УДК 512.64+512.56

Бондаренко В. М., Перегуда Ю. М.
(Інститут математики НАН України, Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

ОПИС P-ЧИСЕЛ ДЛЯ ВУЗЛОВИХ ТОЧОК ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНИХ МНОЖИН З ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНОЮ ФОРМОЮ ТІТСА

In this paper we describe P-numbers for nodal points of finite posets with positive definite Tits form.

У цій роботі описано P-числа для вузлових точок скінченних частково впорядкованих множин з додатно визначеною формою Тітса.

Квадратичні форми Тітса виникають при розгляді багатьох задач теорії зображень. У 1972 р. П. Габріель [1]показав, що сагайдак має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли (введена ним) квадратична форма Тітса є додатно визначеною. Ця робота П. Габріеля стала початком нового напрямку в теорії зображень, який пов'язаний з вивченням квадратичних форм для різних її об'єктів. У 1974 р. Ю. А. Дрозд [2] показав, що частково впорядкована множина має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли її форма Тітса є слабо додатно визначеною.

Квадратичні форми Тітса для різних об'єктів вивчали також К. Бонгартц, В. М. Бондаренко, Ш. Бреннер, Н. С. Головащук, П. Дрекслер, С. А. Овсієнко, Х. А. де ла Пенья, К. Рінгель, А. В. Ройтер, Д. Сімсон та інші математики.

У теорії зображень частково впорядкованих множин важливу роль відіграють не лише слабо додатно визначені, а й додатно визначені форми Тітса. В. М. Бондаренко і М. В. Стьопочкіна [3] показали, що у випадку, коли форма Тітса частково впорядкованої множини є додатно визначеною, її категорія ін'єктивних зображень має скінченний зображувальний тип. Всі такі частково впорядковані множини (що є аналогами графів Динкіна) описано ними в роботі [4].

У роботі [5] автори почали вивчати локальні деформації квадратичних форм. У цій роботі вивчаються локальні деформації квадратичних форм Тітса скінченних частково впорядкованих множин.

1. Основні поняття. Розглянемо квадратичну форму

$$f(z) = f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i z_i^2 + \sum_{i<j} f_{ij} z_i z_j.$$

над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Множину всіх таких квадратичних форм з одиничними коефіцієнтами $f_1, \dots, f_n$ позначимо через $\mathcal{R}_0$.

Нагадаємо деякі означення, введені першим із авторів.

Нехай $f(z) \in \mathcal{R}_0$ і $s \in \{1, \dots, n\}$; s-деформацією форми $f(z)$ називається форма з параметром a вигляду

$$f^{(s)}(z, a) = f^{(s)}(z_1, \dots, z_n, a) = a z_s^2 + \sum_{i \neq s} z_i^2 + \sum_{i<j} f_{ij} z_i z_j.$$

Позначимо через $F_+^{(s)}$ множину всіх $b \in \mathbb{R}$, таких що форма $f^{(s)}(z,b)$ є додатною, і покладемо $F_-^{(s)} = \mathbb{R} \setminus F_+^{(s)}$. Оскільки із $x \in F_-^{(s)}$ випливає, що $y \in F_-^{(s)}$ для довыльного $y < x$, то супремум

$$m_f^{(s)} = \sup \mathrm{F}_-^{(s)} \in \mathbb{R} \cup \infty$$

є граничною точкою. Число $m_f^{(s)}$ називається s-им P-числом форми $f(z)$.

Легко бачити, що має місце наступне твердження.

Твердження 1. *Нехай* $f(z_1, \ldots, z_n) \in \mathcal{R}_0$. *Тоді*

1) $m_f^{(s)} \geq 0$*;*

2) $m_f^{(s)} = \infty$*, якщо форма*

$$f_{-s}(z_1, \ldots, z_{s-1}, z_{s+1}, \ldots, z_n) = f(z_1, \ldots, z_{s-1}, 0, z_{s+1}, \ldots, z_n)$$

не є додатною.

У роботі [5] доведена наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай* $f(z_1, \ldots, z_n) \in \mathcal{R}_0$ *і нехай* $m_f^{(s)} \neq \infty$. *Тоді*

1) $m_f^{(s)} \in F_-^{(s)}$*, а тому* $m_f^{(s)}$ *— найбільше число множини* $F_-^{(s)}$*.*

2) *форма* $f^{(s)}(z, m_f^{(s)})$ *є невід'ємною.*

Приведемо ще деякі означення.

