - \alpha\varphi'(v))|^2 \leq |u - \alpha\varphi'(u) - v + \alpha\varphi'(v)|^2 = |u - v|^2 -$$

$$-2\alpha(\varphi'(u) - \varphi'(v), u - v) + \alpha^2|\varphi'(u) - \varphi'(v)|^2 \leq |u - v|^2(1 - 2\alpha m + \alpha^2 M^2) = q^2(\alpha)|u - v|^2.$$

Звідси одержимо

$$|Du - Dv| \leq q(\alpha)|u - v|, u, v \in R. \tag{16}$$

Оскільки $0 < \alpha < 2mM^{-2}$, то $0 < q(\alpha) < 1$. Це означає, що відображення Du — стискуюче і для доведення існування розв'язку можна використати принцип стислих відображень. Метод (6), записаний у вигляді $u^{k+1} = Du^k$, визначає процес пошуку нерухомої точки u^* стискуючого відображення D, тобто точки u^*, що задовольняє рівність $u^* = Du^*$. Відомо, із функціонального аналізу, що така точка u^* існує, єдина і $\lim |u^* - u^k| = 0$ при $k \to \infty$. На сонові цього одержимо:

$$\|Du^k - Du^{k-1}\|^2 = \|P_R(u^k - \alpha\varphi^{'}(u^k)) - P_R(u^{k-1} - \alpha\varphi^{'}(u^{k-1}))\|^2 \leq$$

$$\leq (u^k - u^{k-1} - \alpha(\varphi^{'}(u^k) - \varphi^{'}(u^{k-1})), P_R(u^k - \alpha\varphi^{'}(u^k)) - P_R(u^{k-1} - \alpha\varphi^{'}(u^{k-1}))) =$$

Звідси

$$\|Du^k - Du^{k-1}\|^2 = \|u^k - u^{k-1} - \alpha(\varphi^{'}(u^k) - \varphi^{'}(u^{k-1}))\|^2 \leq \|u^k - u^{k-1}\|^2 -$$

$$-2\alpha(u^k - u^{k-1}, \varphi^{'}(u^k) - \varphi^{'}(u^{k-1})) + \alpha^2\|\varphi^{'}(u^k) - \varphi^{'}(u^{k-1})\|^2 \leq$$
$$\leq \|u^k - u^{k-1}\|^2(1 - 2\alpha m + \alpha^2 M^2),$$

або

$$\|Du^k - Du^{k-1}\| \leq q(\alpha)\|u^k - u^{k-1}\|,$$

де $q(\alpha) = \sqrt{1 - 2\alpha m + \alpha^2 M^2}$.

Для доведення оцінки (15), знайдемо $\|u^{k+1} - u^k\|$. На основі доведеного вище одержимо:

$$|u^{k+1} - u^k\| \leq \|P_R(u^k - \alpha\varphi^{'}(u^k)) - P_R(u^{k-1} - \alpha\varphi^{'}(u^{k-1}))\|^2 \leq$$

$$\leq q(\alpha)\|u^k - u^{k-1}\| \leq ... \leq [q(\alpha)]^k\|u^1 - u^0\|$$

Звідси легко можна отримати оцінку (15), з якої випливає збіжність методу проекції градієнта.

Наступна теорема дає твердження про те, що із існування мінімуму u^* функціонала $\varphi(u)$ в кулі $\overline{S}(u^0, r)$ (починаючи з деякого n) випливає існування відповідної точки мінімуму u_n^* функціонала $\varphi_n(u)$ і збіжність методу переходу до послідовності функціоналів $\varphi_n(u)$.

Теорема 4. *Нехай $R \subset H$ – обмежена замкнена опукла множина, $\varphi_n(u)$ – двічі неперервно диференційовний функціонал. Тоді за умов теореми 3 справедливими будуть наступні твердження:*

1. функціонал $\varphi_n(u)$ задовольняє умовам

$$\|\varphi_n^{'}(u_1) - \varphi_n^{'}(u_2)\| \leq M_n\|u_1 - u_2\|, \tag{17}$$

$$(\varphi_n^{'}(u_1) - \varphi_n^{'}(u_2), u_1 - u_2) \geq m_n\|u_1 - u_2\|^2, m_n > 0 \tag{18}$$

для всіх $u \in R$, тобто має єдину точку мінімуму $u_n^* \in R$.

