УДК 519.21

Т. В. Боярищева, І. Й. Поляк (Ужгородський нац. ун-т)

ОЦІНКА БЛИЗЬКОСТІ ЩІЛЬНОСТЕЙ РОЗПОДІЛІВ ДВОХ СУМ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

The paper contains estimate of approximation density of two sums random variables.

Робота містить оцінку близькості щільностей розподілів двох сум випадкових величин.

У розділі "Граничні теореми теорії ймовірностей" вивчаються як питання швидкості збіжності до граничних законів розподілу, так і досліджуються різноманітні характеристики, з допомогою яких отримуються результати. Дуже поширеним методом дослідження швидкості збіжності у граничних теоремах є використання псевдомоментів різного виду, що було запропоноване ще В. М. Золотарьовим [1]. У даній роботі здійснюється загальна оцінка близькості щільностей розподілів двох сум незалежних випадкових величин. При цьому умови, що накладені на одну з послідовностей випадкових величин, дають змогу досліджувати швидкість збіжності до стійкого закону в локальній граничній теоремі. Також є можливість отримати результати, що виражаються через конкретні псевдомоменти, зокрема, використані в [2]. У дослідженні використовуються деякі ідеї з [3].

Нехай $\xi_1, \dots \xi_n, \dots$ і $\eta_1, \dots \eta_n, \dots$ – дві послідовності незалежних випадкових величин відповідно з функціями розподілу $F_i(x)$ і $G_i(x)$; характеристичними функціями $f_i(t)$ і $g_i(t)$; $p_n(x)$ і $q_n(x)$ – відповідно щільності випадкових величин $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ і $\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i$, а $H_i(x) = F_i(x) - G_i(x)$.

Розглянемо наступні умови: існує число $\alpha \in (0, 2]$ і стала $\lambda > 0$ такі, що

$$|g_k(t)| \le e^{-\lambda |t|^\alpha}; \tag{1}$$

$$\mu_{ik} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k dH_i(x) = 0 \ (i = 1, 2, \dots, k = 0, 1, m), \tag{2}$$

де $\begin{cases} 1, & \alpha \le 1, \\ 2, & \alpha > 1. \end{cases}$

Введемо псевдомоменти

$$\chi_i = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^\alpha |H_i(x)| dx;$$

$$\chi_{i0} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \max(1, |x|^\alpha) |H_i(x)| dx;$$

$$\nu_{i0} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \max(1, |x|^{\alpha+1} |dH_i(x)|;$$

$$\chi = \max(\chi_1, \dots, \chi_n), \ \chi_0 = \max(\chi_{10}, \dots, \chi_{n0}), \ \nu_0 = \max(\nu_{10}, \dots, \nu_{n0}).$$

Лема 1. *Нехай виконується умова* (2). *Тоді для будь-якого дійсного* t *виконується нерівність*

$$\omega_i(t) = |f_i(t) - g_i(t) \le$$

$$\le \min\left\{\nu_{i0} \min\left(1, \frac{2^{1-\delta}}{m(m+1)^\delta}|t|^{\alpha+1}\right), \chi_{i0} \min\left(|t|, \frac{2^{1-\delta}}{m^\delta}|t|^{\alpha+1}\right), \chi_i \frac{2^{1-\delta}}{m^\delta}|t|^{\alpha+1}\right\}, \quad (3)$$

де $\delta = \alpha + 1 - m$.

Лема 2. *Нехай для всіх* t *виконується умова* (1), *а також існує стала* θ_k *така, що*

$$\omega_k(t) = |f_k(t) - g_k(t)| \le \theta_k \min\left(R|t|^{\alpha+1}, |t|^s\right), \ \textit{де } s \in [0, \alpha+1], R > 0, k \in N.$$

Позначимо $\theta = \max\limits_{1 \le k \le n} \theta_k$ *і розглянемо*

$$c \in \left(0, \min\left\{e^{-\lambda}, e^{-\frac{2}{\alpha}}, \max\left\{x : \frac{\lambda}{2} - R\sqrt{x}\left(-\lambda^{-1}\ln x\right)^{\frac{1}{\alpha}} > 0, \ \lambda - e^\lambda R x > 0\right\}\right\}\right).$$

Якщо $\theta \le c$, *то при* $|t| \le T_1 = (-\lambda^{-1} \ln \theta)^{\frac{1}{\alpha}}$ *справедлива нерівність*

$$|f_i(t)| \le e^{-c_1|t|^\alpha}, \quad (4)$$

де $c_1 = \frac{\lambda}{2} - R\sqrt{c}\,(-\lambda^{-1}\ln c)^{\frac{1}{\alpha}} > 0$.

