УДК 517.946+511.37

В.С. Ільків (Національний університет "Львівська політехніка",
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України)

Розв'язність нелокальної задачі для системи рівнянь з частинними похідними зі зсувами аргументів

The existence and uniqueness conditions of solution for the problem of one parameter nonlocal twopoits conditions by time variable t for typeless system of differential equations, which contains the value of original solution in the points shifted to the constant value ξ_j for the spatial variable $x = (x_1, \ldots, x_p)$ are established. The solution sought in the class of Sobolev spaces 2π-periodic for variable x vector functions. Solvability of the problem for almost all (except for sets of arbitrarily small measure) values of parameter μ in nonlocal conditions are proved. Established lower bounds of small denominators that arise in studying the smoothness of the solution.

Встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі з двоточковими нелокальними умовами за часовою змінною t з одним параметром для безтипної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними, яка містить значення шуканого розв'язку у точках, зсунутих на сталі величини ξ_j за просторовою змінною $x = (x_1, \ldots, x_p)$. Розв'язок шукається у класі просторів Соболєва 2π-періодичних за змінною x вектор-функцій. Доведено розв'язність задачі для майже всіх (за винятком множини, як завгодно малої міри) значень параметра μ у нелокальних умовах. Встановлено оцінки знизу малих знаменників, що виникають при дослідженні гладкості розв'язку.

1. Постановка задачі. В області $\mathcal{D}^p = [0, T] \times \Omega^p_{2\pi}$, що є декартовим добутком відрізка $[0, T]$ часової змінної t та p-вимірного тора $\Omega^p_{2\pi}$ просторових змінних $x = (x_1, \ldots, x_p)$, розглядається задача з нелокальною умовою для анізотропної системи m рівнянь з частинними похідними зі зсувами аргумента x:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_1(D)u_{\xi_1} + \cdots + A_Q(D)u_{\xi_Q} + f, \qquad \xi_j \in \Omega^p_{2\pi}, \quad j = 1, \ldots, Q, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} - \mu u|_{t=T} = \varphi, \tag{2}$$

де $T > 0$, $A_j(D) = A\Big(-i\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, -i\dfrac{\partial}{\partial x_p}\Big)$ — диференціальні вирази зі сталими матричними коефіцієнтами, число μ належить множині $\mathcal{O}_M$ — кругу радіуса M з центром у початку координат комплексної площини $\mathbb{C}$, f та φ — відомі функції, u — шуканий розв'язок, u_ξ — функція u зі зсувом ξ.

Рівняння в (1) при всіх $t \in [0, T]$ і умови в (2) розуміємо, як рівності функцій у просторі узагальнених періодичних функцій $\mathcal{T}'$, де $\mathcal{T}$ — простір тригонометричних 2π-періодичних многочленів від p змінних $x_1, \ldots, x_p$.

Якщо вектор-функція φ належить простору $(\mathcal{T}')^m$, то вірні формули [1]

$$\varphi = \varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \varphi_k e^{i(k,x)}, \quad \langle\varphi, \psi\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \psi_k^H \varphi_k, \quad \langle\psi, \psi\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \psi_k^H \psi_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \|\psi_k\|^2,$$

де φ_k — вектор-стовпець із простору $\mathbb{C}^m$, $\langle\varphi, \psi\rangle$ — дія узагальненої вектор-функції φ на вектор-функцію $\psi = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \varphi_k e^{i(k,x)} \in \mathcal{T}^m$, ψ_k^H — ермітово спряжений з вектором ψ_k вектор, $\|\cdot\|$ — евклідова норма в $\mathbb{C}^m$.

Розв'язок u задачі (1), (2) — 2π-періодична вектор-функція $u(t,x)$ змінних $x_1,\dots,x_p$ — має вигляд $u=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}u_k(t)e^{i(k,x)}$, а функція u_ξ зі зсувом $\xi\in\Omega^p_{2\pi}$ визначається функцією u за формулою

$$\langle u_\xi,\psi\rangle=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}e^{i(k,\xi)}\psi_k^H u_k(t)\equiv\langle u_\xi,\psi(\cdot-\xi)\rangle,$$

де (k,ξ) — скалярний добуток у просторі $\mathbb{R}^p$ векторів k та ξ.

Якщо u — гладка (за змінною x) функція, то $u_\xi(t,x)=u_\xi(t,x+\xi)$. Очевидно, що $u=u_\xi$, якщо $\xi=0$.

Оператор $F(D)$ на просторі $(\mathcal{T}')^m$ визначаємо дією $F(D)\varphi=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}F(k)\varphi_k e^{i(k,x)}$, зокрема $\widetilde{D}\varphi=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}\,\varphi_k e^{i(k,x)}$, де $F(k)$ — квадратна матриця, $\varphi=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\varphi_k e^{i(k,x)}$, $\widetilde{k}\ =(1+k_1^2+\ldots+k_p^2)^{1/2}$.

2. Простори функцій. Означення розв'язку. Простір $\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})$ визначається рівністю

$$\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})=\Big\{\varphi\in(\mathcal{T}')^m\colon\|\varphi;\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})\|^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{\,2q}\|\varphi_k\|^2<\infty\Big\},$$

де $q\in\mathbb{R}$. Це соболєвський простір 2π-періодичних вектор-функцій залежних від змінної x. При $q=0$ отримуємо простір $\big(\mathbf{L}_2(\Omega^p_{2\pi})\big)^m$. Множина $\big\{\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})\big\}_{q\in\mathbb{R}}$ просторів $\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})$ утворює шкалу гільбертових просторів.

Простір $\mathbf{H}^N_{\bar d,q}(\mathcal{D}^p)$, де $\bar d=(d_1,\dots,d_m)\in\mathbb{R}^m$, $q\in\mathbb{R}$, $N\in\mathbb{R}$, складається з вектор-функцій $u=u(t,x)=\mathrm{col}(u_1,\dots,u_m)$, які задовольняють умови:

$$\mathrm{col}\,\big(\widetilde{D}^{d_1}u_1,\dots,\widetilde{D}^{d_m}u_m\big)\in\mathbf{C}\big([0,T];\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})\big),$$

$$\mathrm{col}\left(\widetilde{D}^{d_1}\frac{\partial u_1}{\partial t},\dots,\widetilde{D}^{d_m}\frac{\partial u_m}{\partial t}\right)\in\mathbf{C}\big([0,T];\mathbf{H}_{q-N}(\Omega^p_{2\pi})\big).$$

Простір $\mathbf{H}^N_{\bar d,q}(\mathcal{D}^p)$ — банахів з нормою

$$\|u;\mathbf{H}^N_{\bar d,q}(\mathcal{D}^p)\|^2=\sum_{j=0}^{1}\left\|\,\mathrm{col}\left(\widetilde{D}^{d_1}\frac{\partial^j u_1}{\partial t^j},\dots,\widetilde{D}^{d_m}\frac{\partial^j u_m}{\partial t^j}\right);\mathbf{C}\big([0,T];\mathbf{H}_{q-jN}(\Omega^p_{2\pi})\big)\right\|^2.$$

Простір $\mathbf{H}_{\bar d,q}(\Omega^p_{2\pi})$ складається з вектор-функцій $\varphi=\varphi(x)=\mathrm{col}(\varphi_1,\dots,\varphi_m)$, які задовольняють умову включення $\mathrm{col}\,\big(\widetilde{D}^{d_1}\varphi_1,\dots,\widetilde{D}^{d_m}\varphi_m\big)\in\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})$.

Означення 1. *Розв'язком задачі* (1), (2) *у просторі* $\mathbf{H}^N_{\bar d,q}(\mathcal{D}^p)$ *називаємо вектор-функцію* $u\in\mathbf{H}^N_{\bar d,q}(\mathcal{D}^p)$, *яка задовольняє систему рівнянь* (1) *для всіх* $t\in[0,T]$ *та умову* (2).

