УДК 512.547.25

Ю. В. Петечук (Ужгородський нац. ун-т)

ДВОМІРНІ ЗОБРАЖЕННЯ ГРУП ДІЕДРА НАД КОМУТАТИВНИМИ ЛОКАЛЬНИМИ КІЛЬЦЯМИ. ЧАСТИНА 2.

All two-dimensional representations Λ of the dihedral group $D_m = \langle a, b \mid a^m = 1,\ b^2 = 1,\ bab^{-1} = a^{-1} \rangle$, $m > 1$ over the commutative local rings with 1 where Λa is a scalar matrix modulo the ring radical are described in this article. It turns out that Λb is either a scalar matrix modulo the ring radical as well or Λa and Λb are diagonal matrices with plus, minus ones on the diagonals or $\Lambda a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_4 \end{pmatrix}$, $\Lambda b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, where in the latter case $\det \Lambda a = 1$, the characteristic polynomial $x^2 - tr\Lambda a x + \det \Lambda a$ of the matrix Λa divides the polynomial $x^m - 1$ with the remainder $r(x - a_1) = r(x - a_4)$, $r \in R$ and $ra_2 = 0$.
The full description of the representations of the dihedral group D_m , $m > 1$ over the commutative local rings with 1, is proposed from the point of view of a unified position.
The conditions for their irreducibility and equivalency are found.

Описано, з точністю до еквівалентності, всі двомірні зображення Λ групи діедра $D_m = \langle a, b \mid a^m = 1,\ b^2 = 1,\ bab^{-1} = a^{-1} \rangle$, $m > 1$ над комутативними локальними кільцями з 1 при умові, що Λa - скалярна матриця за модулем радикалу кільця. Виявляється, що Λb - також скалярна матриця за модулем радикалу кільця або Λa і Λb - діагональні матриці з плюс, мінус одиницями на діагоналях або $\Lambda a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_4 \end{pmatrix}$, $\Lambda b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, де в останньому випадку $\det \Lambda a = 1$, характеристичний многочлен $x^2 - tr\Lambda a x + \det \Lambda a$ матриці Λa ділить двочлен $x^m - 1$ з остачею $r(x - a_1) = r(x - a_4)$, $r \in R$ і $ra_2 = 0$.
У даній роботі, з єдиних позицій, запропоновано повне описання зображень груп діедра D_m, $m > 1$ над комутативними локальними кільцями з 1. Знайдено умови їх незвідності і еквівалентності.

У роботі [1], з точністю до еквівалентності, описані всі зображення Λ групи діедра $D_m = \langle a, b \mid a^m = b^2 = (ba)^2 = 1 \rangle$, $m > 1$ у групу $GL(2, R)$ над комутативними локальними кільцями R з 1 при умові, що Λa - нескалярна матриця за модулем радикалу $J(R)$. Там же наведений критерій незвідності і еквівалентності таких зображень.

Питання описання зображень групи D_m , $m > 1$, їх незвідності та еквівалентності при умові, що вони відображають елемент a у скалярні матриці за модулем радикалу залишилось відкритим і потребувало окремого дослідження. У даній статті дається відповідь на ці питання.

Окрім цього, у роботі, з єдиних позицій, описано зображення груп діедра D_m , $m > 1$ над комутативними локальними кільцями з 1. Знайдено умови їх незвідності і еквівалентності.

Історію питання і попередні результати можна знайти в [2–5].

Нехай всюди в даній роботі R - комутативне локальне кільце з 1, $D_m = \langle a, b \mid a^m = b^2 = (ba)^2 = 1 \rangle$ - група діедра, Λ - зображення D_m , $m > 1$ у групу $GL(2, R)$, $f(x) = x^2 - tr\Lambda a x + \det \Lambda a$ - характеристичний многочлен матриці Λa , $\overline{\Lambda} = \Lambda_{J(R)}\Lambda$, $\overline{g} = \overline{\Lambda} g$, де $\Lambda_{J(R)} : GL(2, R) \to GL\left(2, {}^{R}/_{J(R)}\right)$, $g \in D_m$.

