UDC 512.54:548

П. М. Гудивок, Ал. А. Кирилюк, Ан. А. Кирилюк, В. П. Рудько
(Ужгородский нац. ун-т)

R-КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

We prove the unboundedness of the dimensions of indecomposable and nonsplit R-crystallographic groups for the ring R of integers of of finite extension of the field of p-adic numbers and for some classes of point p-groups.

Доказывается неограниченность размерностей неразложимых и нерасщепляемых R-кристаллографических групп для кольца R целых величин конечного расширения поля p-адических чисел и некоторых классов точечных p-групп.

Классическая n-мерная кристаллографическая группа K является группой движений n-мерного точечного евклидового пространства $\mathbf{E}^n$, имеющая ограниченные фундаментальные области. Группа K является расширением свободной абелевой группы $\mathbb{Z}^n$ с помощью конечной подгруппы (точечной группы) в группе $GL(n, \mathbb{Z})$.

История создания кристаллографии и теории кристаллографических групп связана с именами Е. С. Федорова [1], А. Шенфлиса [2], Л. Бибербаха [3]. Г. Цассенхауз создал алгебраическую теорию n-мерных кристаллографических групп [4, 5]. Некоторые аспекты этой теории рассмотрены в книге [6]. В данное время известно описание всех кристаллографических групп размерности $n \leq 4$ (см. [7]). В работах [8–11] обсуждалась проблема дикости задачи классификации всех многомерных кристаллографических групп.

В работе дается определение R-кристаллографической группы $K(G, f)$ для области главных идеалов R и конечной подгруппы G в группе $GL(n, R)$. Группа $K(G, f)$ является расширением аддитивной группы R^n n-мерных векторов над кольцом R с помощью конечной группы G. Изучаются свойства R-кристаллографических групп для кольца целых величин R конечного расширения поля p-адических чисел (см. также [6]). При этом используется теория представлений конечных групп над этими кольцами R, развитая в работах [12, 13]. Основные результаты работы (теоремы 6-7) относятся к оценкам размерностей неразложимых нерасщепляемых R-кристаллографических групп. Некоторые вопросы, связанные с такими группами, рассмотрены в [14].

Пусть R – область главных идеалов, F – любое расширение поля частных кольца R, F^n – аддитивная группа n-мерных векторов над полем F, $\widehat{F}^n = F^n/R^n \approx (\widehat{F}/R))^n$ – n-мерный тор над полем F. Пусть $M(n, R)$ – кольцо матриц порядка n над кольцом $R, A \in M(n, R), x \in F^n$. Тогда произведение Ax прямоугольных матриц является элементом группы F^n. Если $x \in R^n$, то $Ax \in R^n, AR^n = R^n$. Это значит, что если G – подгруппа группы $GL(n, R)$, то группы $F^n, R^n, \widehat{F}^n$ являются модулями над групповым кольцом RG. Пусть $G \subseteq GL(n, R)$. 1-коциклом группы G со значениями в торе $\widehat{F}^n$ называется отображение

$$f : G \to \widehat{F}^n,$$

удовлетворяющее условиям:

$$f(e) = 0;$$
$$f(ab) = af(b) + f(a),$$

где a, b элементы группы G, e – единица группы G.

Пусть x принадлежит группе F^n. Определим функцию f_x на группе G, полагая

$$f_x(a) = (a - e)x \quad (a \in G).$$

Легко видеть, что f_x является 1-коциклом группы G. Этот коцикл называется 1-кограницей, определяемой вектором x. Все 1-коциклы группы G образуют абелеву группу $C^1(n, G)$ относительно операции сложения коциклов, в которой 1-кограницы образуют подгруппу $B^1(n, G)$. Факторгруппа

$$H^1(n, G) = C^1(n, G)/B^1(n, G)$$

называется первой группой когомологий группы G со значениями в n-мерном торе $\widehat{F}^n$.

Отметим некоторые свойства 1-коциклов. Пусть $f : G \to \widehat{F}^n$ 1-коцикл группы $G, a,\ b \in G$. Тогда

1) $f(a^s) = (a^{s-1} + \cdots + a + e)f(a)$;

2) в частности, если $a^s = e$, то

$$(a^{s-1} + \cdots + a + e)f(a) = 0;$$

если $ab = ba$, то

$$(a - e)f(b) = (b - e)f(a);$$

$$f(a^{-1}) = -a^{-1}f(a)).$$

Из определений легко следует, что

$$|G|f(a) = (a - e)\left(\sum_{a \in G} a^{-1}f(a)\right),$$

в частности, $|G| \cdot f = f_x$ это 1-кограница, определяемая вектором

$$x = |G|^{-1}\sum_{a \in G} a^{-1}f(a).$$

Другими словами, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Группа $H^1(n, G)$ периодическая и порядок каждого элемента этой группы является делителем порядка $|G|$ группы G.*

Отметим еще одно свойство, которое будет часто использоваться.

Лемма 1. *Пусть матрица a из группы G не имеет собственнных значений, равных единице. Тогда в каждом классе 1-коциклов группы G содержится коцикл f такой, что $f(a) = 0$.*

Доказательство. Пусть f – 1-коцикл группы G. Так как $\det(a - e) \neq 0$, то уравнение $(a - e)z + f(a) = 0$ разрешимо относительно неизвестного вектора $z \in F^n$. Прибавляя к коциклу f кограницу, определяемую вектором z, мы получим коцикл f_1 такой, что $f_1(a) = 0$. Лемма доказана.