Означення 2. *Задача* (1), (2) *розв'язна у просторі* $\mathbf{H}^N_{\bar d,q}(\mathcal{D}^p)$ *з ймовірністю на множині* $\mathcal{O}_M$ *не меншою, ніж* ε, *якщо вона має єдиний розв'язок у просторі* $\mathbf{H}^N_{\bar d,q}(\mathcal{D}^p)$ *для кожного* $\mu\in W$, *де* W *— деяка вимірна підмножина множини* $\mathcal{O}_M$, *міра якої* $\mathrm{meas}\,W$ *не менша, ніж* $\varepsilon\cdot\mathrm{meas}\,\mathcal{O}_M$.

3. Побудова розв'язку. Замість вектор-функцій

$$u=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}u_k(t)e^{i(k,x)},\quad f=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}f_k(t)e^{i(k,x)},\quad \varphi=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\varphi_k e^{i(k,x)}$$

введемо вектор-функції

$$U=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}U_k(t)e^{i(k,x)},\quad F=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}F_k(t)e^{i(k,x)},\quad \Phi=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\Phi_k e^{i(k,x)}$$

за формулами

$$U_k(t)=Z_k u_k(t),\quad F_k(t)=Z_k f_k(t),\quad \Phi_k=Z_k\varphi_k,$$

де $Z_k=\operatorname{diag}\left(\widetilde{k}^{\,d_1},\dots,\widetilde{k}^{\,d_m}\right)$, тоді розв'язування задачі (1), (2) полягає у розв'язанні для кожного вектора $k\in\mathbb{Z}^p$ нелокальної двоточкової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, а саме

$$U_k'=\widetilde{k}^{\,N}A(k)U_k+F_k, \tag{3}$$

$$U_k(0)-\mu U_k(T)=\Phi_k. \tag{4}$$

Матриця $A(k)=\left(a_{\alpha\beta}(k)\right)_{\alpha,\beta=1}^{m}$ формується з матриць $A_1(k),\dots,A_Q(k)$ і залежить від чисел $\xi_1,\dots,\xi_Q$. Вона визначається рівністю [2]

$$A(k)=\widetilde{k}^{\,-N}Z_k\Big(e^{i(k,\xi_1)}A_1(k)+\dots,e^{i(k,\xi_Q)}A_Q(k)\Big)Z_k^{-1}.$$

Дійсні числа $d_1,\dots,d_m$ та N вибираємо з умови $\max\limits_{1\le\alpha,\beta\le m}\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\left|a_{\alpha\beta}(k)\right|<\infty$. Вони використовуються для простору $\mathbf{H}^N_{\vec{d},q}(\mathcal{D}^p)$, як незмінні параметри, що пов'язані з системою (1), натомість q — довільне фіксоване дійсне число.

Отже, матричний оператор $A(D)$ є обмеженим (псевдодиференціальним) оператором.

Взявши $U_k(t)$ у вигляді $U_k(t)=e^{\widetilde{k}^{\,N}A(k)(t-T)}C_k(t)$ маємо задачу

$$C_k'(t)=e^{\widetilde{k}^{\,N}A(k)(T-t)}F_k(t),$$
$$e^{-\widetilde{k}^{\,N}A(k)T}C_k(0)-\mu C_k(T)=\Phi_k,$$

яка має єдиний розв'язок

$$C_k(t)=\left(e^{-\widetilde{k}^{\,N}A(k)T}-\mu E\right)^{-1}\Big(\Phi_k+\mu\int_0^T e^{\widetilde{k}^{\,N}A(k)(T-\tau)}F_k(\tau)\,d\tau+$$
$$+\int_0^t e^{\widetilde{k}^{\,N}A(k)(T-\tau)}F_k(\tau)\,d\tau\Big)$$

тоді і тільки тоді, коли $\mu\notin\left\{\mu\in\mathbb{C}\colon\ \det\left(e^{-\widetilde{k}^{\,N}A(k)T}-\mu E\right)=0\right\}$, тобто коли μ не є власним значенням оператора $e^{-\widetilde{k}^{\,N}A(D)T}$, де E — одинична матриця.

Позначимо $\rho_0(\lambda,t)=e^{-\widetilde{k}^{\,N}\lambda t}\big(e^{-\widetilde{k}^{\,N}\lambda T}-\mu E\big)^{-1}$, де $\lambda\in\mathbb{C}$, $t\in\mathbb{R}$, тоді розв'язок задачі (3), (4) визначається формулою

$$U_k(t)=\rho_0\big(A(k),T-t\big)\Phi_k+\int_0^t\rho_0\big(A(k),T-t+\tau\big)F_k(\tau)\,d\tau+\\ +\mu\int_t^T\rho_0\big(A(k),\tau-t\big)F_k(\tau)\,d\tau. \quad (5)$$

Матриця $\rho_0\big(A(k),t\big)$, що породжується функцією $\rho_0(\lambda,t)$, подається різними способами:

$$\rho_0\big(A(k),t\big)=e^{-\widetilde{k}^{\,N}A(k)t}\big(e^{-\widetilde{k}^{\,N}A(k)T}-\mu E\big)^{-1}=\\ =e^{\widetilde{k}^{\,N}A(k)(T-t)}\big(E-\mu e^{\widetilde{k}^{\,N}A(k)T}\big)^{-1}=\big(e^{\widetilde{k}^{\,N}A(k)(t-T)}-\mu e^{\widetilde{k}^{\,N}A(k)t}\big)^{-1}.$$

Нехай $\lambda_j(k)$ позначає власне значення матриці $A(k)$ з кратністю $\alpha_j(k)$, де $j=1,\ldots,\gamma(k)$, $\alpha_1(k)+\ldots+\alpha_{\gamma(k)}(k)=m$, характеристичний многочлен $l(\lambda,k)$ цієї матриці має вигляд

$$l(\lambda,k)=\det\big(\lambda E-A(k)\big)=\prod_{j=1}^{\gamma(k)}\big(\lambda-\lambda_j(k)\big)^{\alpha_j(k)}=\\ =\lambda^m+l_1(k)\lambda^{m-1}+\cdots+l_{m-1}(k)\lambda+l_m(k).$$

Оскільки множина матриць $\big\{A(k)\big\}$ — обмежена, то обмеженими є числа $\lambda_j(k)$, а також числа $\widetilde{k}^{\,N-n}\lambda_j(k)$, де $n\le N$ — зведений порядок системи рівнянь з частинними похідними (1), тобто $n=\max\limits_{j=1,\ldots,m}(n_j/j)$, а n_j вибираються як найменші числа, для яких є обмеженою величина $\max\limits_{j=1,\ldots,m}\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\big(|l_j(k)|/\widetilde{k}^{\,n_j}\big)$.

Умова $\big|e^{-\widetilde{k}^{\,N}\lambda_j(k)T}-\mu\big|>0$ для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$ є необхідною і достатньою умовою розв'язності задачі (1), (2) у просторах функцій зі значеннями у просторі $(\mathcal{T}')^m$ узагальнених 2π-періодичних функцій. Ця умова не є достатньою для існування розв'язку зі значенням у соболєвських просторах $\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})$ оскільки, взагалі, $\min\limits_{j=1,\ldots,m}\inf\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\big|e^{-\widetilde{k}^{\,N}\lambda_j(k)T}-\mu\big|=0$; необхідною, як доведено у [2,3], є умова

$$\min_{j=1,\ldots,m}\inf_{k\in\mathbb{Z}^p}\big(\widetilde{k}^{\,L}\big|e^{-\widetilde{k}^{\,N}\lambda_j(k)T}-\mu\big|\big)>0,$$

де L — деяке дійсне число.