Теорема 1. *Нехай* $2 \in R^*$, $\overline{\Lambda} a$ *- скалярна матриця. Тоді, з точністю до спряження,* Λa *і* Λb *- діагональні матриці з плюс, мінус одиницями на діагоналях або*

$$\Lambda a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_4 \end{pmatrix},\ \Lambda b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$\det \Lambda a = 1$ *і характеристичний многочлен* $x^2 - (a_1 + a_4)\, x + 1$ *матриці* Λa *ділить двочлен* $x^m - 1$ *з остачею* $r\,(x - a_1) = r\,(x - a_4)$ *, де* $r \in R$ *,* $ra_2 = 0$ *.*

Доведення. Оскільки $bab^{-1} = a^{-1}$, то $\overline{\Lambda} a^2 = \overline{E}$. Із скалярності матриці $\overline{\Lambda} a$ випливає, що $\overline{\Lambda} a = \pm \overline{E}$.

Згідно з лемою 1 [1], з точністю до спряження, можна вважати, що Λb - діагональна матриця з плюс, мінус одиницями на діагоналі.

Якщо $\Lambda b = \pm E$, то матриці Λa і Λb комутують і $\Lambda a^2 = E$. Тому, з аналогічних міркувань можна вважати, що Λa - також діагональна матриця з плюс, мінус одиницями на діагоналі. Оскільки $\overline{\Lambda} a$ - скалярна матриця, то $\Lambda a = \pm E$.

Отже, достатньо розглянути випадок, коли $\overline{\Lambda} b$ - нескалярна матриця.

Згідно з лемою 3 [1], з точністю до спряження, можна вважати, що

$$\Lambda a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix},\ \Lambda b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \Lambda b \Lambda a \Lambda b^{-1} = \begin{pmatrix} a_4 & a_3 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} a_4 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{pmatrix},$$

де $\varepsilon = \det \Lambda a$, $\varepsilon^2 = 1$, $a_3 = -\varepsilon a_2$, $(1 - \varepsilon)\, a_1 = (1 - \varepsilon)\, a_4 = 0$.

Оскільки $\overline{\Lambda} a$ - скалярна матриця, то $a_1 \in R^*$, $a_4 \in R^*$, $\varepsilon = 1$, $a_3 = -a_2$.

Нехай характеристичний многочлен $f\,(x) = x^2 - (a_1 + a_4)\, x + 1$ матриці Λa ділить двочлен $x^m - 1$ з остачею $r\,(x) = rx + r_1$, де $r,\ \ r_1$ - елементи кільця R. За теоремою Гамільтона-Келі $r\,(\Lambda a) = 0$. Тому $ra_2 = 0$ і $ra_1 + r_1 = ra_4 + r_1 = 0$. Отже, $r\,(x) = r\,(x - a_1) = r\,(x - a_4)$, де $r \in R$, $ra_2 = 0$.

Зауваження 1. *У випадку, коли* $2 \in R^*$ *,* $\overline{\Lambda} b$ *- нескалярна матриця, то з точністю до спряження, можна вважати, що*

$$\Lambda b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \Lambda a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}.$$

З рівності $(ba)^2 = 1$ *випливає, що* $a_1^2 = a_4^2$ *. Оскільки* $\overline{\Lambda} a = \pm \overline{E}$ *, то* $a_1 + a_4 \in \pm 2 + J\,(R) \subset R^*$ *,* $a_1 = a_4$ *,* $\det \Lambda a = 1$ *.*

Нехай $\alpha = a_1 = a_4$ *. Розглянемо матрицю*

$$W = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ a_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо умови при яких $(\alpha E + W)^m = E$ *, де* $W^2 = (\alpha^2 - 1)\, E$ *і* $m > 1$ *.*

За біномом Ньютона $E = \sum\limits_{i=0}^{m} C_m^i W^i \alpha^{m-i}$ *, де*

$W^i = \left(W^2\right)^{\frac{i}{2}} = \left(\alpha^2 - 1\right)^{\frac{i}{2}} E$ *, якщо* i *- парне число і*

$W^i = \left(W^2\right)^{\frac{i-1}{2}} = \left(\alpha^2 - 1\right)^{\frac{i-1}{2}} E$ *, якщо* i *- непарне число.*

Тому при $m > 1$ *і* $W^2 = (\alpha^2 - 1)\, E$ *рівність* $(\alpha E + W)^m = E$ *має місце тоді і тільки тоді, коли*