Пусть G – конечная подгруппа группы матриц порядка n над кольцом R и $f : G \to \widehat{F}^n$ 1-коцикл группы G со значениями в n-мерном торе над полем F. Для каждого элемента $a \in G$ значение $f(a)$ состоит из множества

$$f(a) = \{x_0 + x | x \in R^n\},$$

где x_0 – некоторый n-мерный вектор над полем F. Назовем n-мерной R-кристаллографической группой с точечной группой G подгруппу $K = K(G, f)$ в $GL(n+1, F)$ всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $a \in G, x \in f(a)$. Все матрицы вида

$$\begin{pmatrix} e & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (y \in f(e) = R^n)$$

образуют нормальную подгруппу $T(K)$ в группе K. Очевидно, $T(K) \cong R^n$ и $K/T(K) \cong G$. Нетрудно показать, что $T(K)$ является максимальной абелевой подгруппой в группе K, а группа G действует в группе $T(K)$, т. е. $GT(K) = T(K)$. Отметим, что только единичный элемент группы G является единичным оператором в группе $T(K)$. Назовем группу K расщепляемой, если эта группа изоморфна полупрямому произведению $R^n \rightthreetimes G$. Легко видеть, что если f – 1-кограница, то группа $K(G, f)$ расщепляема.

Если $R = \mathbb{Z}$ – кольцо целых рациональных чисел и $F = \mathbf{R}$ – поле действительных чисел, то R-кристаллографические группы являются классическими кристаллографическими группами. Теория многомерных кристаллографических групп построена Цассенхаузом [4]. Алгебраические основы этой теории изложены в книге [6]. В данной работе изучаются R-кристаллографические группы в случае, когда R – кольцо целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$ или кольцо целых величин конечного расширения поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$.

Пусть $K_j(G_j, f_j) \quad (j = 1, 2)$ – две R-кристаллографические размерности n_j группы с точечными группами $G_j \subset GL(n_j, R)$ и коциклами $f_j; G_j \to \widehat{F}^{n_j}$.

Теорема 2 ([6]). *Пусть $\varepsilon : K_1(G_1, f_1) \to K_2(G_2, f_2)$ изоморфизм групп. Тогда*

1) $n_1 = n_2$;

2) $\varepsilon(T(K_1)) = T(K_2)$;

3) *Пусть $T_1(K_1) = T_2(K_2)$. Тогда для некоторой матрицы $S \in GL(n, R)$ $(n = n_1 = n_2)$ выполняется условие $S^{-1} G_1 S = G_2$.*

Для подгруппы G в группе $GL(n, R)$ обозначим через

$$N(G) = \{s \in GL(n, R) | s^{-1} G s = G\}$$

нормализатор G в этой группе. Определим действие нормализатора $N(G)$ в группе $H^1(G, \widehat{F}^n)$ когомологий. Пусть f – 1-коцикл группы G и $s \in N(G)$. Положим

$$f^s(a) = s f(s^{-1} a s) \quad (a \in G).$$

Легко видеть, что функция $f^s : G \to \widehat{F}^n$ является 1-коциклом группы G и если f – 1-кограница, то f^s также 1-кограница и требуемое действие определено.

Теорема 3 ([6]). *Пусть G – конечная подгруппа группы $GL(n, R)$ и f, f_1 – два 1-коцикла группы G. R-кристаллографические группы $K(G, f)$ и $K(G, f_1)$ изоморфны тогда и только тогда, когда найдется такой элемент s из нормализатора $N(G)$, что коциклы f^s и f_1 лежат в одном классе коциклов (т. е. $f^s - f_1$ является кограницей).*

Следствие 1. *Группы $K(G, f)$ и $K(G, f_1)$ изоморфны тогда и только тогда, когда эти группы сопряжены в группе $GL(n + 1, F)$.*

Следствие 2. *Группа $K(G, f)$ расщепляема тогда и только тогда, когда коцикл f является кограницей.*

Замечание 1. *Пусть R – кольцо целых величин конечного расширения поля рациональных p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ и G – конечная p'-группа. Тогда группа $H'(G, \widehat{F}^n)$ всегда нулевая. В частности, любая R-кристаллографическая группа $K(G, f)$ с точечной группой G является расщепляемой.*

В следующих теоремах характеристика кольца R равна нулю и для каждого натурального числа n факторкольцо R/nR является конечным. Этим условиям удовлетворяют кольцо $\mathbf{Z}$ и кольцо R целых величин конечного расширения поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$.

Теорема 4 ([6]). *Для любой конечной подгруппы $G \subset GL(n, R)$ первая группа когомологий $H^1(G, \widehat{F}^n)$ также является конечной группой.*

Следствие 3. *Для точечной группы G $(G \subset GL(n, R))$ существует только конечное число попарно неизоморфных n-мерных R-кристаллографических групп с точечной группой G.*

Доказательство. Число этих групп равно числу орбит, на которые распадается группа $H^1(G, \widehat{F}^n)$ под действием нормализатора $N(G)$.

Сделаем следующее предположение о кольцах R. Для любого натурального числа n любая конечная группа имеет только конечное число попарно неэквивалентных неразложимых представлений над кольцом R, степень которых равна n. Этому условию удовлетворяют кольца $\mathbf{Z}$, $\mathbb{Z}_p$ кольца целых величин конечных расширений поля рациональных чисел или поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$.

Как следствия получаем следующие свойства.

Теорема 5. *В группе $GL(n, R)$ с точностью до сопряженности существует только конечное число конечных подгрупп.*

Следствие 4. *С точностью до изоморфизма существует только конечное число R-кристаллографических групп размерности n.*

Пусть G – конечная подгруппа группы $G(n, R)$ и f – 1-коцикл этой подгруппы со значениями в группе $\widetilde{F}^n$. Предположим, что группа G разложима, т. е. существуют подгруппы G_j в группах $G_j(n_j, R)$ $(n_1 + n_2 = n)$ такие, что группа G сопряжена в $GL(n, R)$ с некоторым подпрямым произведением групп G_1 и G_2. Тогда коцикл f можно представить в виде внешней суммы $f = f_1 \dot{+} f_2$, где если

$$g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \quad (g_j \in G_j),$$

то $f(g) = (f_(g_1), f_2(g_2))$. Тогда R-кристаллографическая группа $K = K(G, f)$ будет сопряжена в группе $GL(n+1, F)$ с группой матриц вида

$$\begin{pmatrix} g_1 & 0 & x_1 \\ 0 & g_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (g_j \in G_j,\, x_j \in f_j(g_j)).$$

Назовем в этом случае группу K разложимой.