Доведемо, що після вилучення з множини $\mathcal{O}_M$ точок $e^{-\widetilde{k}^{\,N}\lambda_j(k)T}$ спектра оператора $e^{-\widetilde{k}^{\,N}A(D)T}$ з деякими їх околами, задача (1), (2) однозначно розв'язна з ймовірністю близькою до одиниці у шкалі соболєвських просторів.

Подамо формулу (5) у зручнішому вигляді, використовуючи для зображення функцій від матриці розділені різниці [4].

4. Розділені різниці та функції від матриці. Позначимо через $R_\Lambda(f(\lambda))$ розділену різницю для комплекснозначної функції $f(\lambda)$ і набору

$$\Lambda=(\underbrace{\lambda_1,\ldots,\lambda_1}_{\alpha_1},\ldots,\underbrace{\lambda_\gamma,\ldots,\lambda_\gamma}_{\alpha_\gamma})$$

комплексних чисел, де $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_\gamma = s$, причому число $s-1$ називається порядком розділеної різниці.

Відомо [2, 4], що $R_\Lambda(f(\lambda)) = \sum\limits_{j=1}^{s} \dfrac{f(\lambda_j)}{\prod\limits_{i=1, i\neq j}^{s}(\lambda_j - \lambda_i)}$ при $\gamma = 1$, а при $\gamma = s$ $R_\Lambda(f(\lambda)) = \dfrac{f^{(s-1)}(\lambda_1)}{(s-1)!}$; у загальному випадку для аналітичної у точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_\gamma$ функції $f(\lambda)$ справджується формула

$$R_\Lambda(f(\lambda)) = \sum_{j=1}^{\gamma} \frac{1}{(\alpha_j - 1)!}\Big(\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big)^{\alpha_j - 1}\left(\frac{f(\lambda)}{\prod\limits_{i=1, i\neq j}^{\gamma}(\lambda - \lambda_i)^{\alpha_j}}\right)\Bigg|_{\lambda=\lambda_j}; \tag{6}$$

якщо ж функція аналітична в опуклій області, що містить точки $\lambda_1, \ldots, \lambda_\gamma$, то

$$R_\Lambda(f(\lambda)) = \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{\gamma-2}} f^{(s-1)}\Big(\sum_{i=1}^{\gamma} t_{i-1}(\lambda_i - \lambda_{i-1})\Big)\times$$

$$\times \prod_{j=1}^{\gamma} \frac{(t_{j-1} - t_j)^{\alpha_j - 1}}{(\alpha_j - 1)!}\, dt_1 \cdots dt_{\gamma-1}, \tag{7}$$

де $t_0 = 1$, $\lambda_0 = t_\gamma = 0$, $f^{(s-1)}(\lambda) = d^{s-1}f(\lambda)/d\lambda^{s-1}$.

З формул (6) та (7) випливають властивості: $R_\Lambda(f(\lambda)) = 0$, якщо виконується рівність $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (\lambda - \lambda_\gamma)^{\alpha_\gamma} g(\lambda)$, де $g(\lambda)$ — аналітична в точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_\gamma$ функція; також $R_\Lambda(f(\lambda)) = f_0$, якщо $f(\lambda) = f_0\lambda^{s-1} + f_1\lambda^{s-2} + \ldots + f_{s-1}$; $R_\Lambda(f(\lambda))$ є лінійним щодо f функціоналом і не залежить від упорядкування s точок у наборі Λ.

Нехай $\bar\lambda \neq \bar{\bar\lambda}$, де числа $\bar\lambda$ і $\bar{\bar\lambda}$ належать набору Λ, набір $\bar\Lambda$, утворений з набору Λ вилученням $\bar{\bar\lambda}$ або зменшенням його кратності на одиницю, а набір $\bar{\bar\Lambda}$ — вилученням (або зменшенням кратності на одиницю) $\bar\lambda$, тоді розділені різниці для наборів Λ, $\bar\Lambda$ та $\bar{\bar\Lambda}$ пов'язані рівністю

$$R_\Lambda(f(\lambda)) = \frac{R_{\bar\Lambda}(f(\lambda)) - R_{\bar{\bar\Lambda}}(f(\lambda))}{\bar\lambda - \bar{\bar\lambda}}. \tag{8}$$

Розглянемо функцію $f(A(k))$ від матриці $A(k)$, яка є матрицею порядку m, що існує, коли існує вектор значень функції f на спектрі $\lambda_j(k)$ матриці $A(k)$, тобто вектор-стовпець

$$f_{A(k)} = \operatorname{col}\Big(\frac{f(\lambda_j(k))}{0!}, \frac{f'(\lambda_j(k))}{1!}, \ldots, \frac{f^{(\alpha_j(k)-1)}(\lambda_j(k))}{(\alpha_j(k)-1)!}\Big)\Big|_{j=1,\ldots,\gamma(k)},$$

і визначається формулою дії на довільний вектор C:

$$f\big(A(k)\big)C = \big(C, A(k)C, \ldots, A^{m-1}(k)C\big)\big(W_{A(k)}^T\big)^{-1} f_{A(k)}, \tag{9}$$

де $W_{A(k)}$ — матриця Вандермонда для випадку кратних коренів, а саме

$$W_{A(k)} = \big(W_{A(k)}(1), \ldots, W_{A(k)}\big(\gamma(k)\big)\big),$$
$$W_{A(k)}(\alpha) = \Big(\frac{1}{(j-1)!}\Big(\frac{d}{d\lambda_\alpha}\Big)^{j-1}\big(\lambda_\alpha^{i-1}(k)\big)\Big)_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,\alpha_j(k)}}.$$

Для транспонованої матриці $W^T_{A(k)}$ справджується [5,6] рівність

$$\left(W^T_{A(k)}\right)^{-1}=\begin{pmatrix} l_{m-1}(k) & l_{m-2}(k) & \dots & l_1(k) & 1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ l_1(k) & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}\times$$

$$\times W_{A(k)}\cdot\left(\operatorname{diag}\left(\left(l^{(i+j-1)}(\lambda_\alpha(k),k)\right)_{i,j=1}^{\alpha_d(k)}\right)_{d=1}^{\gamma(k)}\right)^{-1}. \quad (10)$$

Якщо $\gamma(k)=m$, то остання матриця має чисто діагональний вигляд, а саме $\operatorname{diag}\Big(l'\big(\lambda_1(k),k\big),\dots,l'\big(\lambda_m(k),k\big)\Big)^{-1}$. В цьому ж випадку вираз для $f_{A(k)}$ — простіший, тобто $f_{A(k)}=\operatorname{col}\big(f(\lambda_1(k),\dots,f(\lambda_m))\big)$, тому

$$W_{A(k)}\cdot\operatorname{diag}\left(\frac{1}{l'\big(\lambda_j(k),k\big)}\right)_{j=1}^{m}f_{A(k)}=\operatorname{col}\Big(R_\Lambda(f(\lambda)),R_\Lambda(\lambda f(\lambda)),\dots,R_\Lambda(\lambda^{m-1}f(\lambda))\Big),$$

$$f\big(A(k)\big)C=\big(C,A(k)C,\dots,A^{m-1}(k)C\big)\times$$
$$\times\begin{pmatrix} l_{m-1}(k) & l_{m-2}(k) & \dots & l_1(k) & 1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ l_1(k) & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_\Lambda(f(\lambda))\\ R_\Lambda(\lambda f(\lambda))\\ \dots\\ R_\Lambda(\lambda^{m-1}f(\lambda))\end{pmatrix}.$$

Ці дві формули випливають з рівностей (9) та (10).