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{m} C_m^i \left(\alpha^2 - 1\right)^{\frac{i}{2}} \alpha^{m-i} = 1, \ \text{де}\, i \text{ –парні числа,} \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{m} C_m^i \left(\alpha^2 - 1\right)^{\frac{i-1}{2}} \alpha^{m-i}\right) W = 0, \ \text{де}\, i \text{ –непарні числа,} \end{cases}$$

Зокрема при $m=2$ $(\alpha E+W)^2=E$ *тоді і тільки тоді, коли* $\alpha^2=1$ *і* $W=0$ *, а при* $m=3$ $(\alpha E+W)^3=E$ *тоді і тільки тоді, коли і* $(4\alpha^2-1)W=0$ *.*

З другого боку, згідно з теоремою Гамільтона-Келі, рівність $(\alpha E+W)^m=E$, $m>1$ *має місце тоді і тільки тоді, коли тричлен* $x^2-2\alpha x+1$ *ділить двочлен* x^m-1 *з остачею* $r(x-\alpha)$, $r\in R$, $ra_2=ra_3=0$ *.*

Подібні переформулювання створюють можливість отримувати кільцеві результати без використання зображень. Сформулюємо одне з таких застосувань у кільці многочленів однієї змінної над комутативним кільцем з 1.

При $m>1$ *тричлен* $x^2-2\alpha x+1$ *ділить двочлен* x^m-1 *з остачею* $r(x-\alpha)$ *тоді і тільки тоді, коли має місце рівність*

$$\sum_{i=0}^{m} C_m^i\left(\alpha^2-1\right)^{\frac{i}{2}}\alpha^{m-i}=1,$$

де i *- парні числа.*

Теорема 2. *Нехай* $2\in J(R)$, $\overline{\Lambda}a$ *- скалярна матриця,* $m=2^lk$ *, де* k *– непарне число,* $l\geq 0$ *. Тоді* $\Lambda a^{2^l}=E$ *. Окрім цього,* $\overline{\Lambda}a=\overline{\Lambda}b=\overline{E}$ *або, з точністю до спряження,*

$$\Lambda a=\begin{pmatrix} a_1 & a_2\\ -a_2 & a_4\end{pmatrix},\quad \Lambda b=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

де $\det\Lambda a=1$ *і характеристичний многочлен* $x^2-(a_1+a_4)x+1$ *матриці* Λa *ділить двочлен* x^m-1 *з остачею* $r(x-a_1)=r(x-a_4)$, $r\in R$, $ra_2=0$ *.*

Доведення. З рівності $bab^{-1}=a^{-1}$ випливає, що $\overline{\Lambda}a^2=\overline{E}$ і, як наслідок, що $\overline{\Lambda}a=\overline{E}$. Якщо $\overline{\Lambda}b$ - скалярна матриця, то з аналогічних міркувань $\overline{\Lambda}b=\overline{E}$. Тому $\Lambda a=E+v$ і $\Lambda b=E+v_0$, де v і v_0 - матриці над $J(R)$.

Зокрема, якщо $J(R)^2=0$, то всі співвідношення між Λa і Λb виконуються автоматично. Тому у цьому випадку зображення Λ спряженням не може бути зведеним до іншого канонічного вигляду. Нехай $\overline{\Lambda}b$ - нескалярна матриця. Як і в теоремі 1, з точністю до спряження, можна вважати, що $\Lambda a=\begin{pmatrix} a_1 & a_2\\ -a_2 & a_4\end{pmatrix}$, $\Lambda b=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, де $a_1a_4+a_2^2=1$ і характеристичний многочлен $x^2-(a_1+a_4)x+1$ матриці Λa ділить двочлен x^m-1 з остачею $r(x-a_1)=r(x-a_4)$ і $ra_2=0$.

Оскільки $\Lambda a=E+v$, де v - матриця над $J(R)$, $2\in J(R)$, то $\Lambda a^2=E+v'$, де $v'=2v+v^2$ - матриця над $J(R)^2$. Якщо m - непарне число, то $\Lambda a=(\Lambda a^2)^{\frac{m+1}{2}}=(E+v')^{\frac{m+1}{2}}$. Це означає, що v - матриця над $J(R)^2$. Повторюючи аналогічні міркування доводимо, що v - матриця над $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}J(R)^n$. За теоремою Крулля ([6], стор. 406) у ньотеровому кільці, породженому елементами матриці v, із включення $1-J(R)\subset R^*$ випливає, що $v=0$, $\Lambda a=E$.