Для кольца R и конечной группы G введем в рассмотрение два натуральных числа: $n_0(R, G)$, $n_1(R, G)$ – минимум и максимум размерностей нерасщепляемых неразложимых R-кристаллографических групп с точечной группой, изоморфной группе G.

Введем некоторые обозначения и соглашения. Будем считать, что простое число p является необратимым в кольце R. Пусть S – поле частных кольца R. Пусть многочлен

$$\psi_k(x) = x^{m_k} - \alpha^{(k)}_{m_k-1} x^{m_k-1} - \cdots - \alpha^{(k)}_1 x - \alpha^{(k)}_0 \quad (\alpha_j \in R)$$

является неприводимым степени m_k над полем S делителем полинома деления круга на p^k частей

$$\Phi_{p^k}(x) = x^{(p-1)p^{k-1}} + \cdots x^{p^{k-1}} + 1.$$

Пусть ε_k – корень многочлена $\psi_k(x)$ и

$$\widetilde{\varepsilon}_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha^{(k)}_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha^{(k)}_1 \\ \dots & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha^{(k)}_m \end{pmatrix}$$

– сопроводительная матрица многочлена $\psi_k(x)$, $m = m_k$. Отметим, что $\widetilde{\varepsilon}_k$ является матрицей оператора умножения на ε_k в R-базисе $1, \varepsilon_k, \dots, \varepsilon_k^{m_k-1}$ кольца $R[\varepsilon_k]$. Дальше будет использовано следующее свойство этих матриц.

Лемма 2. *Уравнение относительно неизвестного* $Z \in \widehat{F}^n$

$$(\widetilde{\varepsilon}_k - E)Z = 0$$

имеет следующее решение

$$\begin{aligned} &z_1 = \alpha^{(k)}_0 z, \\ &z_2 = (\alpha^{(k)}_0 + \alpha^{(k)}_1) z, \\ &\dots, \\ &z_{m-1} = (\alpha^{(k)}_0 + \cdots + \alpha^{(k)}_{m-1}) z, \\ &z_m = z, \end{aligned}$$

где

$$z = y/\beta_k, \quad (y \in R,\, \beta_k = \alpha^{(k)}_0 + \cdots + \alpha^{(k)}_m).$$

Доказательство леммы очевидно.

Замечание 2. $p\beta_k^{-1} \in R$. *Если* $s > 1$ *или полином* $\Phi_p(x)$ *приводим над* R, *то не существует элемента* $y \in R$ *такого, чтобы* $p^{-s} + \frac{y}{\beta_s} \in R$.

Действительно, многочлен $\frac{\Phi_{p^k}(x)}{\psi_k(x)}$ принадлежит кольцу $R[x]$. Подставим $x = 1$.

Для циклической p-группы $C = \langle a \rangle$ соответствие

$$\Delta_k : a \to \widetilde{\varepsilon}_k$$

определяет неприводимое неединичное R-представление Δ_k этой группы степени m_k. Пусть p^s – порядок группы C. Любое R-представление Γ группы C эквивалентно над полем S сумме представлений Δ_k $(0 \le k \le s)$, Δ_0 – единичное представление. Представление Γ является точным тогда и только тогда, когда в эту сумму входит Δ_s.

Рассмотрим случай R-представлений циклической p-группы $C = C_{p^s} = \langle a \rangle$ $(a^{p^s} = e)$, которое имеет две неприводимые компоненты. Пусть ε и ξ – первообразные корни степеней p^r и p^k из единицы $(r < k \le s)$ и

$$\Delta_r ; a \to \widetilde{\varepsilon},$$
$$\Delta_k : a \to \widetilde{\xi}$$

– два неприводимых R-представления группы C.

Лемма 3 ([12]). *Всякое неразложимое R-представление группы C, содержащие неприводимые компоненты Δ_r, Δ_k, эквивалентно представлению вида:*

$$\Gamma(a) = \begin{pmatrix} \widetilde{\varepsilon} & \langle \delta \rangle \\ 0 & \widetilde{\xi} \end{pmatrix},$$

где $\langle \delta \rangle$ – матрица, все столбцы которой нулевые, за исключением последнего, а последний столбец состоит из координат элемента δ кольца $R[\varepsilon]$ в степенном R-базисе $1, \varepsilon, \ldots$ этого кольца. Представления $\Gamma(\delta)$ и $\Gamma(\delta')$ эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$\delta \equiv \theta \delta' (mod \psi_k(\varepsilon)),$$

где θ – обратимый элемент кольца $R[\varepsilon]$ и ψ_k, – введенный ранее неприводимый над полем S многочлен, корнем которого является ξ.

Теорема 6. *Пусть $C = C_{p^s}$ – циклическая p-группа порядка p^s. Тогда*

$$n_0(R, G) = 1 + m_s,$$

где m_s – наибольшая степень неприводимого R-представления группы C. Пусть $R = \mathbb{Z}_p$ – кольцо целых p-адических чисел, $p > 2$ и $G = C_{p^s,p}$ – абелева группа типа (p^s, p). Тогда

$$n_0(R, G) = m_1 + m_s = (p^{s-1} + 1)(p - 1),$$

m_1 – наименьшая степень неприводимого неединичного R-представления группы C.