Замість функції $f(\lambda)$ розглянемо функцію $e^{\lambda y}f(\lambda)$, яка збігається при $y=0$ з $f(\lambda)$, тоді $R_\Lambda\big(\lambda^j f(\lambda)\big)=R_\Lambda\big(\lambda^j e^{\lambda y}f(\lambda)\big)\big|_{y=0}=\partial^j R_\Lambda\big(e^{\lambda y}f(\lambda)\big)/\partial y^j\big|_{y=0}$ і з рівності

$$\frac{l(\lambda,k)-l(\bar\lambda,k)}{\lambda-\bar\lambda}=\big(1,\lambda,\dots,\lambda^{m-1}\big)\begin{pmatrix} l_{m-1}(k) & l_{m-2}(k) & \dots & l_1(k) & 1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ l_1(k) & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ \bar\lambda\\ \dots\\ \bar\lambda^{m-1}\end{pmatrix}$$

маємо остаточне зображення функції від матриці

$$f\big(A(k)\big)=\mathfrak{I}\Big(\frac{\partial}{\partial y},A(k),k\Big)R_{\Lambda(k)}\big(e^{\lambda y}f(\lambda)\big)\Big|_{y=0}. \quad (11)$$

У цій формулі $\mathfrak{I}$ є диференціальним оператором порядку $m-1$ з матричними коефіцієнтами (коефіцієнт при старшій похідній — одинична матриця), а саме [3]

$$\mathfrak{I}\Big(\frac{\partial}{\partial y},A(k),k\Big)=\Big(l\big(A(k),k\big)-l\Big(\frac{\partial}{\partial y}E,k\Big)\Big)\Big(A(k)-\frac{\partial}{\partial y}E\Big)^{-1}=$$
$$=\int_0^1 l'\Big(\tau\frac{\partial}{\partial y}E+(1-\tau)A(k),k\Big)\,d\tau. \quad (12)$$

Оскільки $R_{\Lambda(k)}\big(e^{\lambda y}f(\lambda)\big)$ неперервно залежить від елементів набору $\Lambda(k)$, то формула (11) справджується також і при $\gamma(k)<m$, тобто для випадку кратного спектру матриці $A(k)$.

5. Виняткові множини. Оцінки малих знаменників та розділених різниць. Використаємо формулу (11) до функції від матриці $\rho_0\big(A(k),t\big)$, де $\rho_0(\lambda,t)=e^{-\widetilde{k}^N\lambda t}\big(e^{-\widetilde{k}^N\lambda T}-\mu E\big)^{-1}$. Тоді отримуємо зображення розв'язку

$$U_k(t)=\mathfrak{I}\Big(\frac{\partial}{\partial y},A(k),k\Big)R_{\Lambda(k)}\big(e^{\lambda y}\rho_0(\lambda,T-t)\big)\Big|_{y=0}\Phi_k+\\+\int_0^t\mathfrak{I}\Big(\frac{\partial}{\partial y},A(k),k\Big)R_{\Lambda(k)}\big(e^{\lambda y}\rho_0(\lambda,T-t+\tau)\big)\Big|_{y=0}F_k(\tau)\,d\tau+\\+\mu\int_t^T\mathfrak{I}\Big(\frac{\partial}{\partial y},A(k),k\Big)R_{\Lambda(k)}\big(e^{\lambda y}\rho_0(\lambda,\tau-t)\big)\Big|_{y=0}F_k(\tau)\,d\tau,$$

або, позначивши $G(\lambda,t)=\rho_0(\lambda,T-t)\Phi_k+\int\limits_0^t\rho_0(\lambda,T-t+\tau)F_k(\tau)\,d\tau+\mu\int\limits_t^T\rho_0(\lambda,\tau-t)F_k(\tau)\,d\tau$, компактне зображення

$$U_k(t)=\mathfrak{I}\Big(\frac{\partial}{\partial y},A(k),k\Big)R_{\Lambda(k)}\big(e^{\lambda y}G(\lambda,t)\big)\Big|_{y=0}. \tag{13}$$

Оцінимо евклідову норму вектора $U_k(t)$ використавши формулу (12). Розвиваючи за формулою Маклорена

$$l'\big(\tau E+(1-\tau)A(k),k\big)=\sum_{\chi=1}^{m}\frac{\tau^{\chi-1}}{(\chi-1)!}l^{(\chi)}\big((1-\tau)A(k),k\big),$$

з (13) отримуємо рівність

$$U_k(t)=\int_0^1\sum_{\chi=1}^{m}\frac{\tau^{\chi-1}}{(\chi-1)!}l^{(\chi)}\big((1-\tau)A(k),k\big)\,d\tau\cdot R_{\Lambda(k)}\big(\lambda^{\chi-1}G(\lambda,t)\big),$$

а також нерівність

$$\big\|U_k(t)\big\|^2\le C_1\max_{\chi=1,\ldots,m}\big\|R_{\Lambda(k)}\big(\lambda^{\chi-1}G(\lambda,t)\big)\big\|^2, \tag{14}$$

де стала C_1 не залежить від вектора k, внаслідок обмеженості матриць $A(k)$ та коефіцієнтів многочлена $l(\lambda,k)$.

Щоб оцінити зверху розділені різниці $R_{\Lambda(k)}\big(\lambda^{\chi-1}G(\lambda,t)\big)$ треба вміти (формули (6), (7)) оцінювати зверху функцію $G(\lambda,t)$ та її похідні за змінною λ в опуклій оболонці комплексних чисел $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_{\gamma(k)}(k)$. В такій області мероморфна функція $G(\lambda,t)$, взагалі, має полюси, тобто є необмеженою, якщо не накладати певні умови на параметр μ, вимагаючи щоб він не входив у відповідні виняткові множини. Можна також накладати аналогічні умови на вектор зсуву ξ_j, $j=1,\ldots,Q$, при фіксованому μ.

Знаменники функцій $\rho_0(\lambda_k,t)$ та їх похідних (всі ці функції лінійно входять у розділені різниці $R_{\Lambda(k)}\big(\lambda^{\chi-1}G(\lambda,t)\big)$) є малими знаменниками задачі і використання виняткових множин малої міри є варіантом метричного підходу до оцінюванн малих знаменників [7, 8].

Побудуємо виняткові множини на комплексній площині для параметра μ.

Виберемо від'ємне число r і додатні числа $\varkappa$ та ε із таких умов: $r < -p/2$, $\varkappa^2 \cdot 32mT^2\zeta(r) = \pi$, $\varepsilon < 1$. Якщо $m = 1$, то додатково $\sqrt{\varepsilon} < \ln 2/(2\varkappa T)$; якщо $m > 1$, то $\ln 2/(2\varkappa T) = \ln 2\sqrt{8m\zeta(r)/\pi} \geq \sqrt{8m/\pi}/2 = \sqrt{2m/\pi} > 1$, тобто також $\sqrt{\varepsilon} < \ln 2/(2\varkappa T)$.

Позначимо $\varkappa_1 = \varkappa_1(k) = \sqrt{\varepsilon}\varkappa\widetilde{k}^{\,r}$ та $\mu_j(k) = e^{-\widetilde{k}^{\,N}\lambda_j(k)T}$ і введемо множини $B_j(k)$ для тих $j \in \{1, \ldots, \gamma(k)\}$ та $k \in \mathbb{Z}^p$, що задовольняють умову $|\mu_j(k)| < 2M$, за формулою

$$B_j(k) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C}\colon \big|\operatorname{Re}(\lambda - \lambda_j(k))\big| \leq \frac{\varkappa_1}{2}, \big|\operatorname{Im}(\lambda - \lambda_j(k))\big| \leq \frac{\varkappa_1}{2}\Big\}. \tag{15}$$

Кожна множина $B_j(k)$ є квадратом зі стороною $\varkappa_1$ та центром $\lambda_j(k)$ у комплексній площині змінної λ.