2. знайдеться таке n_1*, що при* $n \geq n_1$ *буде виконуватись нерівність* $q_n < 1$.

3. послідовність u_n^k *побудована згідно (6) для функціонала* $\varphi_n(u)$ *при* $n \to \infty$, $k \to \infty$ *збігається до* u^* *– відповідної точки мінімуму функціонала* $\varphi(u)$. *Швидкість збіжності характеризується нерівністю*

$$\|u^* - u_n^k\| \leq \frac{\eta_3(n, u_n^k)}{1 - q_n} + \frac{\|u_n^0\|}{1 - q_n} q^{k+1} \tag{19}$$

де $q_n = \sqrt{1 - 2\alpha m_n + \alpha^2 M_n^2}$

Наступна теорема дає твердження про розв'язність задачі (1) за даними розв'язності задачі (2). Це означає, що із існування в кулі $\overline{S}(u^0, r)$ мінімуму u_n^* функціоналу $\varphi_n(u)$ при кожному допустимому фіксованому значенні параметра n випливає існування відповідної точки мінімуму u^* функціонала $\varphi(u)$ і апостеріорна оцінка похибки.

Теорема 5. *Нехай* $\overline{R} \subset H$ *– обмежена, замкнена опукла множина,* $\varphi_n(u)$ *– двічі неперервно диференційовний функціонал, що задовольняє умови (5), (17), (18). Нехай, крім того, при фіксованому допустимому значенні n виконується умова:*

$$q_n + 2\alpha\eta_3(n, c) + 2\alpha^2 M_n \eta_3(n, c) + \alpha^2 \eta_3(n, c) < 1$$

.

Тоді справедливі наступні твердження:

1). функціонал $\varphi(u)$ *задовольняє умовам (13), (14) для всіх* $u \in R$*, тобто має єдину точку мінімуму* $u^* \in R$*;*

2). послідовність u_n^k*, побудована згідно (6) для функціоналу* $\varphi_n(u)$ *при* $0 < \alpha < 2m_n M_n^{-2}$, $n \to \infty$, $k \to \infty$ *збігається до* u^* *і має місце апостеріорна оцінка похибки*

$$\|u^* - u_n^k\| \leq \frac{\alpha\eta_3(n, u_n^*)}{1 - q} + \frac{\|u_n^0\|}{1 - q_n} q_n^{k+1}. \tag{20}$$

При $k = 0$ *звідси випливає нерівність:*

$$\|u^* - u_n^0\| \leq \frac{\alpha\eta_3(n, u_n^*)}{1 - q} + \frac{q_n \|u_n^0\|}{1 - q_n} \leq r, \tag{21}$$

що може правити за оцінку близькості відповідних точок мінімуму функціоналів $\varphi(u)$ *і* $\varphi_n(u)$.

Таким чином для повного вирішення проблеми глобальної оптимізації многоекстремальних нелінійних задач потрібно вирішити за даних умов гладкості функціоналів $\varphi(u)$ і $\varphi_n(u)$ проблему відокремлення ізольованих точок v_i екстремумів функціонала $\varphi_n(u)$, які приймаються за центри куль $\overline{S}(v_i, r_i)$ єдиності відповідних точок екстремумів u_i функціоналу $\varphi(u)$. Значення $\varphi(v_i)$ будуть наближеними екстремальними значеннями функціоналу $\varphi(u)$, з яких вибирається мінімальне і максимальне значення або уточнюються за формулою (6).

