УДК 519.6

М. І. Глебена (Ужгородський нац. ун-т)
Г. Г. Цегелик (Львівський нац. ун-т імені Івана Франка)

ДО ПИТАННЯ ВІДШУКАННЯ АБСОЛЮТНОГО ЕКСТРЕМУМУ НЕГЛАДКИХ І РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ І ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ

The possibilities of application of algorithms based on the apparatus of non-classical Newtonian majorant and diagrams functions for finding of absolute extremum of function of one and two real variables are grounded in the work.

В роботі обґрунтовано можливості застосування алгоритмів мажорантного типу до відшукання абсолютного екстремуму функції однієї та двох дійсних змінних.

Вступ. Проблема відшукання абсолютного екстремуму негладких і розривних функцій часто виникає під час розв'язування різних класів прикладних задач [1, 2]. Тому великий інтерес становить розробка чисельних методів, за допомогою яких можна було б знаходити абсолютний екстремум як неперервно-диференційованих, так і довільних негладких і розривних функцій.

Нами ведеться робота над розробленням таких методів. В їх основу покладено використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично [3, 4].

В [5] розроблений алгоритм відшукання абсолютного екстремуму функції однієї дійсної змінної, використовуючи властивості некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично. В [6] такий же алгоритм розроблений для функцій двох дійсних змінних, використовуючи властивості некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично. В роботі розглядається питання універсальності розроблених алгоритмів.

Теорема 1. *Для будь-якої функції $f(x) \neq const$, заданої на проміжку $[a, b]$, для якої $|f(x)| \leq M < \infty$, завжди при будь-якому початковому наближенні з заданою точністю можна знайти її абсолютний екстремум, використовуючи алгоритм, наведений в [5].*

Доведення. Припустимо, що потрібно знайти абсолютний екстремум функції $f(x)$ на проміжку $[a, b]$. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $f(x) > 0$ для всіх $x \in [a, b]$. Якщо $f(x) \in C[a, b]$, то функція визначена в усіх точках проміжку $[a, b]$. Тоді для будь-якої системи точок $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ проміжку $[a, b]$ можна побудувати некласичну мажоранту і діаграму Ньютона. Звідси випливає, що користуючись алгоритмом, наведеним в [5], завжди можна знайти абсолютний максимуму функції $f(x)$ з заданою точністю.

Розглянемо тепер випадок, коли функція $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ має скінченну кількість точок розриву першого роду. Вважаємо, що ці точки розриву відомі. Нам потрібно довизначити функцію $f(x)$ в точках розриву так, щоб вона стала визначеною в усіх точках проміжку $[a, b]$. Тоді для будь-якої системи точок $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, в яку входять усі точки розриву, буде існувати некласична мажоранта і діаграма Ньютона і можна буде використати алгоритм, наведений в [5], для відшукання з заданою точністю абсолютного максимуму функції $f(x)$. Довизначення функції $f(x)$ в точках розриву відбувається так.

Нехай $\bar{x}$ – точка розриву першого роду функції $f(x)$. Тоді можливі такі випадки:

1) $\lim\limits_{x\to\bar{x}-0} f(x) = \lim\limits_{x\to\bar{x}+0} f(x) = c;$

2) $\lim\limits_{x\to\bar{x}-0} f(x) = c, \quad \lim\limits_{x\to\bar{x}+0} f(x) = d, \quad c \neq d;$

3) $f(\bar{x}) = c, \quad \lim\limits_{x\to\bar{x}+0} f(x) = d;$

4) $f(\bar{x}) = c, \quad \lim\limits_{x\to\bar{x}-0} f(x) = d.$

Тоді у першому випадку приймаємо $f(\bar{x}) = c$; у другому – $f(\bar{x}) = c$, якщо $c > d$, або $f(\bar{x}) = d$, якщо $c < d$; у третьому і четвертому - $f(\bar{x}) = c$, якщо $c \geq d$, або $f(\bar{x}) = d$, якщо $c < d$.