Нехай множина $B_{j,2}(k)$ — образ квадрата $B_j(k)$ при відображенні $\lambda \mapsto e^{-\widetilde{k}^{\,N}\lambda T}$, а множина $B_{j,1}(k)$ — образ концентричного до $B_j(k)$ квадрата зі стороною $2\varkappa_1$, тоді

$$B_{j,i}(k) = \Big\{\mu \in \mathbb{C}\colon e^{-\varkappa_1 2^{1-i}T} \leq \Big|\frac{\mu}{\mu_j(k)}\Big| \leq e^{\varkappa_1 2^{1-i}T}, \Big|\arg\frac{\mu}{\mu_j(k)}\Big| \leq \varkappa_1 2^{1-i}T\Big\}. \tag{16}$$

Множина $B_{j,i}(k$ є частиною кільця $\Big\{\mu \in \mathbb{C}\colon e^{-\varkappa_1 2^{1-i}T} \leq \Big|\dfrac{\mu}{\mu_j(k)}\Big| \leq e^{\varkappa_1 2^{1-i}T}\Big\}$, яку видно з початку координат під кутом $\varkappa_1 2^{2-i}T$. Площа (міра) множини $B_{j,1}(k)$, яку назвемо винятковою множиною для заданого k, обчислюється за формулою

$$\begin{aligned}\operatorname{meas} B_{j,1}(k) = \frac{2\varkappa_1 T}{2\pi} \cdot \big(\pi|\mu_j(k)|^2 e^{2\varkappa_1 T} - \pi|\mu_j(k)|^2 e^{-2\varkappa_1 T}\big) = \\ = \varkappa_1 T|\mu_j(k)|^2\big(e^{2\varkappa_1 T} - e^{-2\varkappa_1 T}\big).\end{aligned}$$

Оскільки $e^{2\varkappa_1 T} < 2$ і $\dfrac{e^{y_2\varkappa_1 T} - e^{y_1\varkappa_1 T}}{y_2 - y_1} = \varkappa_1 T e^{y_3\varkappa_1 T} \leq \varkappa_1 T e^{y_2\varkappa_1 T}$, де $y_3 \in (y_1, y_2)$, то

$$\operatorname{meas} B_{j,1}(k) < 4\big(\varkappa_1 T|\mu_j(k)|\big)^2 e^{2\varkappa_1 T} \leq (4\varkappa_1 TM)^2 e^{2\varkappa_1 T} < 32(\varkappa_1 TM)^2.$$

Об'єднаємо виняткові множини $B_{j,1}(k)$ в одну множину B_ε і знайдемо її міру. Отже, $B_\varepsilon = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \bigcup\limits_{\substack{j=1,\ldots,\gamma(k)\\ |\mu_j(k)|\leq 2M}} B_{j,1}(k)$, тому

$$\operatorname{meas} B_\varepsilon = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \sum_{\substack{j=1,\ldots,\gamma(k)\\ |\mu_j(k)|\leq 2M}} \operatorname{meas} B_{j,1}(k) \leq 32(MT)^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \varkappa_1^2.$$

Враховуючи визначення $\varkappa_1$ та $\varkappa$, отримуємо нерівність для міри виняткової множини

$$\operatorname{meas} B_\varepsilon < 32mT^2\zeta(r)\varkappa^2\varepsilon M^2 = \varepsilon\pi M^2 = \varepsilon \cdot \operatorname{meas} \mathcal{O}_M. \tag{17}$$

Далі перетворюємо набори $\Lambda(k)$ розділених різниць $R_\Lambda\big(G(\lambda, t)\big)$ за формулою (8) так, щоб елементи кожного з нових наборів належали до однієї з множин $B_j(k)$, а параметр μ вважаємо елементом множини

$$W = \mathcal{O}_M \setminus B_\varepsilon, \tag{18}$$

причому з формули (17) випливає, що $\operatorname{meas} W \geq (1-\varepsilon)\cdot \operatorname{meas} \mathcal{O}_M$.

Позначимо через $b(k)$ максимальне число елементів (враховуючи їх кратність) набору $\Lambda(k)$, які містяться в деякому крузі радіуса $\varkappa_1/2$.

Очевидно, що $\min\big(\alpha_1(k),\ldots,\alpha_{\gamma(k)}(k)\big) \leq b(k) \leq m$. Якщо $b(k)=1$, то матриця $B(k)$ не має кратних власних значень і відстань між ними не менша $\varkappa_1/2$, якщо ж $b(k)=m$, то кратність власного значення може досягати m та всі власні значення належать кругу радіуса $\varkappa_1/2$. Позначимо через b верхню границю послідовності $b(k)$:

$$b = \varlimsup_{\widetilde{k}\to\infty} b(k); \tag{19}$$

отже, лише для скінченного числа векторів k виконується нерівність $b(k) > b$.

Вибір числа b для вихідної системи (1) означає, що нескінченне число матриць $A(k)$ систем (3) мають власні значення $\lambda_j(k)$ кратності b і лише скінченна кількість матриць мають власні значення кратності $b+1$ або більшої кратності.

Якщо $\bar\lambda$ та $\bar{\bar\lambda}$ належать $\Lambda(x)$ і $\big|\bar\lambda-\bar{\bar\lambda}\big| \geq \varkappa_1/2$, то за формулою (8) маємо оцінку $\big\|R_\Lambda\big(H(\lambda)\big)\big\|^2 \leq (8/\varkappa_1^2)\big(\big\|R_{\bar\Lambda}\big(H(\lambda)\big)\big\|^2 + \big|R_{\bar{\bar\Lambda}}\big(H(\lambda)\big)\big\|^2\big)$, де $\bar\Lambda = \Lambda\setminus\{\bar{\bar\lambda}\}$, $\bar{\bar\Lambda} = \Lambda\setminus\{\bar\lambda\}$, $H(\lambda)$ — m-вимірний вектор.

Аналогічно, якщо $|\hat\lambda-\hat{\hat\lambda}| \geq \varkappa_1/2$, $\{\hat\lambda,\hat{\hat\lambda}\}\subset\bar\Lambda$ і $\hat\Lambda = \bar\Lambda\setminus\{\hat{\hat\lambda}\}$, $\hat{\hat\Lambda} = \bar\Lambda\setminus\{\hat\lambda\}$, то

$$\big\|R_\Lambda\big(H(\lambda)\big)\big\|^2 \leq \Big(\frac{8}{\varkappa_1^2}\Big)^2\Big(\big\|R_{\hat\Lambda}\big(H(\lambda)\big)\big\|^2 + \big|R_{\hat{\hat\Lambda}}\big(H(\lambda)\big)\big\|^2\Big) + \frac{8}{\varkappa_1^2}\big|R_{\bar{\bar\Lambda}}\big(H(\lambda)\big)\big\|^2.$$

Використовуємо таку процедуру для всіх розділених різниць до порядку $b(k)-1$ і до розділених різниць меншого порядку з наборами, діаметри яких є не менші числа $\varkappa_1/2$. Оскільки $\varkappa_1(k)\to 0$ при $\widetilde{k}\to\infty$, то набори у розділених різницях, як і множини $B_{j,1}(k)$, стягуються до відповідних точок комплексної площини.

Нехай Λ_β^χ — набір з β власних значень матриці $A(k)$, що відповідає розділеній різниці $R_{\Lambda_\beta^\chi}\big(\lambda^{\chi-1}G(\lambda,t)\big)$, яка є максимальною за нормою серед новоутворених (після повного використання формули (8)) різниць порядку $\beta-1$, де $1 \leq \min\big(\alpha_1(k),\ldots,\alpha_{\gamma(k)}(k)\big) \leq \beta \leq b(k)$.

З нерівності (14) отримуємо наступну оцінку зверху

$$\big\|U_k(t)\big\|^2 \leq C_2 \max_{\chi=1,\ldots,m} \sum_{\beta=\min(\alpha_1(k),\ldots,\alpha_{\gamma(k)}(k))}^{b(k)} \varkappa_1^{2(\beta-m)}\big\|R_{\Lambda_\beta^\chi}\big(\lambda^{\chi-1}G(\lambda,t)\big)\big\|^2, \tag{20}$$

де стала C_2 не залежить від k.