Доказательство. Пусть $\Gamma - R$-представление группы C и $G = \Gamma(C)-$подгруппа группы $GL(n, R)$, изоморфная группе C. Тогда Δ_s должно входить в Γ и матрица $\Gamma(a)$ должна иметь единицу собственным значением (см. лемму 1).

Следовательно, наименьшее $n = 1 + m_s$. Из леммы 3 вытекает существование неразложимого R-представления Γ группы C такого, что

$$\Gamma(a) = \begin{pmatrix} 1 & \langle 1 \rangle \\ 0 & \widetilde{\psi_s} \end{pmatrix}.$$

Положим

$$f(a) = (p^{-s}, 0) + R^n \in \widehat{F}^n.$$

Тогда

$$(1 + a + \cdots + a^{p^s - 1})(f(a) = (1, 0) + R^n = R^n = 0$$

в группе $\widehat{F}^n$. Если к коциклу f прибавить любую когранницу, то первая компонента α вектора $f(a) + (a - e)z$ будет равна

$$\alpha = \frac{1}{p^s} + \frac{u}{\beta_s},$$

где $u \in R$. Из леммы 2 и замечания вытекает, что α не принадлежит кольцу R, т. е. коцикл f не когомологичен нулевому. Следовательно R-кристаллографическая группа $K(G, f)$ не расщепляема.

Рассмотрим теперь группу G матриц над кольцом R, изоморфную группе $C_{p^s,p} = \langle a, b \rangle$. Пусть Γ – представление группы $C_{p^s,p}$ и $G = \Gamma(C_{p^s,p})$. Рассматривая ограничения Γ на циклические подгруппы, убеждаемся в том, что Δ_1 и Δ_s должны входить в эти ограничения. Таким представлением может быть соответствие, в котором

$$\Gamma(a) = \begin{pmatrix} E_{m_1} & pX \\ 0 & \widehat{\psi_s} \end{pmatrix}, \quad \Gamma(b) = \begin{pmatrix} \widetilde{\psi_1} & Y \\ 0 & E_{m_s} \end{pmatrix}.$$

Докажем существование таких матриц X, Y над кольцом $\mathbb{Z}_p$, что соответствие Σ будет неразложимым $\mathbb{Z}_p$-представлением группы C. Матрицы X, Y должны удовлетворять уравнению

$$Y(E_{m_s} - \widetilde{\xi_s}) = (\widetilde{\xi_1} - E_{m_1}),$$

(здесь используются ранее введенные обозначения). Отметим, что в случае кольца $R = \mathbb{Z}_p$ все полиномы Φ_{p^k} неприводимы над полем $\mathbb{Q}_p$, $m_1 = p - 1$, $m_s = p^{s-1}(p-1)$ и все β_k $(k > 0)$ равны p.

Выберем матрицу Y. Пусть все ее столбцы равны последнему, а все элементы этого столбца равны единице. Удобно далее считать этот столбец координатным столбцом элемента $y = \xi_1^{-1}$ в базисе $1, \xi_1, \ldots, \xi_1^{p-2}$ поля $\mathbb{Q}_p(\xi_1)$ над полем Q_p. Выберем матрицу X. Пусть все ее столбцы нулевые, а последний является координатным столбцом неизвестного элемента x из поля $\mathbb{Q}_p(\xi_1)$. При так выбранных матрицах X, Y, указанное ранее уравнение примет вид

$$py = (\xi_1 - 1)x.$$

При этом мы учли вид матрицы $\widetilde{\xi_s} - E_{m_s}$, в частности, то обстоятельство, что в ее последнем столбце содержится p единиц, а остальные элементы этого столбца равны нулю. Из полученого уравнения вытекает, что $x = p(\xi - 1)^{-1}\xi_1^{-1}$ является элементом кольца $\mathbb{Z}_p[\xi_1]$, т. е. X – матрица над кольцом $\mathbb{Z}_p$. Мы построили матрицы X, Y над кольцом $\mathbb{Z}_p$, для которых Γ является I_p-представлением группы $C_{p^s,p} = \langle a,\, b\rangle$. Если это представление разложимо, то его ограничение на (b) кроме единичных слагаемых содержит слагаемое

$$b \to \begin{pmatrix} \widetilde{\xi_1} & \langle -\xi_1^{-1}\rangle \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

которое неразложимо в силу леммы 3. Это значит, что представление Γ имеет по крайней мере три композиционных фактора, в то время, когда таких факторов только два. Полученное противоречие доказывает неразложимость представления Γ. Пусть $G = \Gamma(C)$. Тогда G – неразложимая подгруппа группы $GL(n, \mathbb{Z}_p)$, где $n = m_1 + m_s = p - 1 + p^s - p^{s-1}$.

Построим кристаллографическую группу $K(G, f)$. Пусть

$$A = p^{-1}(-1, -2, \dots, -(p-1)).$$

Нетрудно видеть, что

$$(\widetilde{\xi_1} - E_{m_1})A = 0$$

над группой $\widehat{F}$. Положим $f(a) = (A, 0), f(b) = 0$. Так как $pA = 0$ и $(b - e)f(a) = 0$ в группе $\widehat{F}^{p-1}$, то f – коцикл. Пусть f_1 получается из коцикла f прибавлением кограницы, определяемой вектором $Z = (Z_1, Z_2)\,(Z_j \in F^{m_j})$. Пусть $f_1(a) = (A_1, A_2)$. Тогда $A_1 = A + XZ_2, A + 2 = (\widetilde{\xi_s} - E_{m_s})Z_2$. Предположим, что $f_1(a) \in R^n$. Тогда $A_2 = 0$. Из леммы 2 вытекает, что последняя компонента вектора Z_2 равна $vp^{-1}, v \in R$. Тогда

$$A_1 = A + \frac{v}{p}X = A + \frac{u}{\xi_1 - 1} \quad (u \in R).$$

Известно, что $pR = (\xi_1 - 1)^{p-1}R$. Пусть $p > 2$. Тогда из выражения для первой компоненты вектора A_1 вытекает противоречивое условие $\frac{1}{(\xi_1-1)^{p-2}} \in R[\xi_1]$. Противоречие получается в предположении, что коцикл f может быть кограницей. Следовательно, кристаллографическая группа $K(G, f)$ неразложима и нерасщепляема. Теорема доказана.