Побудова апроксимаційних функціоналів $\varphi_n(u)$. Методи побудови наближених апроксимаційних функціоналів $\varphi_n(u)$ суттєво залежить від класу та характеристик функціоналу $\varphi(u)$. Основними апроксимаційними методами є: поліноміальні, зокрема метод вироджених ядер для інтегральних функціоналів, при якому невідома мінімізуюча функція шукається у вигляді відповідного полінома з невизначеними коефіцієнтами, метод механічних квадратур для інтегрального функціонала і метод скінченних різниць для інтегро-диференціального функціонала, в яких невідомими є значення невідомої функції у вузлах вибраної сітки дискретизації. В обох випадках задача пошуку точок екстремуму функціоналів $\varphi(u)$ та $\varphi_n(u)$ зводиться до розв'язування відповідної системи нелінійних скалярних рівнянь, одержаної з необхідної умови екстремуму:

$$\varphi^{'}(u) = 0 \vee \varphi_n^{'}(u) = 0 \tag{22}$$

Слід відмітити, що при дослідженні і розв'язуванні задач на екстремум в залежності від диференціальних властивостей $\varphi(u)$ і $\varphi_n(u)$ використовуються різні підходи, зокрема:

1. Задача на екстремум $\varphi(u)$ або $\varphi_n(u)$ вважається основною, а рівняння $\varphi^{'}(u) = 0$ або $\varphi_n^{'}(u) = 0$ є необхідною умовою екстремуму. У цьому випадку при доведенні теорем існування та збіжності методу (6) відповідні обмеження накладаються не тільки на градієнти $\varphi^{'}(u)$ та $\varphi_n^{'}(u)$, але і на функціонали $\varphi(u)$ і $\varphi_n(u)$ та їх другі похідні $\varphi^{''}(u)$ і $\varphi_n^{''}(u)$ (теореми 1-5).

2. Задача на екстремум розглядається як допоміжна, пов'язана із глобальним розв'язуванням рівнянь (22) усі розв'язки яких є стаціонарнимим точками функціоналів $\varphi(u)$ або $\varphi_n(u)$. У цьому випадку достатні умови теореми існування розв'язку рівнянь (22) і збіжності ітераційного методу виражаються у вигляді обмежень на $\varphi(u)$, $\varphi_n(u)$, $\varphi^{'}(u)$, $\varphi_n^{'}(u)$ та $\varphi^{''}(u)$, $\varphi_n^{''}(u)$, що буде відображатись в теоремі 6.

Надалі при вирішенні питань 1 і 2 будуть використовуватись обидва названі підходи.

Таким чином, задача глобальної оптимізації функціоналу $\varphi(u)$ або $\varphi_n(u)$ зводиться до глобального розв'язування нелінійних рівнянь (22), які у випадку апроксимації або дискретизації функціоналів $\varphi(u)$ або $\varphi_n(u)$ зводяться до систем нелінійних скалярних рівнянь.

Нехай рівняння (22) представляють нормальну систему нелінійних скалярних рівнянь n-го порядку вигляду:

$$\begin{cases} u_1 = f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), \\ u_2 = f_2(u_1, u_2, ..., u_n), \\ \qquad ... \\ u_n = f_n(u_1, u_2, ..., u_n), \end{cases} \tag{23}$$

де функції $f_1, f_2, \ldots, f_n$ – визначені і двічі неперервно диференційовні на деякій обмеженій області G дійсного арифметичного n-вимірного простору E_n, метризованого елементами деякої множини Q, тобто кожній парі точок $v, w \in E_n$ відповідає елемент $\rho(v, w) \in Q$, що характеризує відстань між v і w.

Представимо систему (23) в еквівалентній операторній формі

$$\overline{F} = \overline{u} - F(\overline{u}) = 0, \tag{24}$$

де $\overline{u} = (u_1, u_2, ..., u_n) \in E_n$ – вектор, $F(\overline{u}) = (f_1(\overline{u}), f_2(\overline{u}), ..., f_n(\overline{u}))$ – вектор-функція. Нехай всі ізольовані розв'язки $\{\overline{u}_j\}$ $j = \overline{1, l}$ системи (23), (24) належать n-вимірному замкненому кубу $\overline{R} = \{\overline{u} = (u_1, u_2, ..., u_n) : a_i \le u_i \le b_i$

$(i = \overline{1,n}), -\infty < a < b < +\infty, d = b - a\} \subset E_n$. Для глобального розв'язування системи (23), (24) застосуємо ϵs-алгоритм, складові якого і порядок відокремлення всіх ізольованих розв'язків (24) тобто екстремальних точок $\varphi(u)$ або $\varphi_n(u)$ наведені в [6].