Якщо $\Lambda_\beta^\chi = \big(\lambda_{j_1}(k),\ldots,\lambda_{j_\beta}(k)\big)$, то опукла лінійна оболонка точок, що зображають числа $\lambda_{j_1}(k),\ldots,\lambda_{j_\beta}(k)$, належить множині $\bigcap\limits_{\theta=1}^{\beta} B_{j_\theta}(k) \subset B_{j_1}(k)$ і не перетинається з множиною W. Оскільки функція $G(\lambda,t)$ для всіх $t\in[0,T]$ є аналітичною на множині $B_{j_1}(k)$, то вона аналітична і в згаданій лінійній оболонці, а тому з формули (7) отримуємо

$$R_{\Lambda_\beta^\chi}\big(\lambda^{\chi-1}G(\lambda,t)\big) = \frac{1}{(\beta-1)!}\frac{\partial^{\beta-1}\big(\lambda^{\chi-1}G(\lambda,t)\big)}{\partial\lambda^{\beta-1}}\bigg|_{\lambda=\lambda^*} =$$

$$= \sum_{g=0}^{\min(\beta,\chi)-1}\frac{1}{g!}\frac{\partial^g(\lambda^{\chi-1})}{\partial\lambda^g}\cdot\frac{1}{(\beta-g-1)!}\frac{\partial^{\beta-g-1}\big(G(\lambda,t)\big)}{\partial\lambda^{\beta-g-1}}\bigg|_{\lambda=\lambda^*},$$

де $\lambda^* \in B_{j_1}(k)$. Враховуючи, вигляд функції G маємо

$$R_{\Lambda^\chi_\beta}\big(\lambda^{\chi-1}G(\lambda,t)\big) = \sum_{g=0}^{\min(\beta,\chi)-1} C^g_{\chi-1}\lambda^{\chi-g-1}\Big(\rho_{\beta-g-1}(\lambda^*,T-t)\Phi_k +$$
$$+\int_0^t \rho_{\beta-g-1}(\lambda^*,T-t+\tau)F_k(\tau)\,d\tau + \mu\int_t^T \rho_{\beta-g-1}(\lambda^*,\tau-t)F_k(\tau)\,d\tau\Big), \quad (21)$$

де $C^g_{\chi-1}$ — біномні коефіцієнти, $\rho_s(\lambda,t) = \dfrac{1}{s!}\dfrac{\partial^s\rho_0(\lambda,t)}{\partial\lambda^s}$.

Лема 1. *Нехай $\mu \in M$, тоді функції $\rho_s(\lambda,t)$, є аналітичними в областях $B_j(k)\times[0,T]$ і мають оцінку зверху*

$$|\rho_s(\lambda,t)| \le e^{s(T+1)}\Big(\frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)^{s+1}\widetilde{k}^{\,sN-sr-r}, \qquad s=0,1,2,\dots, \quad (22)$$

де $\theta = 8\max(1,1/|\mu|)\sqrt{2\pi m\zeta(r)} > 20$.

Використовуючи формулу (22) для оцінювання $R_{\Lambda^\chi_\beta}\big(\lambda^{\chi-1}G(\lambda,t)\big)$ із (21) отримуємо

$$\big\|R_{\Lambda^\chi_\beta}\big(\lambda^{\chi-1}G(\lambda,t)\big)\big\|^2 \le C_3 \sum_{g=0}^{\min(\beta,\chi)-1} \varepsilon^{g-\beta}\widetilde{k}^{\,2(N-r)(\beta-g-1)-2r}\Big(\|\Phi_k\|^2 + \max_{t\in[0,T]}\|F_k(t)\|^2\Big),$$

на основі цієї нерівності та формули (20) встановлюємо таку оцінку:

$$\|U_k(t)\|^2 \le C_4\cdot\varepsilon^{-m}\widetilde{k}^{\,2N(b(k)-1)-2mr}\Big(\|\Phi_k\|^2 + \max_{t\in[0,T]}\|F_k(t)\|^2\Big). \quad (23)$$

Із рівняння (3) оцінюємо похідну $U_k'(t)$, а саме

$$U_k'(t)\|^2 \le C_5\big(\widetilde{k}^{\,2N}\|U_k(t)\|^2 + \|F_k(t)\|^2\big) \le$$
$$\le C_6\cdot\varepsilon^{-m}\widetilde{k}^{\,2Nb(k)-2mr}\Big(\|\Phi_k\|^2 + \max_{t\in[0,T]}\|F_k(t)\|^2\Big). \quad (24)$$

У знайдених вище оцінках сталі C_3–C_6 не залежать від вектора k.

Доведемо тепер лему 1.

Доведення. Функції $\rho_s(\lambda,t)$ аналітичні в області $B_j(k)$ при $s\ge 1$, як похідні від аналітичної функції $\rho_0(\lambda,t)$.

Формулу (22) доведемо за індукцією, припустивши, що оцінка є при $s=0$:

$$|\rho_0(\lambda,t)| \le \frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon}}\widetilde{k}^{\,-r} \equiv \frac{\theta_1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad (25)$$

Для $s\ge 1$ введемо заміну змінної λ на змінну σ за формулою $\sigma = -\widetilde{k}^{\,N}\lambda$, тоді $\rho_0(\lambda,t) = e^{\sigma t}/(e^{\sigma T}-\mu) \equiv \rho_0^*(\sigma,t)$,

$$\frac{\partial^s\rho_0(\lambda,t)}{\partial\lambda^s} \equiv \rho_s(\lambda,t) = (-\widetilde{k}^{\,N})^s\rho_s^*(\sigma,t) \equiv (-\widetilde{k}^{\,N})^s\frac{\partial^s\rho_0^*(\sigma,t)}{\partial\sigma^s}.$$

Нехай маємо нерівність $|\rho_l^*(\sigma,t)| \le e^{l(T+1)}\Big(\frac{\theta_1}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)^{l+1}$ для $l=1,\dots,s-1$, тоді

$$\max_{l=1,\dots,s-1}|\rho_l^*(\sigma,t)| \le e^{(s-1)(T+1)}\Big(\frac{\theta_1}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)^{s}.$$

Оскільки $e^{\sigma t} = \big(e^{\sigma T}-\mu\big)\rho_0^*(\sigma,t)$, то після диференціювання отримуємо

$$\frac{1}{s!}\frac{\partial^s e^{\sigma t}}{\partial\sigma^s} = \big(e^{\sigma T}-\mu\big)\rho_s^*(\sigma,t) + \sum_{j=1}^{s}\frac{1}{j!}\frac{\partial^j\big(e^{\sigma T}-\mu\big)}{\partial\sigma^j}\rho_{s-j}^*(\sigma,t),$$

або $\frac{t^s}{s!}e^{\sigma t} = \big(e^{\sigma T}-\mu\big)\rho_s^*(\sigma,t) + e^{\sigma T}\sum_{j=1}^{s}\frac{T^j}{j!}\rho_{s-j}^*(\sigma,t)$. Знаходимо $\rho_s^*(\sigma,t)$ з останньої рівності:

$$\rho_s^*(\sigma,t) = \frac{t^s}{s!}\rho_0^*(\sigma,t) - \rho_0^*(\sigma,T)\sum_{j=1}^{s}\frac{T^j}{j!}\rho_{s-j}^*(\sigma,t).$$

Перейдемо до нерівностей

$$|\rho_l^*(\sigma,t)| \le \frac{t^s}{s!}e^{(s-1)(T+1)}\Big(\frac{\theta_1}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)^{s} + \sum_{j=1}^{s}\frac{T^j}{j!}\cdot e^{(s-1)(T+1)}\Big(\frac{\theta_1}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)^{s}\cdot\frac{\theta_1}{\sqrt{\varepsilon}} <$$

$$< 2\sum_{j=1}^{s}\frac{T^j}{j!}\cdot e^{(s-1)(T+1)}\Big(\frac{\theta_1}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)^{s+1} < e\cdot e^{T}\cdot e^{(s-1)(T+1)}\Big(\frac{\theta_1}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)^{s+1} = e^{s(T+1)}\Big(\frac{\theta_1}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)^{s+1}.$$

Отримуємо твердження індукції. Залишаєтьс лише довести нерівність (25).