Контрпримеры. 1) Пусть C_p – циклическая группа порядка p и $R = \mathbb{Z}_p$ – кольцо целых p-адических чисел. С точностью до эквивалентности существуют только три неразложимых R-представления этой группы. Если Γ – одно из них, то R-кристаллографическая группа $K(G, f)$ $(G = \Gamma(C),\ f$ – коцикл группы $G)$ является расщепляемой группой.

2) Пусть $\mathbb{Z}_2$ – кольцо целых рациональных 2-адических чисел и $C_{4,2}$ – абелева группа типа (4,2). Матрицы

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

порождают неразложимую подгруппу G группы $GL(4, I_2)$ и $G \cong C_{4,2}$. Пусть

$$f(a) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), f(b) = 0.$$

Тогда $f : G \to \widehat{F}^4$ – коцикл группы G, который не является кограницей. Следовательно $\mathbb{Z}_2$-кристаллографическая группа $K(G, f)$ неразложима и нерасщепляема. Несложно показать, что в размерности $n \leq 3$ не существует неразложимых нерасщепляемых $\mathbb{Z}_2$-кристаллографических групп с точечной группой, изоморфной группе $C_{4,2}$. Следовательно,

$$n_0(I_2, C_{4,2}) = 4.$$

Теорема 7. *Пусть кольцо R является кольцом целых величин конечного расширения S поля p-адических чисел Q_p. Число $n_1(R, G) = \infty$ для следующих p-групп G:*

1) *G – циклическая p-група, обладающая по крайней мере четырьмя неприводимыми R-представлениями, неэквивалетными над полем S и одно из этих представлений является точным;*

2) *G – циклическая p-група обладающая неэквивалентными над полем S тремя неприводимыми R-представлениями, одно из которых является точным и элемент $\varepsilon - 1$ не является простым в кольце $R[\varepsilon]$, где ε – первообразный корень степени p из единицы;*

3) *G – абелева группа типа (p, p).*

Доказательство основано на результатах П. М. Гудивка о неразложимых R-представлениях p-групп [12]. Эти результаты мы последовательно изложим в виде лемм.

1) Пусть группа $C = C_{p^s}$ удовлетворяет первому условию теоремы. Тогда эта группа будет обладать следующими неприводимыми R-представлениями:

$$\begin{aligned} &a \to 1; \\ &a \to \widetilde{\varepsilon}, \quad \varepsilon^p = 1; \\ &a \to \widetilde{\xi}, \quad \xi^{p^r} = 1; \\ &a \to \widetilde{\eta}, \quad \eta^{p^s} = 1, \end{aligned}$$

где ε, ξ, η – первообразные корни из единиц.

Лемма 4 ([12]). *Соответствие*

$$\Gamma_{A_r} : a \to \begin{pmatrix} 1 \otimes E_r & 0 & \langle 1 \rangle \otimes E_r & \langle 1 \rangle \otimes A_r \\ 0 & \widetilde{\varepsilon} \otimes E_r & \langle 1 \rangle \otimes E_r & \langle 1 \rangle \otimes E_r \\ 0 & 0 & \widetilde{\xi} \otimes E_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{\eta} \otimes E_r \end{pmatrix}$$

определяет неразложимое степени $n > 4r$ представление группы C над кольцом R (E_r – единичная матрица порядка r, A_r – жорданов ящик порядка r с единицами по диагонали, $\otimes$ – кронекерово произведение матриц).

Пусть $G = \Gamma_{A_r}(C)$. Тогда G неразложимая подгруппа группы $GL(n, R)$, $n \geq 4r$. Пусть $f : G \to \widetilde{F}^n$ – такая функция, что $f(a) = (p^{-s}, 0, \ldots, 0)$. Нетрудно видеть, что

$$(e + a + \cdots + a^{p^a - 1})f(a) = (1, 0, \ldots, 0) = 0$$

в группе $\widetilde{F}^n$. Это значит, что f – 1-коцикл группы G и $K = K(G, f)$ – неразложимая R-кристаллографическая группа размерности n. Для нерасщепляемости группы K достаточно доказать, что f не является кограницей. Пусть это не так. Тогда существует такой вектор $Z \in \widetilde{F}^n$, что

$$f'(a) = \Gamma_{A_r}(a - e)Z \in R^n.$$

Разобьем компоненты вектора Z на части: $Z = (Z_0, Z_1, Z_2, Z_3)$, где $Z_j = (z_{1j}, \ldots)$ – r-мерный вектор, все компоненты $z_{t\,j}$ которого принадлежат группе F^{m_j}, где m_j – степени различных неприводимых составляющих представления Γ. Тогда

$$\begin{aligned}(\widetilde{\xi} - E_{n_2})z_{1\,2} &= 0,\\ (\widetilde{\eta} - E_{n_s})z_{1\,2s} &= 0.\end{aligned}$$

Пусть α – первая компонента вектора $f'(a)$. Тогда $\alpha \in R$. Учитывая вид представления Γ, лемму 2 и замечание к ней, получим

$$\alpha = p^{-s} + \frac{y_1}{\beta_2} + \frac{y_2}{\beta_s},$$

где y_1, y_2 – некоторые элементы кольца R. Если $s > 1$, то, учитывая лемму 2 и замечание к ней, получим $1 \equiv 0(mod p)$, что невозможно. Если $s = 1$, то

$$p > 2, \quad p = \theta(\varepsilon) - 1)^{p-1}, \beta_j = \theta_j(\varepsilon - 1),$$

где θ, θ_j – обратимые элементы в кольце R. Тогда из выражения для α вытекает, что $1 \equiv 0(mod(\varepsilon - 1))$, что также невозможно. Противоречие получено в предположении, что $f'(a) \in R^n$, которое необходимо для того, чтобы коцикл f был кограницей. Следовательно, f не является кограницей и группа K нерасщепляема. Первый случай теоремы разобран. Рассмотрим следующий случай.