Нехай $m=2^lk$, де $l\geq 1$, k - непарне число. Зображення індукує зображення Λ' групи $D_k=\left\langle a',b\;\middle|\; a'=a^{2^l},(a')^k=b^2=1,(ba')^2=1\right\rangle$ за правилом $\Lambda'(a')=\Lambda a^{2^l}$ і $\Lambda' b=\Lambda b$. Згідно з вищедоведеним $\Lambda a^{2^l}=\Lambda'(a')=E$, $\Lambda b^2=E$. Тому $(E+v)^{2^l}=E$ і $\Lambda b^2=E$.

Зокрема, з рівності $(ba)^2=1$ випливає, що $\Lambda bv+v\Lambda b+v\Lambda bv=0$.

Безпосередніми обчисленнями встановлюємо, що якщо

$$g = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix} \in GL\left(2, R\right), \quad h = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in R_2,$$

то

$$\det g \cdot g^{-1} = \begin{pmatrix} g_4 & -g_2 \\ -g_3 & g_1 \end{pmatrix},$$

$$T_g\left(h\right) = \det g \left(ghg^{-1}\right)_{21} = -g_3^2 x_2 + g_3 g_4 \left(x_1 - x_4\right) + g_4^2 x_3.$$

У цих позначеннях зображення Λ є звідним тоді і тільки тоді, коли існує матриця $g \in GL\left(2, R\right)$ така, що $T_g\left(\Lambda a\right) = T_g\left(\Lambda b\right) = 0$.

Будемо вважати, що

$$g_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}, \text{ де } x = g_4 g_3^{-1} \text{ при } g_3 \in R^* \text{ і } g_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix},$$

де $x = g_3 g_4^{-1}$ при $g_4 \in R^*$.

Тоді $T_g\left(h\right) = -g_3^2 T_{g_0}\left(h\right)$ або $T_g\left(h\right) = -g_4^2 T_{g_0}\left(h\right)$ відповідно.

Має місце

Теорема 3. *(Критерій незвідності) Зображення Λ є незвідним тоді і тільки тоді, коли не існує елементів $x \in R$ таких, що $T_{g_0}\left(\Lambda a\right) = T_{g_0}\left(\Lambda b\right) = 0$.*

Це означає, що якщо

$$\Lambda a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \Lambda b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, g_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \text{ або } g_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix},$$

то зображення Λ є незвідним тоді і тільки тоді, коли не існує елементів $x \in R$ таких, що має місце система

$$\begin{cases} a_2 + \left(a_4 - a_1\right) x - a_3 x^2 = 0 \\ b_2 + \left(b_4 - b_1\right) x - b_3 x^2 = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a_2 x^2 + \left(a_4 - a_1\right) x - a_3 = 0 \\ b_2 x^2 + \left(b_4 - b_1\right) x - b_3 = 0 \end{cases}.$$

Підкреслимо, що критерій незвідності зображення вірний завжди. Він не залежить від випадків, пов'язаних з скалярністю або нескалярністю матриці $\overline{\Lambda} a$.

Покажемо, що якщо $\overline{\Lambda} a$ - нескалярна матриця, то даний критерій співпадає з тим, який був знайдений в [1]. Дійсно, без обмеження загальності, можна вважати, що

$$\Lambda a = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}, \Lambda b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 - \alpha b_1 & -\varepsilon b_1 \end{pmatrix},$$

де $\left(1 - \varepsilon\right) \alpha = 0$, $\varepsilon^2 = 1$, $\left(1 - \varepsilon\right) b_1 b_2 = 0$, $b_1^2 + b_2^2 - \alpha b_1 b_2 = 1$.