Спочатку розглянемо перший випадок $|\mu_j(k)| \ge 2M$. Позначимо $\mu(k) = e^{-\widetilde{k}^{\,N}\lambda T}$, тоді $\rho_0(\lambda,t) = \frac{e^{-\widetilde{k}^{\,N}\lambda t}}{\mu(k)-\mu}$ і $|\mu_j(k)|e^{-\varkappa_1 T/2} \le |\mu(k)| \le |\mu_j(k)|e^{\varkappa_1 T/2}$ у квадраті $B_j(k)$, де $e^{2\varkappa_1 T} = e^{2\sqrt{\varepsilon}\varkappa T\widetilde{k}^{\,r}} \le e^{\widetilde{k}^{\,r}\ln 2} = e^{\widetilde{k}^{\,r}} \le 2$, тому

$$3M/2 < 2^{3/4}M \le 2^{-1/4}|\mu_j(k)| \le |\mu(k)| \le 2^{1/4}|\mu_j(k)|.$$

Далі отримуємо

$$|\rho_0(\lambda,t)| = \frac{|\mu(k)|^{t/T}}{|\mu(k)-\mu|} = \frac{|\mu(k)|^{(t-T)/T}}{|1-\mu/\mu(k)|} \le 3\max(1,1/|\mu(k)|) < \max(3,2/M),$$

а також

$$|\rho_0(\lambda,t)| < \frac{\widetilde{k}^{\,-r}}{\sqrt{\varepsilon}}\max\Big(3,\frac{2}{M}\Big), \tag{26}$$

У другому випадку $|\mu_j(k)| < 2M$, а для числа $\mu(k)$ маємо три можливості: $|\mu(k)| \le |\mu|/2$, $|\mu(k)| \ge 2|\mu|$, або $|\mu|/2 < |\mu(k)| < 2|\mu|$. Отримаємо оцінки для кожної з можливостей.

Нехай $|\mu(k)| \le |\mu|/2$, тоді $|\mu(k)-\mu| \ge |\mu|/2$ і

$$|\rho_0(\lambda,t)| \le \frac{2|\mu(k)|^{t/T}}{|\mu|} \le \frac{2}{|\mu|}\max\Big(1,\frac{|\mu|}{2}\Big) \le \frac{\widetilde{k}^{\,-r}}{\sqrt{\varepsilon}}\max\Big(1,\frac{2}{|\mu|}\Big). \tag{27}$$

Нехай $|\mu(k)| \geq 2|\mu|$, тоді $|\mu(k)-\mu| = |1-\mu/\mu(k)| \cdot |\mu(k)| \geq |\mu(k)|/2$ і

$$|\rho_0(\lambda,t)| \leq 2|\mu(k)|^{(t-T)/T} \leq \max\Big(2, \frac{2}{|\mu(k)|}\Big) \leq \frac{\widetilde{k}^{\,-r}}{\sqrt{\varepsilon}} \max\Big(2, \frac{1}{|\mu|}\Big). \qquad (28)$$

Аналогічно, за другою з нерівностей $|\mu|/2 < |\mu(k)| < 2|\mu|$ отримуємо

$$|\rho_0(\lambda,t)| = \frac{|\mu(k)|^{t/T}}{|\mu(k)-\mu|} \leq \frac{\max(1,|\mu(k)|)}{|\mu(k)-\mu|} < \frac{\max(1,2|\mu|)}{|\mu(k)-\mu|}.$$

Знаменник $|\mu(k)-\mu|$ не менший, ніж $\min|z_1-z_2|$, де z_1 належить границі області $B_{j,1}(k)$, а z_2 — границі області $B_{j,2}(k)$. Цей мінімум досягається, якщо $z_2 = e^{-\widetilde{k}^{\,N}(\lambda_j(k)+(i+1)\varkappa_1/2)T}$, а z_1 — проекція z_2 на промінь $z = \arg\lambda_j(k) - \varkappa_1 T$ і дорівнює $|\mu_j(k)|e^{-\varkappa_1 T/2}\sin(\varkappa_1 T/2)$. Оскільки справджуютьс оцінки $\varkappa_1 T/2 < (\ln 2)/4 < 1/4 < \pi/4$ і $\sin x \geq 2\sqrt{2}x/\pi$ при $x \in [0,\pi/4]$, то $\sin(\varkappa_1 T/2) \geq \sqrt{2}\varkappa_1 T/\pi$. Тому із нерівності $|\mu_j(k)| \geq |\mu(k)|e^{-\varkappa_1 T/2}$ отримуємо знову оцінку $|\mu(k)-\mu| \geq |\mu(k)||e^{-\varkappa_1 T/2}\sqrt{2}\varkappa_1 T/\pi > |\mu|\varkappa_1 T/2\pi$, з якої випливає нерівність

$$|\rho_0(\lambda,t)| \leq \frac{2\pi\max(1,2|\mu|)}{|\mu|\varkappa_1 T} \leq \frac{2\pi\widetilde{k}^{\,-r}}{\sqrt{\varepsilon}\varkappa T}\max\Big(2,\frac{1}{|\mu|}\Big) \leq$$
$$\leq \frac{\widetilde{k}^{\,-r}}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot 8\sqrt{2m\pi\zeta(r)}\max\Big(2,\frac{1}{|\mu|}\Big). \qquad (29)$$

Праві частини у формулах (26)–(29) оцінюються числом $\theta\widetilde{k}^{\,-r}/\sqrt{\varepsilon}$.

Лему доведено.

З оцінок (23) та (24) випливає оцінка шуканого розв'язку задачі (1), (2).

Позначимо Π проектор у просторі $(\mathcal{T}')^m$, який функцію $\psi = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\psi_k e^{i(k,x)}$ відображає у многочлен $\Pi\psi = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p,\, b(k)>b}\psi_k e^{i(k,x)}$. Цей проектор залежить від ε, r, T, m. Кількість доданків у многочлені $\Pi\psi$ збільшується при зменшенні ε та збільшенні m, T, r. Проектором є також оператор $I-\Pi$, де I — одиничний оператор, причому $(I-\Pi)\psi = \psi - \Pi\psi$.

Теорема 1. *Нехай* $0 < \varepsilon < \min\big(1, 2\ln 2\sqrt{2m\zeta(r)/\pi}\big)$, $r < -p/2$, *число* b *визначено за формулою* (19), $f \in \mathbf{C}\big([0,T];\mathbf{X}\big)$ *і* $\varphi \in \mathbf{X}$, *тоді задача* (1), (2) *розв'язна у просторі* $\mathbf{H}^N_{\bar d,q}(\mathcal{D}^p)$ *з ймовірністю на множині* $\mathcal{O}_M$ *не меншою, ніж* $(1-\varepsilon)$, *причому для всіх* μ *з множини* W *справджується оцінка*

$$\|(I-\Pi)u;\mathbf{H}^N_{\bar d,q}(\mathcal{D}^p)\|^2 \leq \mathrm{const}\,\cdot\varepsilon^{-m}\big(\|\varphi;\mathbf{X}\|^2 + \|f;\mathbf{C}\big([0,T];\mathbf{X}\big)\|^2\big), \qquad (30)$$

де множина W *визначається за формулою* (18), $\mathbf{X} = \mathbf{H}_{\bar d,q+N(b-1)-mr}(\Omega^p_{2\pi})$.