2). Пусть $C = C_{p^s} = \langle a \rangle$ – циклическая p-группа порядка p^s, обладающая 3-мя неприводимыми S-представлениями и элемент $\varepsilon - 1$ – непрост в кольце $R[\varepsilon]$. Если $s > 2$ или $s = 2$, но один из полиномов $\Phi_p(x), \Phi_{p^2}(x)$ приводим над полем S, или $s = 1$, но $p > 3$, то эти случаи охватываются первым случаем теоремы. Оставшееся можно разбить на три подслучая:

2_1). Либо $C = \langle a \rangle$ – циклическая группа порядка p^2, $p > 2$, $\varepsilon - 1$ – непростой элемент в кольце $R[\varepsilon]$, ε не содержится в кольце R и полиномы $\Phi_p(x), \Phi_{p^2}(x)$ неприводимы над S, либо $C = \langle a \rangle$ – циклическая группа порядка p и полином $\Phi_p(x) = \psi_{11}(x)\psi_{12}(x)$ является произведением двух неприводимых над S многочленов.

2_2). $p = 2$, C – циклическая группа порядка 4 и 2 не является простым элементом кольца R.

2_3). $p = 3$ и C – циклическая группа порядка 3, $\varepsilon \in R$ и $\varepsilon - 1$ – непростой элемент в кольце R.

В случае 2_1) группа $C = \langle a\rangle(a^{p^s} = 1)$ имеет следующие неприводимые R-представления:

$$\Delta_0 : a \to 1;$$
$$\Delta_1 : a \to \widetilde{\varepsilon}, \quad \varepsilon^p = 1;$$
$$\Delta_2 : a \to \widetilde{\xi}, \quad \xi^{p^2} = 1,$$

если $s = 2$ или ε, ξ – корни многочленов $\psi_{1j}(x)$. Отметим, что в рассматриваемом случае полиномы $\Phi_p(x), \Phi_{p^2}(x)$ неприводимы над S. Кроме того $\beta_1 = \beta_2 = p$ $(s = 2)$.

Лемма 5 ([12]). *Пусть t – простой элемент кольца R и*

$$\Gamma_1(a) = \begin{pmatrix} E_r & \langle t\rangle \otimes E_r & \langle 1\rangle \otimes A_r \\ 0 & \widehat{\varepsilon} \otimes E_r & \langle \varepsilon - 1\rangle \otimes E_r \\ 0 & 0 & \widetilde{\xi} \otimes E_r \end{pmatrix}.$$

Тогда $a \to \Gamma_1(a)$ является неразложимым R-представлением циклической группы $C = \langle a\rangle$ порядка p^2.

Пусть $G = \Gamma_1(C)$. Тогда G – неразложимая подгруппа порядка p^2 в группе $GL(4n, R)\, n \geq 4r$. Пусть $f : G \to \widehat{F}^n$,

$$f(a) = (p^{-2}, 0 \ldots, 0).$$

Легко видеть, что f – коцикл и $K = K(G, f)$ – неразложимая R-кристоллографическая группа размерности $n \geq 4r$. Пусть Z – n-мерный вектор над F и

$$f_1(a) = f(a) + (a - e)Z.$$

Представим Z в виде $Z = (X_0, X_1, X_2)$, где $X_0 \in F^r, X_1 \in (F^{p-1})^r, X_2 \in (F^{p(p-1)})^r$. Для того чтобы $f_1(a) = 0$ необходимо, чтобы

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\varepsilon} - E_{n_1} & \langle \varepsilon - 1\rangle \\ 0 & \widetilde{\xi} - E_{n_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = 0$$

над группой $\widehat{F}$ (здесь n_j – степени неприводимых над S полиномов, корнями которых являются ε и ξ, Y_1, Y_2 – любые компоненты r-мерных векторов X_1, X_2). Нетрудно убедиться, что каждая компонента вектора $Y_1 \in F^{p-1}$ имеет вид $\frac{u}{p^2}$ и каждая компонента вектора $Y_2 \in F^{p(p-1)}$ имеет вид $\frac{v}{p}$, где u, $v \in R$. Тогда первая компонента α вектора $f_1(a)$ будет иметь вид

$$\alpha = \frac{1}{p^2} + t\left(\frac{u}{p^2}\right) + \frac{v}{p}.$$

Так как t – необратимый элемент кольца R, то α не принадлежит кольцу R. Это значит, что коцикл f не является кограницей, т. е. кристаллографическая группа $J(G, f)$ не расщепляема. Случай $(2)_1$, $s = 2$ разобран. Для $s = 1$ будут следующие изменения:

$$f(a) = (p^{-1}, 0, \ldots, 0); \quad \alpha = \frac{1}{p} + \frac{tu}{\beta_1\beta_2} + \frac{v}{\beta_2},$$

где $\beta_j = \psi_{1j}(1)$. Легко видеть, что $\beta_1\beta_2 = p$ и элементы p, β_1, β_2 делятся на t. Если $\alpha \in R$, то $1 \equiv 0(mod t)$, что также невозможно. Таким образом, предположение, что коцикл f является кограницей ведет к противоречию, следовательно группа $K(G, f)$ нерасщепляема.