Якщо Λ – звідне зображення, то згідно з критерієм

$$\begin{cases} -\varepsilon + \alpha x - x^2 = 0 \\ b_2 - \left(1 + \varepsilon\right) b_1 x - \left(b_2 - \alpha b_1\right) x^2 = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} -\varepsilon x^2 + \alpha x - 1 = 0 \\ b_2 x^2 - \left(1 + \varepsilon\right) b_1 x - \left(b_2 - \alpha b_1\right) = 0 \end{cases}.$$

В обох випадках $\varepsilon = x\left(\alpha - x\right)$ і, як наслідок, $\left(1 - x^2\right)\left(\varepsilon b_2 - x b_1\right) = 0$ або $\left(1 - x^2\right)\left(x b_2 - \varepsilon b_1\right) = 0$ відповідно. Якщо $\varepsilon b_2 - x b_1 \in J\left(R\right)$, то $b_2 \in \varepsilon x b_1 + J\left(R\right)$, $b_1^2\left(1 + x^2 - \alpha x\right) \in 1 + J\left(R\right)$, $b_1^2\left(1 - \varepsilon\right) \in 1 + J\left(R\right)$, $b_2 = 0$, $b_1 \in J\left(R\right)$ що протирічить включенню $\Lambda b \in GL\left(2, R\right)$. Тому $\varepsilon b_2 - x b_1 \in R^*$ і $x^2 = 1$. Аналогічно $x b_2 - \varepsilon b_1 \in R^*$ і $x^2 = 1$. Отже, із звідності зображення Λ випливає, що $\varepsilon = x\left(\alpha - x\right)$ і $x^2 = 1$. Навпаки очевидно.

Застосуємо отриманий критерій незвідності до зображень теорем 1 і 2. Згідно з ним, з точністю до спряження

якщо Λa і Λb – діагональні матриці, то очевидно, що Λ – звідне зображення;

якщо $\Lambda a = E + v$, $\Lambda b = E + v_0$, де v і v_0 – матриці над $J(R)$, то Λ - незвідне зображення тоді і тільки тоді, коли не існує елементів $x \in R$ таких, що

$$T_{g_0}(v) = T_{g_0}(v_0) = 0;$$

якщо $a_3 = -a_2$, $b_1 = b_4 = 0$, $b_2 = b_3 = 1$ і Λ – звідне зображення, то $x^2 = 1$ і $2a_2 = x(a_1 - a_4)$ і навпаки. Тому Λ – незвідне зображення тоді і тільки тоді, коли не існує квадратних коренів із одиниці x таких, що $2a_2 = x(a_1 - a_4)$.

Нехай Λ_1 і Λ_2 - зображення групи $D_m, m > 1$ у групу $GL(2, R)$. За означенням зображення Λ_1 і Λ_2 еквівалентні, якщо існує матриця

$$g = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix} \in GL(2, R)$$

така, що $g\Lambda_1 a g^{-1} = \Lambda_2 a$, $g\Lambda_1 b g^{-1} = \Lambda_2 b$.

Якщо $g_1 \in J(R)$ або $g_4 \in J(R)$, то $g_2 \in R^*$ і $g_3 \in R^*$. Покладемо $x = g_1 g_2^{-1}$, $y = g_4 g_3^{-1}$. В протилежному випадку $g_1 \in R^*$ і $g_4 \in R^*$, $x = g_2 g_1^{-1}$, $y = g_3 g_4^{-1}$. Тому

$$g = \begin{pmatrix} g_2 & 0 \\ 0 & g_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix} \text{ або } g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} \text{ відповідно.}$$

З'ясуємо умови при яких зображення Λ_1 і Λ_2 , які описані в теоремах 1 і 2, є еквівалентними. Зрозуміло, що еквівалентність зображень може розглядатися лише при однакових умовах на кільце R, а також при однакових, з точністю до спряження, виглядах матриць $\Lambda_1 a$ і $\Lambda_2 a$, $\Lambda_1 b$ і $\Lambda_2 b$ відповідно.

Тому $\Lambda_1 a$ або $\Lambda_1 b$ - скалярні матриці тоді і тільки тоді, коли $\Lambda_2 a$ або $\Lambda_2 b$ - також скалярні матриці відповідно.

Отже, при $\Lambda_1 a = \pm E + v$ і $\Lambda_1 b = \pm E + v_0$, де v і v_0 - матриці над $J(R)$, зображення Λ_1 і Λ_2 еквівалентні тоді і тільки тоді, коли $\Lambda_2 a = \pm E + v'$ і $\Lambda_2 b = \pm E + v'_0$ відповідно, де v' і v'_0 - матриці над $J(R)$ і існує матриця $g \in GL(2, R)$ така, що $gvg^{-1} = v'$ і $gv_0 g^{-1} = v'_0$.