Отже, маючи функцію, визначену в усіх точка проміжку $[a, b]$, вибираємо відповідним чином систему точок, в яку входять усі точки розриву, і використовуємо алгоритм, наведений в [5], для відшукання абсолютного максимуму з заданою точністю функції $f(x)$.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. $y = [\sin x] \to \max$ *на* $[0; \pi]$. *Графік якої зображено на мал.1. Точкою розриву є точка* $\frac{\pi}{2}$ *і* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} y = 1$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} y = 1$, *тоді беремо* $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

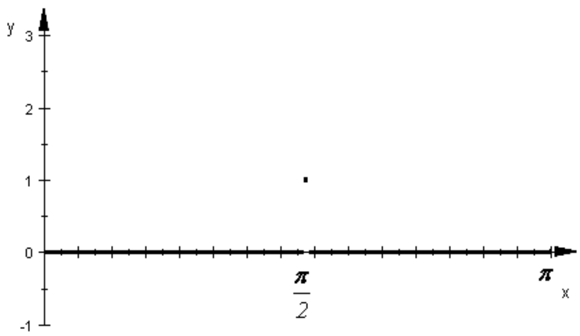

Рис. 1

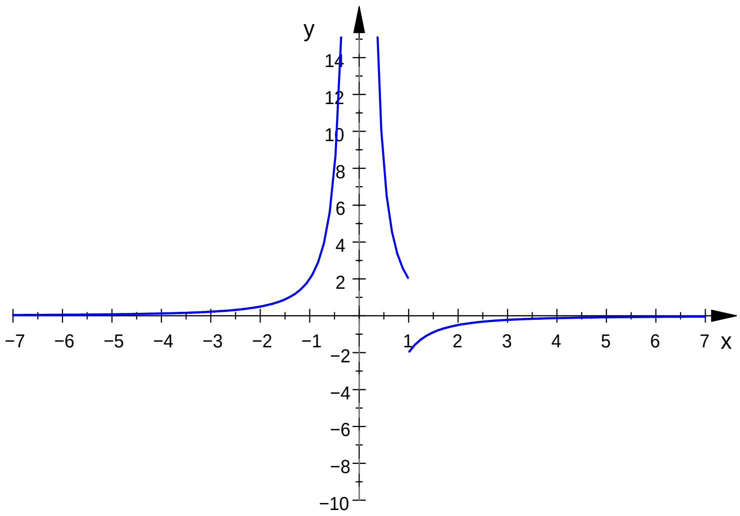

Рис. 2

Приклад 2. $y = \frac{2|x-1|}{x^2-x^3} \to \min$ *на* $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$. *Графік якої зображено на мал. 2. Точкою розриву є точка* 1 $\lim\limits_{x\to 1-0} y = 2$, $\lim\limits_{x\to 1+0} y = -2$ *тоді беремо* $f(1) = -2$.

Приклад 3. $y = \frac{|\sin x|}{\sin x} + \cos x \to \max$ *на* $[-\pi; \pi]$. *Графік якої зображено на мал. 3. Точками розриву є точки* $-\pi, 0, \pi$, $\lim\limits_{x\to -\pi+0} y = -2$, $\lim\limits_{x\to 0-0} y = 0$, $\lim\limits_{x\to 0+0} y = 2$, $\lim\limits_{x\to \pi-0} y = 0$. *Тоді беремо* $f(-\pi) = -2$; $f(0) = 2$; $f(\pi) = 0$.

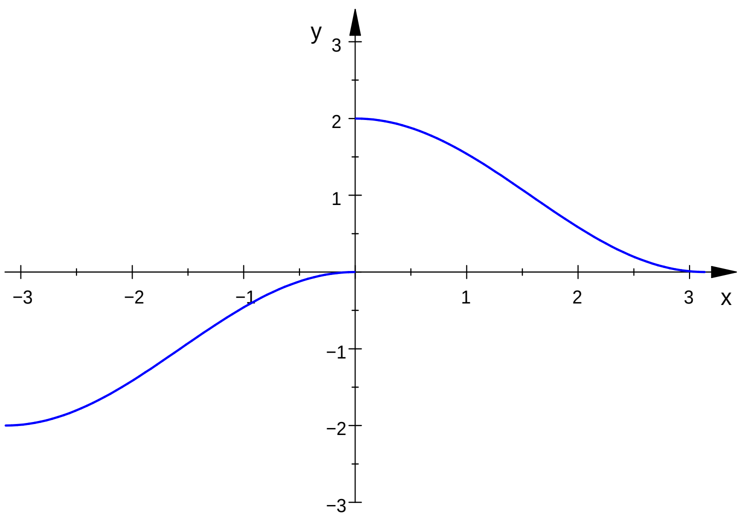

Рис. 3

Розглянемо тепер задачу відшукання абсолютного екстремуму функції двох дійсних змінних.