Нехай S — частково впорядкована (скорочено ч. в.) множина. Квадратичною формою Тітса множини S називається квадратична форма, яка задається наступною рівністю:

$$dr_S(z) = z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i<j, i,j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i$$

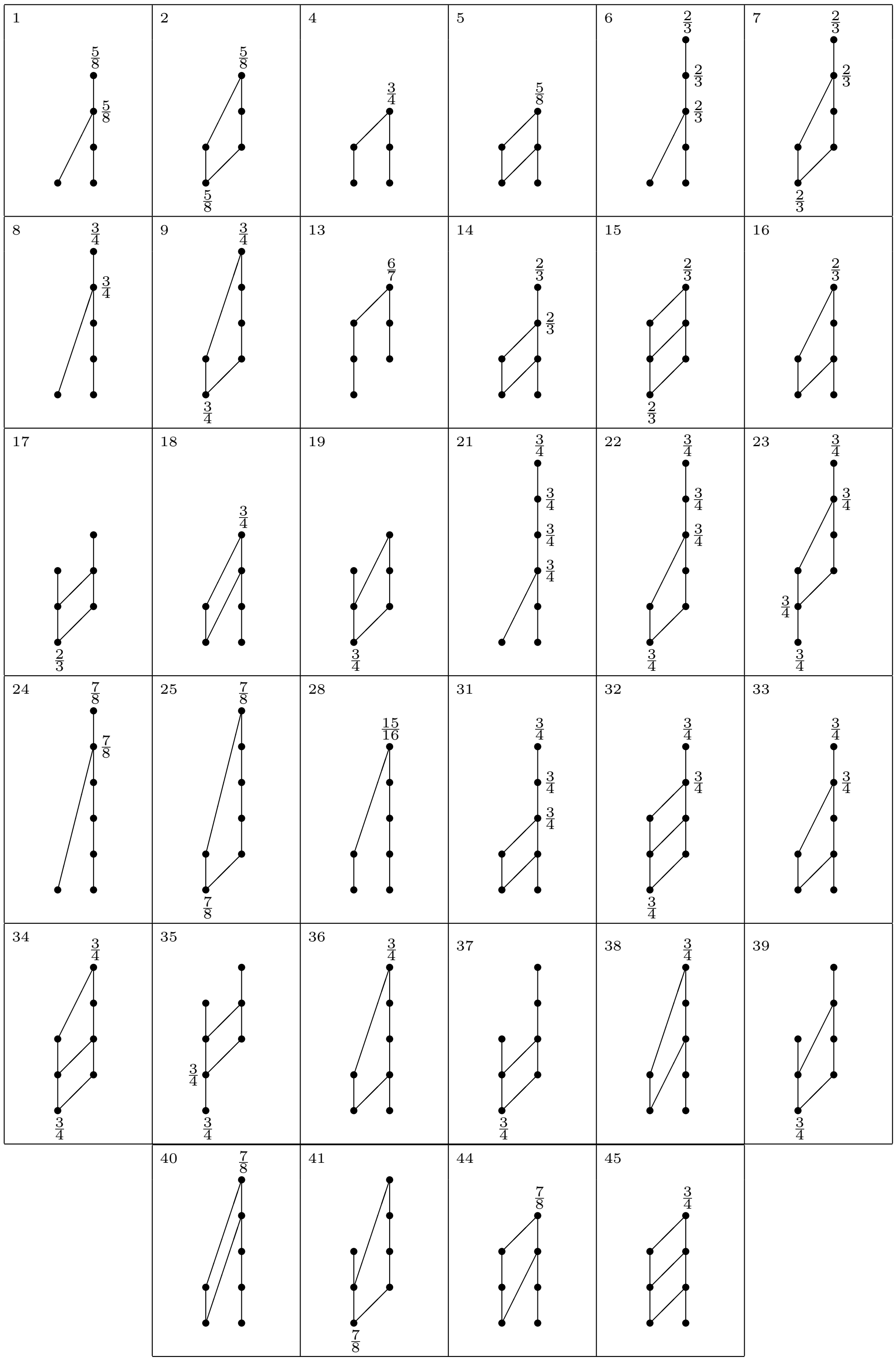
(вважаємо, що S не містить елемента, позначеного як 0).