Значить достатньо з'ясувати еквівалентність зображень Λ_1 і Λ_2 при умові, що $\overline{\Lambda_1} a$ - скалярна матриця, а $\overline{\Lambda_1} b$ - нескалярна матриця.

Нехай Λ_1 і Λ_2 - еквівалентні зображення.

Без обмеження загальності, з точністю до спряження, можна вважати, що

$$\Lambda_1 b = \Lambda_2 b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \Lambda_1 a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_4 \end{pmatrix}, \ \Lambda_2 a = \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 \\ -a'_2 & a'_4 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\Lambda_2 = i_g \Lambda_1$, де $g \in GL(2, R)$, то g - комутує з $\Lambda_1 b = \Lambda_2 b$ і $g\Lambda_1 a = \Lambda_2 a g$. Тому, з точністю до спряження, з еквівалентності зображень Λ_1 і Λ_2 випливають рівності $g_1 = g_4$, $g_2 = g_3$, $x = y = t$.

Це означає, що зображення Λ_1 і Λ_2 еквівалентні тоді і тільки тоді, коли, з точністю до спряження, має місце рівність $g\Lambda_1 a = \Lambda_2 a g$, де $1 - t^2 \in R^*$,

$$g = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \text{ або } g = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

Об'єднаємо всі одержані результати. Отримаємо повне описання зображень групи діедра $D_m, m > 1$ у групу $GL(2, R)$ над комутативним локальним кільцем з 1.

Загальний вигляд зображень

Теорема 4. *(Основна теорема) Нехай R - комутативне локальне кільце з 1, $J(R)$ - радикал R, $\Lambda_{J(R)} : GL(2, R) \to GL\left(2, R/_{J(R)}\right)$ – гомоморфізм, інду-*

кований гомоморфізмом $\Lambda_{J(R)} : R \to {}^{R}\!/_{J\,(R)}$, $D_m = \left\langle a, b \;\middle|\; a^m = b^2 = (ba)^2 = 1 \right\rangle$ *– група діедра,* Λ *– зображення групи* $D_m, m > 1$ *у групу* $GL\,(2, R)$, $\overline{\Lambda} = \Lambda_{J(R)}\Lambda$, $f\,(x) = x^2 - tr\Lambda ax + \det \Lambda a$ *- характеристичний многочлен матриці* Λa *. Тоді* $\overline{\Lambda}a = \pm\overline{E}$, $\overline{\Lambda}b = \pm\overline{E}$ *або, з точністю до спряження,*

$$\Lambda a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\varepsilon a_2 & a_4 \end{pmatrix},\ \Lambda b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda a^{\delta},$$

де $\varepsilon = \det \Lambda a$, $\varepsilon^2 = 1$, $(1-\varepsilon)\,a_1 = (1-\varepsilon)\,a_4 = 0$, $\delta = 0; 1$, *а* $f\,(x)$ *ділить* $x^m - 1$ *з остачею* $r\,(x - a_1) = r\,(x - a_4)$, *де* $r \in R$, $ra_2 = 0$.

Зокрема, якщо $\overline{\Lambda}a$ *- нескалярна матриця, то* $r = 0$.

Ескіз доведення

1) Нехай $\overline{\Lambda}b$ - нескалярна матриця. Тоді, з точністю до спряження,

$$\Lambda b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Із визначальних співвідношень групи діедра $D_m, m > 1$ випливає, що $\varepsilon^2 = 1$, $a_2^2 + a_1 a_4 = a_3^2 + a_1 a_4 = 1$, $a_1\,(a_2 + a_3) = a_4\,(a_2 + a_3) = 0$, $(1-\varepsilon)\,a_1 = (1-\varepsilon)\,a_4 = 0$, $a_3 = -\varepsilon a_2$, характеристичний многочлен $x^2 - tr\Lambda ax + \det \Lambda a$ матриці Λa ділить двочлен $x^m - 1$ з остачею $r\,(x - a_1) = r\,(x - a_4)$, де $\varepsilon = \det \Lambda a$, $r \in R$ і $ra_2 = ra_3 = 0$.