Нехай функція $f(x, y) \neq const$ є неперервною в області $D = \{a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ і для всіх $(x, y) \in D$ виконується умова $f(x, y) > 0$. Побудуємо для функції $f(x, y)$ за значеннями (x_i, y_j) $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m)$, де $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$,

$c = y_1 < y_2 < \cdots < y_n = d$, некласичну діаграму Ньютона [3, 4]. В цьому випадку діаграма Ньютона буде опуклою багатогранною поверхнею. Тоді, якщо $f(x, y)$ має єдину точку абсолютного максимуму, то справедлива теорема.

Теорема 2. *Серед точок* (x_i, y_j) $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m)$ *існує єдина точка* (x_k, y_l), *для якої виконуються умови*

$R_{kl}(x) \le 1, \quad R_{k+1,l}(x) \ge 1, \quad R_{kl}(y) \le 1, \quad R_{k,l+1}(y) \ge 1.$

Доведення. Припустимо, що існує інша точка (x_s, y_r), для якої виконуються умови: $R_{sr}(x) \le 1, \quad R_{s+1,r}(x) \ge 1, \quad R_{sr}(y) \le 1, \quad R_{s,r+1}(y) \ge 1.$

Нехай $k < s$, тоді $R_{kl}(x) \le 1, R_{k+1,l}(x) \ge 1, \ldots, R_{sr}(x) \le 1, R_{s+1,r}(x) \ge 1.$

Нехай $s < k$, тоді $R_{sr}(x) \le 1, R_{s+1,r}(x) \ge 1, \ldots, R_{kl}(x) \le 1, R_{k+1,l}(x) \ge 1.$

Нехай $l < r$, тоді $R_{kl}(y) \le 1, R_{k,l+1}(y) \ge 1, \ldots, R_{sr}(y) \le 1, R_{s,r+1}(y) \ge 1.$

Нехай $r < l$, тоді $R_{sr}(y) \le 1, R_{s,r+1}(y) \ge 1, \ldots, R_{kl}(y) \le 1, R_{k,l+1}(y) \ge 1.$

Виконання таких нерівностей суперечить умовам:

$R_{ij}(x) \le R_{i+1,j}(x)\, (i = 1, 2, \ldots, n-1;\ j = 1, 2, \ldots, m)$,

$R_{ij}(y) \le R_{i,j+1}(y) \quad (j = 1, 2, \ldots, m-1;\ i = 1, 2, \ldots, n)$. Ми прийшли до протиріччя, тобто точка (x_k, y_l) є єдина.

Теорема 3. *Для будь-якої функції* $f(x, y) \ne const$, *заданої в області* $D = \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$, *для якої* $|f(x, y)| \le M < \infty$ *завжди при будь-якому початковому наближенні з заданою точністю можна знайти її абсолютний екстремум, використовуючи алгоритм, наведений в [6].*

Доведення. Припустимо, що потрібно знайти абсолютний екстремум функції $f(x, y)$ в області $D = \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $f(x, y) > 0$ для всіх $x \in D$. Якщо $f(x, y) \in C(D)$, то функція визначена в усіх точках області D. Тоді для будь-якої системи точок $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, $c = y_1 < y_2 < \cdots < y_n = d$ області D можна побудувати некласичну мажоранту і діаграму Ньютона. Звідси випливає, що, користуючись алгоритмом, наведеним в [6], завжди можна знайти абсолютний максимум функції $f(x, y)$ з заданою точністю.