Після відокремлення і знаходження наближених розв'язків системи (23), (24) всередині куба $\overline{R}$ і урізаних систем (23), (24) на всіх гранях куба обчислюються значення функціоналу $\varphi(u)$ або $\varphi_n(u)$ у знайдених точках і вибираються глобальні мінімальні та максимальні значення $\varphi(u)$ або $\varphi_n(u)$. Якщо задана точність екстремальних значень функціоналів $\varphi(u)$ або $\varphi_n(u)$ досягнута, то задача вирішена, в противному разі застосовуються ітераційні методи уточнення знайдених екстремальних точок та відповідних глобальних значень функціоналів.

Перевага ϵs-алгоритму, що базується на покритті області послідовністю ϵ-сіток, над іншими методами полягає в тому, що при його реалізації частина точок кожної ϵ-сітки відбраковується і при побудові наступної сітки не враховується. Це приводить до суттєвого зменшення числа обчислень, а значить і зменшення часу отримання із заданою точністю глобальних екстремальних значень та точок, в яких вони досягаються для функціоналів $\varphi(u)$ або $\varphi_n(u)$.

Ітераційні методи уточнення наближених розв'язків. В залежності від структури та диференціальних властивостей функціоналу $\varphi(u)$, оператора $F(u)$ та області $\overline{R}$ можливі різні варіанти побудови і реалізації ітераційних методів. Одним із таких ітераційних методів є градієнтний метод, представлений формулою

$$u^{k+1} = u^k - \alpha_k g_k, g_k = \varphi'(u^k) = F(u^k), \tag{25}$$

де $\varphi'(u)$ – градієнт функціоналу $\varphi(u)$, визначає напрям руху ітераційного методу, а $\{\alpha_k\}$ - послідовність дійсних чисел, що характеризує крок ітераційного методу. Якщо $\alpha_k = const$, то (25) представляє метод простої ітерації. Якщо α_k вибирається так, щоб мінімізувати функціонал $\varphi(u)$ на кожному кроці, тобто знаходити α_k із умови $\min_\alpha \varphi(u^k - \alpha\varphi'(u^k)) = f_k(\alpha)$, $\alpha \geq 0$, то із (25) одержимо метод найскорішого спуску.

В даному випадку ітераційний метод (25), застосований до операторного рівняння (24), представимо у вигляді методу найскорішого спуску:

$$u^{k+1} = u^k - \frac{\|\overline{F}(u^k)\|^2}{(\overline{F}'(u^k)\overline{F}(u^k), \overline{F}(u^k))}\overline{F}(u^k)(k = 0, 1, ...). \tag{26}$$

Відносно існування єдиного розв'язку (24) і збіжності методу найскорішого спуску (26) справедлива теорема.

Теорема 6. *Нехай в кулі $\overline{S}(\overline{u}^0, r)$, де $\overline{u}^0$ – один із елементів $\overline{v}_i$, а r – відповідне йому значення r_i, виконуються умови:*

$$\|\overline{F}(\overline{u}^0)\| \leq \delta_0, \|\overline{F}'(\overline{u})\| \leq M(\overline{u}^0, r), \|\overline{F}''(\overline{u})\| \leq N(\overline{u}^0, r), \tag{27}$$

$$|(\overline{F}'(\overline{u})h, h)| \geq m(\overline{u}^0, r)\|h\|^2 \vee \|\overline{F}'(\overline{u})h\| \geq m(\overline{u}^0, r)\|h\| \tag{28}$$

де δ_0, $M(\overline{u}^0, r)$, $N(\overline{u}^0, r)$, $m(\overline{u}^0, r) > 0$ – константи, які забезпечують виконання умов:

$$q(r) = \sqrt{\frac{M^2}{m^2} + \frac{\delta_0 N}{m^2} - 1} < 1, \tag{29}$$

$$\frac{\delta_0}{m(1-q(r))} \le r. \tag{30}$$

Тоді рівняння (24) має в кулі $\overline{S}(\overline{u}^0, r)$ *единий розв'язок* u^**, до якого збігається послідовність* $\{\overline{u}^k\}$ *побудована згідно (26), причому швидкість збіжності і оцінка похибки характеризуються нерівністю:*

$$\|\overline{u}^* - \overline{u}^k\| \le \frac{\delta_0}{m(1-q(r))}[q(r)]^k, \tag{31}$$