Тим самим доведено, що

$$\Lambda b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\varepsilon a_2 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Зокрема, якщо $\overline{\Lambda}a$ - скалярна матриця, то $a_1 \in R^*$, $a_4 \in R^*$, $\varepsilon = 1$, $a_3 = -a_2$, $\det \Lambda a = 1$. Якщо $\overline{\Lambda}a$ - нескалярна матриця, то з рівностей $r\,(a_1 - a_4) = ra_2 = ra_3 = 0$ випливає, що $r = 0$, тобто, що тричлен $x^2 - tr\Lambda ax + \det \Lambda a$ ділить без остачі двочлен $x^m - 1$. 2) Нехай $\overline{\Lambda}b$ - скалярна і $\overline{\Lambda}a$ - нескалярна матриці. Тоді $\overline{\Lambda}ba^{-1}$ - нескалярна матриця і, згідно з попереднім випадком, з точністю до спряження,

$$\Lambda b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda a, \quad \Lambda a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\varepsilon a_2 & a_4 \end{pmatrix},$$

де $\varepsilon = \det \Lambda a$, $\varepsilon^2 = 1$, $(1-\varepsilon)\,a_1 = (1-\varepsilon)\,a_4 = 0$, тричлен $x^2 - tr\Lambda ax + \det \Lambda a$ ділить без остачі двочлен $x^m - 1$.

Зокрема, якщо $2 \in R^*$, то $\Lambda b = \pm E$ і, з точністю до спряження,

$$\Lambda a = \pm \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Нехай $\overline{\Lambda}b$ і $\overline{\Lambda}a$ - скалярні матриці. Тоді $\overline{\Lambda}b = \pm\overline{E}$ і $\overline{\Lambda}a = \pm\overline{E}$.

Зокрема, якщо $2 \in J\,(R)$, то $\Lambda a = E + v$, $\Lambda b = E + v_0$, де v і v_0 - матриці над $J\,(R)$ такі, що $2v_0 + v_0^2 = 0$, $(E + v)^m = E$,

$$0 = v\Lambda b + \Lambda bv + v\Lambda bv = 2v + v^2 + vv_0 + v_0 v + vv_0 v.$$

Якщо $2 \in R^*$, то $\Lambda a = \pm E$ і $\Lambda b = \pm E$.

Підкреслимо, що при $2 \in R^*$ згідно з доведеним у випадках 1) - 3), з точністю до спряження, Λa і $\Lambda b = \pm E$ - діагональні матриці з плюс, мінус одиницями на діагоналях або

$$\Lambda a=\begin{pmatrix}0&-1\\1&\alpha\end{pmatrix},\quad \Lambda b=\pm\begin{pmatrix}-1&0\\\alpha&1\end{pmatrix},\text{ якщо }\overline{\Lambda}a\text{ - нескалярна матриця}$$
$$\text{або }\Lambda a=\begin{pmatrix}a_1&a_2\\-a_2&a_4\end{pmatrix},\ \Lambda b=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\text{ якщо }\overline{\Lambda}a\text{ - скалярна матриця}$$

і в останніх двох випадках характеристичний многочлен $x^2-tr\Lambda ax+\det\Lambda a$ матриці Λa ділить двочлен x^m-1 без остачі, якщо $\overline{\Lambda}a$ - нескалярна матриця і з остачею $r(x-a_1)=r(x-a_4)$, $ra_2=0$, якщо $\overline{\Lambda}a$ - скалярна матриця.

Незвідність зображень

Питання незвідності двомірних зображень групи діедра $D_m, m>1$ над комутативними локальими кільцями з 1 повністю розв'язує

Теорема 5. *(Критерій незвідності) Нехай $\Lambda : D_m \to GL(2,R)$ - зображення групи $D_m, m>1$ у групу $GL(2,R)$. Зображення Λ є незвідним тоді і тільки тоді, коли не існує елементів $x\in R$ таких, що*
$$\left(g_0\Lambda a g_0^{-1}\right)_{21}=\left(g_0\Lambda b g_0^{-1}\right)_{21}=0,\text{ де } g_0=\begin{pmatrix}0&1\\1&x\end{pmatrix}\text{ або } g_0=\begin{pmatrix}1&0\\x&1\end{pmatrix}.$$

Згідно з цим критерієм зображення Λ є незвідним тоді і тільки тоді, коли не існує елементів $x\in R$ таких, що у випадках 1) і 2) мають місце рівності $x^2=1$ і $a_1-a_4=(1+\varepsilon)xa_2$.