Доведення. Якщо $\mu \in W$, то існують розв'язки $U_k(t)$ задачі (3), (4) для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$. Отже, у випадку $(I-\Pi)u \in \mathbf{H}^N_{\bar d,q}(\mathcal{D}^p)$ для $\mu \in W$, розв'язок $u = \Pi u + (I-\Pi)u$ задачі (1), (2) також належить $\mathbf{H}^N_{\bar d,q}(\mathcal{D}^p)$ для всіх $\mu \in W$ та з нерівності $\operatorname{meas} W \geq (1-\varepsilon)\cdot\operatorname{meas}\mathcal{O}_M$ отримуємо твердження теореми про розв'язність задачі з ймовірністю не меншою, ніж $1-\varepsilon$.

Обчислимо норму проекції $(I-\Pi)u$ розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{H}^N_{\bar{d},q}(\mathcal{D}^p)$ використовуючи оцінки (23) та (24), які виконуються при $b(k) \le b$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$:

$$\|(I-\Pi)u; \mathbf{H}^N_{\bar{d},q}(\mathcal{D}^p)\|^2 \le \text{const} \cdot \varepsilon^{-m} \sum_{k\in\mathbb{Z}^p,\, b(k)\le b} \widetilde{k}^{\,2q+2N(b-1)-2mr} \times$$
$$\times \Big(\|\Phi_k\|^2 + \max_{t\in[0,T]} \|F_k(t)\|^2\Big) = \text{const} \cdot \varepsilon^{-m}\big(\|\varphi; \mathbf{X}\|^2 + \|f; \mathbf{C}\big([0,T]; \mathbf{X}\big)\|^2\big).$$

Нерівність (30) встановлено, отже $(I-\Pi)u \in \mathbf{H}^N_{\bar{d},q}(\mathcal{D}^p)$.

Теорему доведено.

Аналогічну теорему можна довести про розв'язність задачі (1), (2) з ймовірністю не меншою $(1-\varepsilon)$ на множині Ξ зміни параметра зсуву (одного з векторів ξ_j, $j=1,\dots,Q$) використовуючи, наприклад, такий підхід.

Якщо розв'язок задачі (1), (2) подати у вигляді суми $u = \bar{u} + \varphi t/\mu T$, то $\bar{u}$ є розв'язком такої нелокальної однорідної задачі для неоднорідної системи рівнянь з частинними похідними:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \sum_{j=1}^{Q} A_j(D)\bar{u}_{\xi_j} + \frac{t}{\mu T}\sum_{j=1}^{Q}\varphi_{\xi_j} - \frac{1}{\mu T}\varphi + f, \tag{31}$$

$$\bar{u}|_{t=0} - \mu\bar{u}|_{t=T} = 0. \tag{32}$$

Зобразимо його рядом $\sum_{(k,p)\in\mathbb{Z}^{p+1}} u_{kp}v_{kp}(t,x)$, де функції $v_{kp} = e^{\tau(p)t + i(k,x)}$ утворюють повну систему [9, 10] у просторі $\mathbf{L}_2(\mathcal{D}^p)$, тут $\tau(p) = i2\pi p/T + i\arg\mu$. Тоді для розв'язності задачі (1), (2) треба оцінювати малі знаменники, які виникають при оцінюванні норми матриць, обернених до матриць $A^*(k,p)$, де

$$A^*(k,p) = \tau(p)E - \sum_{j=1}^{Q} e^{i(k,\xi_j)}A_j(k)$$

є матричним пучком для системи (32) з коефіцієнтами $\tau(p), -e^{i(k,\xi_1)}, \dots, -e^{i(k,\xi_Q)}$ і матрицями $A_0(k)(=E), A_1(k), \dots, A_Q(k)$.

Метричний підхід до проблеми малих знаменників дасть змогу встановити розв'язність задачі (1), (2) для майже всіх векторів ξ_j, $j=1,\dots,Q$.

6. Висновки та примітки. Отже, у роботі встановлено розв'язність з ймовірністю „майже“ одиниця, щодо параметра в нелокальній умові (2), задачі з двоточковою нелокальною умовою для загальної (анізотропної) системи рівннь з частинними похідними (1) зі сталими коефіцієнтами у соболєвській шкалі просторів 2π-періодичних за просторовими змінними функцій. Особливістю рівнянь є наявність шуканої функції зі зміщеними значеннями векторного (просторового) аргумента x. Задача пов'язана з проблемою малих знаменників і є некоректною щодо параметрів задачі. Однак зсуви аргумента x (параметри ξ_j) не впливають на гладкість (необхідної для розв'язності) початкових даних задачі для майже всіх μ. Подібні результати раніше анонсовано у публікації [11]. Робота є продовженням статей [2, 3], де вивчалися нелокальні задачі без зсувів.

Взагалі, задачі зі зсувами аргументів, або задачі зі зміщеннями чи відхиленнями аргументів, описують певні процеси із часовим або іншим запізненням. Зокрема, такі задачі виникають [12–16] при математичному описі процесів у ядерних реакторах, іммунології, епідемології, теоріях автоматичного керування, математичній економіці та ін.

Багато публікацій [12–18] присв'ячено теорії диференціальних рівнянь з відхиленням аргументів, зокрема близькою до даної роботи є стаття [19], в якій розглянуто задачу з інтегральною умовою та зроблено огляд літератури.

1. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 284 с.
2. *Ільків В. С.* Нелокальна крайова задача для нормальних анізотропних систем із частинними похідними і сталими коефіцієнтами // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 54. – С. 96–107.
3. *Ільків В. С.* Нелокальна крайова задача для систем із частинними похідними в анізотропних просторах // Нелинейные граничные задачи. – 2001. – Вып. 11. – С. 57–64.
4. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – Вып. 3. – 274 с.
5. *Илькив В. С.* Компактное обращение обобщенной матрицы Вандермонда. – Деп. в - НИИЭИР. Сб. реф. деп. рук. ВИМИ, 1991. – Вып. 5, № 3-8836. – 10 с.
6. *Ільків В. С., Магеровська Т. В.* Дослідження умов розв'язності задачі Коші для рівнянь частинними похідними за допомогою метричного підходу // Нелинейные граничные задачи. – 2008. – Вып. 18. – С. 86–106.
7. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук.думка, 1984. – 264 с.
8. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
9. *Ільків В. С.* Нелокальная краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами // Доповіді АН УРСР Сер. А. – 1982. – № 5. – С. 15—19.
10. *Ільків В. С.* Нелокальная краевая задача для систем дифференциальных уравнений в частных производных бесконечного порядка // Дифференц. уравн. – 2005. – **41**, № 2. — С. 250—257.
11. *Магеровська Т. В., Ільків В. С.* Про співвідношення нормами похідних та мірою області. – Approximation theory and applications: Abstracts of int. conf. in memory of N. P. Korneichuk (Dnepropetrovsk, June 14–17, 2010). – Dnepropetrovsk, 2010. – С. 61–62.
12. *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения. Операторный подход. – Минск: Университетское, 1988. – 232 с.
13. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1972. – 352 с.
14. *Мышкис А. Д.* О некоторых проблемах теории уравнений с отклонющимся аргументом // Успехи мат. наук. – 1977. – Т. 32, вып. 2. — С. 173—202.
15. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Наука, 1970. – 310 с.
16. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1984. – 422 с.
17. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулрные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977. – 448 с.
18. *Przeworska-Rolewicz D.* Equations with transformed argument an alebraic approach. – Warszawa: PWN, 1973. – 354 с.
19. *Медвідь О. М., Симотюк М. М.* Задача з інтегральними умовами для для лінійної системи рівнянь із частинними похідними з відхиленм аргументу // Матем. вісник НТШ. – 2007. – Т. 4. — С. 414—427.

Одержано 24.10.2010