Рассмотрим случай 2_2) циклической группы $C = \langle a \rangle$ порядка 4. Эта группа имеет следующие неприводимые R-представления:

$$\begin{aligned} &\Delta_0 : a \to 1; \\ &\Delta_1 : a \to -1; \\ &\Delta_2 : a \to \widetilde{i}, \end{aligned}$$

где

$$\widetilde{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Лемма 6 ([12])**.** *Пусть t – простой элемент в кольце R и*

$$\Gamma_2(a) = \begin{pmatrix} E_r & \langle t \rangle \otimes E_r & \langle 1 \rangle \otimes A_r \\ 0 & (-1) \otimes E_r & \langle t \rangle \otimes E_r \\ 0 & 0 & \widetilde{i} \otimes E_r \end{pmatrix}.$$

Тогда $G = \langle \Gamma_2(a) \rangle$ является неразложимой циклической порядка 4 подгруппой линейной группы $GL(n, R)$ степени $n > 4r$.

Пусть $f(a) = \left(\frac{1}{4}, 0, \ldots, 0\right)$. Этот вектор определяет 1-коцикл группы G со значениями в группе $\widehat{F}^n$. Пусть Z – вектор из этой группы и $f_1(a) = f(a) + (a - e)Z$ и α – первая компонента вектора $f_1(a)$. Если этот вектор принадлежит группе R^n, то

$$\alpha = \frac{1}{4} + ty + x_2,$$

где для компонентов y, x_2 вектора Z должно выполняться условие

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & t \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^3.$$

Отсюда легко следует, что $1 \equiv 0(mod 2R)$, что невозможно. Следовательно, α не принадлежит R при любом векторе $Z \in F^n$ таком, чтобы $f_1(a) \in R^n$, т. е. предположение, что f является кограницей приводит к противоречию. Тем самым показано, что кристаллографическая группа $K(G, f)$ является неразложимой и нерасщепляемой. Случай 2_2) разобран.

Наконец рассмотрим случай 2_3) циклической группы $C = \langle a \rangle$ порядка 3. Неприводимые R-представления имеют вид:

$$\begin{aligned} &\Delta_0 : a \to 1; \\ &\Delta_1 : a \to \varepsilon \quad (\varepsilon^3 = 1); \\ &\Delta_0 : a \to \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Лемма 7 ([12]). *Пусть t – простой элемент в R и*

$$\Gamma_3(a) = \begin{pmatrix} E_r & tE_r & A_r \\ 0 & \varepsilon E_r & tE_r \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 E_r \end{pmatrix}.$$

Тогда Γ_3 – неразложимое степени $n \geq 4r$ R-представление группы C.

Пусть $G = \Gamma_3(C)$, $f(a) = \left(\frac{1}{3}, 0, \ldots, 0\right)$. Тогда f – коцикл группы G. Пусть

$$f_1(a) = f(a + (a - e)Z) = (\alpha, 0 \ldots, 0),$$

где

$$\alpha = \frac{1}{3} + tx + y$$

и, если $f_1(a) \in R^n$, то

$$\begin{pmatrix} \varepsilon - 1 & t \\ 0 & (\varepsilon^2 - 1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2.$$

Из этих условий вытекает противоречивое соотношение

$$1 \equiv 0 mod((\varepsilon - 1)R),$$

т.е. коцикл f не является кограницей. Это значит, что кристоллографическая группа $K(G, f)$ – нераложима и нерасщепляема.

Рассмотрим случай 3) абелевой p-группы $C_{p,p} = \langle a, b \rangle$ типа (p, p). Пусть ε – первообразный корень степени p из единицы, s – степень неприводимого над полем S полинома, корнем которого является ε и $\widetilde{\varepsilon}$ – матрица оператора умножения на ε в R-базисе $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{s-1}$ кольца $R[\varepsilon]$. Будем использовать ранее введенные обозначения, например $\langle \delta \rangle$.

Лемма 8 ([12]). *При любом натуральном r следующее R-представление группы $C_{p,p}$ является неразложимым:*

$$\Gamma_r(a) = \begin{pmatrix} E_r & 0 & \langle 1 \rangle \otimes A_r & 0 \\ 0 & \widetilde{\varepsilon} \otimes E_r & 0 & E_s \otimes E_r \\ 0 & 0 & \widetilde{\varepsilon} \otimes E_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_s \otimes E_r \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_r(b) = \begin{pmatrix} E_r & 0 & 0 & \langle 1 \rangle \otimes E_r \\ 0 & E_s \otimes E_r & E_s \otimes E_r & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{\varepsilon} \otimes E_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{\varepsilon} \otimes E_r \end{pmatrix}.$$

Пусть n – степень представления Γ и $G = \Gamma(C_{p,p})$. Тогда G – неразложимая подгруппа группы $GL(n, R)$ и $n \geq 4r$, где r может быть любым натуральным числом. Пусть

$$f(a) = \left(\frac{1}{p}, 0 \ldots, 0\right), f(b) = 0.$$

Эти значения определяют 1-коцикл группы G со значениями в группе $\widehat{F}^n$. Пусть

$$f_1(g) = f(g) + (g - e)Z,$$

где Z некоторый вектор из группы F^n. Пусть $Z = (Z_0, Z_1, Z_2, Z_3)$, где $Z_0 \in F^r$, $Z_j \in F^{sr}$. Если f является кограницей, то $f_1(b) \in R^n$ и тогда $Z_2 \in R^{sr}$. Отсюда вытекает, что первые компоненты векторов $f_1(a)$ и $f(a)$ совпадают с $\frac{1}{p}$, т. е. $f_1(a)$ не содержится в группе R^n, следовательно, предположение о том, что f является кограницей ведет к противоречию. Мы показали, что кристаллографическая группа $K(G, f)$ является неразложимой и нерасшепляемой. Случай 3) разобран.