У випадку 3), тобто коли $\Lambda a=\pm E+v$, $\Lambda b=\pm E+v_0$, де v і v_0 - матриці над $J(R)$, зображення Λ є незвідним тоді і тільки тоді, коли пара матриць v і v_0 є незвідною.

Еквівалентність зображень

Нехай Λ_1 і Λ_2 - зображення групи $D_m, m>1$ у групу $GL(2,R)$. Зображення Λ_1 і Λ_2 можуть бути еквівалентними тільки в тому випадку, коли вони обидва належать одному з типів зображень 1) - 3) і характеристичні многочлени образів відповідних елементів співпадають.

Якщо Λ_1 і Λ_2 мають вигляд зображень 1) або 2), то, з точністю до спряження, можна вважати, що
$$\Lambda_1 a=\begin{pmatrix}a_1&a_2\\-\varepsilon_1 a_2&a_4\end{pmatrix},\ \Lambda_1 b=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\Lambda_1 a^{\delta},$$
$$\Lambda_2 a=\begin{pmatrix}a_1'&a_2'\\-\varepsilon_2 a_2'&a_4'\end{pmatrix},\ \Lambda_2 b=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\Lambda_2 a^{\delta},$$
де $\delta=0;1$ відповідно, $\varepsilon_1=\det\Lambda_1 a$, $\varepsilon_2=\det\Lambda_2 a$.

Якщо Λ_1 і Λ_2 мають вигляд зображення 3), то при $2\in J(R)$
$$\Lambda_1 a=E+v,\ \Lambda_1 b=E+v_0,$$
$$\Lambda_2 a=E+v',\ \Lambda_2 b=E+v_0'$$
або при $2\in R^*$ матриці $\Lambda_1 a$, $\Lambda_1 b$, $\Lambda_2 a$, $\Lambda_2 b$ належать $\{\pm E\}$.

Теорема 6. *(Критерій еквівалентності) Зображення Λ_1 і Λ_2, які мають вигляд 1) або 2), еквівалентні тоді і тільки тоді, коли $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$ і існує матриця $g\in GL(2,R)$ така, що*
$$g\begin{pmatrix}a_1&a_2\\-\varepsilon a_2&a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1'&a_2'\\-\varepsilon a_2'&a_4'\end{pmatrix}g,\text{ де } g=\begin{pmatrix}1&t\\t&1\end{pmatrix}\text{ або } g=\begin{pmatrix}t&1\\1&t\end{pmatrix},$$
$1-t^2\in R^*$, $(1-\varepsilon)a_1=(1-\varepsilon)a_4=(1-\varepsilon)a_1'=(1-\varepsilon)a_4'=0$ *і характе-*

ристичний многочлен матриць $\Lambda_1 a$ *і* $\Lambda_2 a$ *ділить двочлен* $x^m - 1$ *з остачею* $r(x-a_1) = r(x-a_4) = r(x-a_1') = r(x-a_4')$ *, де* $r \in R$ *,* $ra_2 = ra_2' = 0$*. Зображення* Λ_1 *і* Λ_2*, які мають вигляд 3), еквівалентні тоді і тільки тоді, коли існує матриця* $g \in GL(2,R)$ *така, що* $gvg^{-1} = v'$ *і* $gv_0g^{-1} = v_0'$ *або* $\Lambda_1 a = \Lambda_2 a = \pm E$ *і* $\Lambda_1 b = \Lambda_2 b = \pm E$ *.*

1. *Петечук Ю.В.* Двовимірні зображення груп дієдра над комутативними локальними кільцями. Частина 1. // Наук. вісник Ужгородського ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2009. – Вип. 19.
2. *КэртисЧ., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. – Москва: Наука, 1969. – 668 с.
3. *Гудивок П.М.* Представления конечных групп над коммутативными локальными кольцами. – Ужгород: Ужгородский национальный университет, 2003. – 119 с.
4. *Бондаренко В.М., Дрозд Ю.А.* Представленческий тип конечных групп // Записки науч. семинаров Ленингр. отд. мат. ин-та АН СССР. – 1977. – №71. –С. 24-41.
5. *Тилищак О.А.* Зображення 2-го степеня групи діедра порядку $2p$ над деякими комутативними локальними кільцями // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2008. – Вип. 16. – С. 188-192.
6. *Мерзляков Ю.И.* Рациональные группы. – Москва: Наука, 1980. – 464с.

Одержано 18.10.2010