При $k = 0$

$$\|\overline{u}^* - \overline{u}^0\| \le \frac{\delta_0}{m(1-q(r))}, \tag{32}$$

що визначає близькість точного $\overline{u}^*$ *і відповідного йому наближеного розв'язку* $\overline{u}^0$*, який може правити за початкове наближення для ітераційного процесу (26).*

Таким чином, висновки теореми 6 гарантуються наявністю початкового наближення $\overline{u}^0$ і радіусу r таких, щоб в кулі $\overline{S}(\overline{u}^0, r)$ виконувались умови (27)-(30). Ці компоненти визначаються так: за $\overline{u}^0$ береться відокремлений наближений розв'язок v_i рівняння (24), а за радіус r береться значення r_i, що належить інтервалу сумісності нерівностей (29), (30) при $\overline{u}^0 = v_i$.

Збіжність послідовності значень функціоналу $\{\varphi_n(u_n^k)\}$ до відповідного мінімального значення $\varphi(u^*)$ дає наступна теорема.

Теорема 7. *Нехай* $\overline{R} \subset H$ *– обмежена замкнена опукла множина,* $\varphi(u)$ *і* $\varphi_n(u)$ *– опуклі диференційовні функціонали, що задовольняють умову (3) та умову Ліпшиця з константами* M *і* M_n*. Нехай параметр* α_k *задовольняє умовам:*

$$0 \le \epsilon_1 \le \alpha_k \le \frac{2}{M + 2\epsilon_2};$$

$$0 \le \epsilon_1 \le \alpha_{kn} \le \frac{2}{M_n + 2\epsilon_2},$$

де $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ *– фіксовані. Тоді послідовність* $\{\varphi_n(u_n^k)\}$ *при* $n \to \infty$*,* $k \to \infty$ *збігається до мінімального значення* $\varphi(u^*)$ *функціоналу* $\varphi(u)$*, причому має місце оцінка похибки:*

$$|\varphi(u^*) - \varphi(u_n^k)| \le \frac{[\|\varphi_n'(u_n^k)\| + \frac{c_2}{\epsilon_1}]^2}{\epsilon_2 k} + \eta_1(n, c_1) \le \frac{[c_2(M_n + \frac{1}{\epsilon_1}) + \|\varphi_n'(u_n^0)\|]^2}{\epsilon_2 k} + \eta_1(n, c_1), \tag{33}$$

де

$$c_2 = \sup_{u_1, u_2 \in R} \|u_1 - u_2\|$$

Доведення теореми аналогічне наведеному в роботі [4].

Деякі приклади, що відображають практичну реалізацію процесу пошуку глобального екстремуму, наведені в роботах [5] і s [8].

1. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 518 с.
2. *Стронгин Р.Г.* Численные методы в многоэкстремальных задачах. – М.: Наука, 1978.

3. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации.-М.: Наука, 1982.
4. *Бабич М.Д., Іванов В.В.* Дослідження повної похибки в задачах мінімізації функціоналів при наявності обмежень // УМЖ. – 1969. – №1. – С. 3-15.
5. *Бабич М.Д., Шевчук Л.Б.* Об одном численном методе решения задач оптимизации // УСИМ. – 1995. – №3. – С. 12-19.
6. *Бабич М.Д., Шевчук Л.Б.* Об одном алгоритме приближенного решения систем нелинейных уравнений // Кибернетика. – 1982. – №2. – С. 74-79.
7. *Бабич М.Д., Гецко О.М.* О точности и вычислительной сложности алгоритмов решения некоторых классов задач глобальной оптимизации // УСиМ. – 2007. - №5. – С. 29-37.
8. s *Бабич М.Д., Гецко О.М.* Про один метод наближеного розв'язування задач оптимального керування // Наук. вісник Ужгород. нац. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2009. – вип. 18. –С. 9-12.
9. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления.-М.:Наука, 1978.

Одержано .2010