Таким образом, показано, что для любой p-группы C, указанной в теореме существует ей изоморфная неразложимая подгруппа $G \subset GL(n, R)$, где $n \geq 4r$ и неразложимая нерасщепляемая кристаллографическая группа K(G,f) размерности n. Поскольку r произвольное натуральное число, то $n_0(R, C) = \infty$. Теорема доказана.

Приведем некоторые следствия этой теоремы и теории описания неразложимых R-представлений конечных групп [12, 13].

Пусть C_{p^s} – циклическая p-группа порядка p^s, R – кольцо целых величин конечного расширения S поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$.

Следствие 5. *Если $s > 2$, то $n_1(R, C_{p^s}) = \infty$.*

Следствие 6. *Если поле S – неразветвленное расширение поля $\mathbb{Q}_p$, то*

$$n_1(R, C_{p^2}) = \begin{cases} p^2 + 1, & p > 2; \\ 4, & p = 2. \end{cases}$$

Следствие 7. *Пусть $S = \mathbb{Q}_p(\sqrt{p})$ – квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}_p$. Тогда $n_1(R, C_p) = p + 1$,*

$$n_0(R, C_p) = \begin{cases} \frac{p+1}{2}, & p \equiv 1(mod 4), \\ p, & p \equiv -1(mod 4). \end{cases}$$

Дадим классификацию 2-мерных 2-адических кристаллографических групп.

Теорема 8 ([15])**.** *С точностью до сопряженности группа $GL(2, Z_2)$ содержит 13 конечных подгрупп:*

Циклические группы C_n порядка n:

$$1)\ C_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle;\ 2)\ C_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle;\ 3)\ C_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle;$$

$$4)\ C_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle;\ 5)\ C_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle;\ 6)\ C_6 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Абелевы нециклические группы $C_2 \times C_2$:

$$7)\ \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle;$$

$$8)\ \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Неабелевы группы

$$9)\ S_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle ;$$

$$10)\ S_3 \times C_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle ;$$

$$11)\ D_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle ;$$

$$12)\ C_3 \leftthreetimes C_4 = \left\langle a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \theta & \tau \\ \theta + \tau & -\theta \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$(a^3 = -b^2 = E, b^{-1}ab = a^{-1}),$$

где (θ, τ) *– некоторое решение уравнения* $x^2 + xy + y^2$ *над кольцом* $\mathbb{Z}_2$*, например* $\left(1, \frac{-1-\sqrt{-7}}{2}\right)$.

Теорема 9. *С точностью до изоморфизма существует* 17 *двумерных* $\mathbb{Z}_2$*-кристаллографических групп. Это* 13 *расщепляемых групп* $K(G_j, 0)$ $(j = 1, \ldots, 13)$ *с нулевыми коциклами точечных групп и* 4 *следующие нерасщепляемые группы:*

$$K(G_2, f)\ \left(f(a) = \left(0, \frac{1}{2}\right)\right);$$

$$K(G_7, f_j)\ \left(j = 1, 2; f_1(a) = f_2(a) = 0, f_1(b) = \left(0, \frac{1}{2}\right), f_2(b) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right);$$

$$K(G_{11}, f)\ \left(f(a) = 0, f(b) = \left(0, \frac{1}{2}\right)\right).$$

Доказательство легко получить из теоремы 8 вычислением 1-коциклов и предыдущих результатов работы.

1. *Федоров Е. С.* Симметрия и структура кристаллов. – М.: Из-во АН СССР, 1949.
2. *Schonflies A.* Kristallsysteme und Kristallstruktur. – Leipzig, 1891.
3. *Bieberbach L.* Die Bewegungsgruppen der euklidischen Raume. Vath. Annal. 70. – S. 297–336.
4. *Zassenhaus H.* Neuer Beweis der Endlichkeit der Klassenzahl bei unimodularer Aquivalenz endich ganzzahliger Substitutionsgruppen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1938. – **12**. – S. 276–288.
5. *Zassenhaus H.* Uber einen Algorithmus zur Bestimmung der Raumgruppen // Comment. Math. Helv., 1948. – **21**. – S. 117–141.
6. *Гудивок П. М., Рудько В. П., Бовді В. А.* Кристалографічні групи. – Ужгород, 2006. – С. 3–173.
7. *Brown H., Bulow R., Neubuser J., Wondratschek H., Zassenhaus H.* Crystallgraphic groups of four-dimensional space // Wiley Sons. – New York, 1978.
8. *Копча Г. Е., Рудько В. П.* Про кристалографічні групи без кручення з нерозкладною точковою циклічною p-групою // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем., 1998. – Вип. 3. – С. 117–123.

9. *Bovdi V. A., Gudivok P. M., Rudko V. P.* Torsionfree groups with indemposable holonomy group. I // Journal of Group Theory. – 2002. – 5. P. 75–96.
10. *Bovdi V. A., Gudivok P. M., Rudko V. P.* Torsionfree groups with indemposable holonomy group. II // Journal of Group Theory. – 2002. – 5. P. 555–569.
11. *Гудивок П. М., Шапочка И. В.* О дикости задачи описания некоторых классов групп // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1998. – Вип. 3. – С. 69–77.
12. *Гудивок П. М.* Представления конечных групп над числовыми кольцами // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1967. – **31**, № 4. – С. 779–834.
13. *Гудивок П. М.* О представлениях конечных групп над полным дисктретно нормированным кольцом // Труды Матем. ин-та АН СССР. – 1978. – **148**. – С. 96–105.
14. *Bovdi V. A., Rudko V. P.* Extensions of the represtntastion modules of a prime order group // Journal of Algebra – 2006. – **295**. – P. 441–451.
15. *Кирилюк А. А.* Конечные подгруппы группы $GL(3,\mathbb{Z})$ // Теорет и прикл. проблемы диф. ур-ий и алгебра. – Киев, 1978. – С. 114–119.

Получено 18.10.2010