Розглянемо тепер випадок, коли функція $f(x, y)$ в області $D = \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ має лінію розриву і ця лінія розриву визначається скінченною сукупністю точок розриву $(\bar{x}, \bar{y})$ першого роду. Вважаємо, що ця сукупність точок розриву відома. Нам потрібно довизначити функцію $f(x, y)$ в точках розриву так, щоб вона стала визначеною в усіх точках області $D = \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$.

Тоді для будь-якої системи точок $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, $c = y_1 < y_2 < \cdots < y_n = d$, в яку входять усі точки розриву, буде існувати некласична мажоранта і діаграма Ньютона і можна буде використати алгоритм, наведений в [6], для відшукання з заданою точністю абсолютного максимуму функції $f(x, y)$. Довизначення функції $f(x, y)$ у кожній точці сукупності відбувається так.

Нехай $(\bar{x}, \bar{y})$ одна із точок сукупності. Тоді можливі такі випадки:

1) $\lim\limits_{\substack{x \to \bar{x} - 0 \\ y \to \bar{y} - 0}} f(x, y) = \lim\limits_{\substack{x \to \bar{x} + 0 \\ y \to \bar{y} + 0}} f(x, y) = q;$

2) $\lim\limits_{\substack{x \to \bar{x} - 0 \\ y \to \bar{y} - 0}} f(x, y) = q, \quad \lim\limits_{\substack{x \to \bar{x} + 0 \\ y \to \bar{y} + 0}} f(x, y) = g, \quad q \ne g;$

3) $f(\bar{x},\bar{y}) = q, \quad \lim\limits_{\substack{x \to \bar{x}+0 \\ y \to \bar{y}+0}} f(x,y) = g;$

4) $f(\bar{x},\bar{y}) = q, \quad \lim\limits_{\substack{x \to \bar{x}-0 \\ y \to \bar{y}-0}} f(x,y) = g;$

Тоді у першому випадку приймаємо $f(\bar{x},\bar{y}) = q$; у другому $f(\bar{x},\bar{y}) = q$, якщо $q > g$, або $f(\bar{x},\bar{y}) = g$, якщо $q < g$; у третьому і четвертому $f(\bar{x},\bar{y}) = q$, якщо $q > g$, або $f(\bar{x},\bar{y}) = g$, якщо $q < g$.

Отже, маючи функцію, визначену в усіх точках області D, вибираємо відповідним чином систему точок, в яку входять усі точки лінії розриву, і використовуємо алгоритм, наведений в [6], для відшукання абсолютного максимуму з заданою точністю функції $f(x,y)$.

Розглянемо приклад.

Приклад 4. $z = [\sin(xy)] \to \max$ *в області* $D = \{0 \le x \le \pi\ ,\ 0 \le y \le \pi\}$. *Лінією розриву є дуга* $y = \frac{\pi}{2x}$, $0 < x \le \pi$ *і вона визначається сукупністю точок* $\left(x, \frac{\pi}{2x}\right)$ *для яких* $\forall\ x,\quad 0 < x \le \pi$ $\lim\limits_{y \to \frac{\pi}{2x}-0} z = \lim\limits_{y \to \frac{\pi}{2x}+0} z = 1$, *тоді беремо* $f\left(x, \frac{\pi}{2x}\right) = 1$.

1. *Батухтин В. Д, Майборода Л. А.* Оптимизация разрывных функций. – М.: Наука, 1984. – 208 с.
2. *Шор Н. З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – К.: Наук. думка, 1979. – 199 с.
3. *Цегелик Г. Г.* Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, №9. – С. 1273–1276.
4. *Цегелик Г. Г., Федчишин Н. В.* Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип 50. – С. 209-211.
5. *Глебена М. І., Цегелик Г. Г.* Чисельний метод мажорантного типу відшукання екстремуму негладких і розривних функцій //Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.матем. і інформ. – 2006. - Вип.12-13. – С. 55-58.
6. *Глебена М. І., Цегелик Г. Г.* Чисельний метод відшукання екстремуму негладких функцій двох дійсних змінних //Прикладні проблеми механіки і матем. – 2007. - Вип.5 – С. 17-21.

Одержано 18.10.2010