Число $m_f^{(s)}$, де $f = q_S(z)$, а s — елемент із S, будемо позначати через $m_S(s)$ або просто через $m(s)$, якщо S фіксоване; s-е P-число $m_f^{(s)}$ будемо також називати P-числом, що відповідає елементу $s \in S$. Очевидно, що якщо T — ч. в. множина, дуальна до S, то $m_T(s) = m_S(s)$.

2. Основний результат. Нехай S — скінченна ч. в. множина. Її елемент називається вузловим, якщо він порівняльний з усіма іншими елементами. Якщо S має додатно визначену форму Тітса, то вона називається серійною, якщо для будь-якого натурального m існує ч. в. множина $T \supset S$ така, що $|T \setminus S| = m$ і форма Тітса T є додатно визначеною. Усі скінченна ч. в. множини з додатно визначеною формою Тітса описано в роботі [4], а в роботі [6] вказано, які із них є серійними.

Мета цієї статті — опис P-чисел для вузлових точок несерійних ч. в. множин з додатно визначеною формою Тітса. У формулюванні наступної теореми виписано всі такі множини з точністю до ізоморфізму та антиізоморфізму (цього досить, бо дуальні множини мають однакові P-числа).

Теорема 2. *P-числа для вузлових точок несерійних ч. в. множин з додатно визначеною формою Тітса є настуними.*



Доведення. Ч. в. множину, яка розміщена в таблиці за номером i, позначаємо через P_i. Її елементи будемо нумерувати числами $1, 2, \dots n_i$, де $n_i = |P_i|$; відношення часткового порядку будемо позначати в цьому випадку через $\preceq$.

Укажемо схему доведення теореми. Нехай $s_{\max}$ — вузлова точка ч. в. множини P_i. Занумеруємо точки P_i таким чином, щоб точка $s_{\max}$ була позначена числом $n = n_i$. Тоді матриця квадратичної форми $q_{P_i}^{(n)}(z,a)$ — це симетрична матриця розміру $(n+1)\times(n+1)$ такого вигляду:

$$M_i(a) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & 2 & * & \dots & * & * \\ -1 & * & 2 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & * & * & \dots & 2 & * \\ -1 & * & * & \dots & * & 2a \end{pmatrix}$$

(перший рядок і стовпець відповідають змінній z_0, тобто мають номер 0). Оскільки P_i — ч. в. множина з додатно визначеною формою Тітса, то за критерієм Сільвестра всі головні мінори матриці $M_i(1)$ — додатні (бо $q_{P_i}^{(n)}(z,1) = q_{P_i}(z)$), а значить всі головні мінори, окрім мінора (найбільшого) порядку $n+1$, матриці $M_i(a)$ додатні. Значить (знову за критерієм Сільвестра) число $m_{P_i}(n)$ є розв'язком відносно a лінійного рівняння $\Delta_i(n+1,a)=0$, де

$$\Delta_i(n+1,a) = |M_i(a)| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & 2 & * & \dots & * & * \\ -1 & * & 2 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & * & * & \dots & 2 & * \\ -1 & * & * & \dots & * & 2a \end{vmatrix}.$$

Очевидно, що замість рівняння $\Delta_i(n+1,a)=0$ можна взяти рівняння $\Delta^\circ(n+1,a)=0$, де

$$\Delta_i^\circ(n+1,a) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & * & \dots & * & * \\ 1 & * & 2 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & * & * & \dots & 2 & * \\ 1 & * & * & \dots & * & 2a \end{vmatrix}.$$

За вказаною схемою можна обчислювати P-числа для довільної (а не лише вузлової) точки.

Для безпосереднього обчислення визначників використовується відповідна комп'ютерна програма.

Робота підтримана грантом Ф28.1/026 між ДФФД і РФФИ.

1. *Gabriel P.* Unzerlegbure Darstellungen, I // Manus. Math. – 1972. – **6**, №1. – P. 71–103.
2. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анализ и его прил. – 1974. – **8**. – С. 34–42.
3. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* Частично упорядоченные множества инъективно-конечного типа // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2005. – Вип. 9. – С. 15–25.

4. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, №3. – С. 18–58.
5. *V. M. Bondarenko, Yu. M. Pereguda.* On P-numbers of quadratic forms // Геометрія, топологія та їх застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – **6**, №2. – С. 474–477.
6. *Бондаренко В. М., Стьопочкіна М. В.* Про серійні частково впорядковані множини з додатно визначеною квадратичною формою Тітса // Нелінійні коливання. – 2006. – **9**, №3. – С. 320–325.

Одержано 21.10.2010