А при $|t| > T_1$

$$|f_i(t)| \le 2\theta|t|^s. \quad (5)$$

Якщо ж $\theta > c$ *і* $|t| \le T_2 = \frac{c}{\theta}$, *тоді*

$$|f_i(t)| \le e^{-c_2|t|^\alpha}, \quad (6)$$

де $c_2 = \lambda - e^\lambda R c > 0$.

Детальне доведення лем 1 і 2 наведено у [2].

Теорема 1. *Нехай* $n \ge 2$ *і*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f_k(t)|dt = A < +\infty. \quad (7)$$

Тоді

$$\sup_x |p_n(x) - q_n(x)| \le C\frac{\theta}{n^{\frac{1}{\alpha}}} + \frac{A}{2\pi}\prod_{k=1}^{n-1} b_k,$$

де $b_k = \sup\limits_{|t|>T_l} |f_k(t)|$, $l = \begin{cases} 1, & \theta \le c, \\ 2, & \theta > c. \end{cases}$

Доведення. Нехай $n \ge 2$. Із умови (7) випливає, що існує щільність $p_n(x)$:

$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\prod_{k=1}^{n} f_k(t)dt, \ \ q_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\prod_{k=1}^{n} g_k(t)dt.$$

Тоді

$|p_n(x)-q_n(x)| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\prod\limits_{k=1}^{n} f_k(t)-\prod\limits_{k=1}^{n} g_k(t)\right| dt \le$

$\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|\le T_l}\left|\prod\limits_{k=1}^{n} f_k(t)-\prod\limits_{k=1}^{n} g_k(t)\right| dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|>T_l}\left|\prod\limits_{k=1}^{n} f_k(t)\right| dt + \int\limits_{|t|>T_l}\left|\prod\limits_{k=1}^{n} g_k(t)\right| dt =$

$= I_1 + I_2 + I_3.$

Використаємо нерівність

$$\left|\prod_{k=1}^{n} a_k - \prod_{k=1}^{n} b_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k| \prod_{j=1}^{k-1} |b_j| \prod_{j=k+1}^{n} |a_j|,$$

у якій покладемо $a_k = f_k(t)$, $b_k = g(t)$. Тоді при $|t| \le T_l$ з урахуванням (4) і (6)

$$\left|\prod_{k=1}^{n} f_k(t) - \prod_{k=1}^{n} g_k(t)\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f_k(t)-g_k(t)| \prod_{j=1}^{k-1} |g_j(t)| \prod_{j=k+1}^{n} |f_j(t)| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \omega_k(t) \prod_{j=1}^{k-1} e^{-\lambda|t|^\alpha} \prod_{j=k+1}^{n} e^{-c_m|t|^\alpha} \le \sum_{k=1}^{n} \theta_k R|t|^{\alpha+1} e^{-\lambda|t|^\alpha(k-1)} e^{-c_m|t|^\alpha(n-k+1)} \le$$

$$\le \theta R n |t|^{\alpha+1} e^{-c_m|t|^\alpha(n-1)}.$$

Оцінимо кожний із одержаних інтегралів окремо.

$$I_1 \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|\le T_l}\left|\prod_{k=1}^{n} f_k(t) - \prod_{k=1}^{n} g_k(t)\right| dt \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|\le T_l} \theta R n |t|^{\alpha+1} e^{-t^2\sigma^2(n-1)c_l} dt \le$$

$$\le \frac{n\theta R}{\pi}\int\limits_{0}^{T_l} |t|^{\alpha+1} e^{-c_l|t|^\alpha(n-1)} dt \le \frac{\theta R}{\pi\alpha c_l^{1+\frac{2}{\alpha}} n^{\frac{2}{\alpha}}}\int\limits_{0}^{\infty} z^{\frac{2}{\alpha}} e^{-z} dz \le \frac{\theta}{n^{\frac{2}{\alpha}}} C_3. \tag{8}$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|>T_l}\prod_{k=1}^{n} |f_k(t)|\, dt = \frac{1}{2\pi}\sup_{|t|>T_l}\prod_{k=1}^{n-1} |f_k(t)| \int\limits_{|t|>T_l} f_n(t) dt \le \frac{A}{2\pi}\prod_{k=1}^{n-1} b_k. \tag{9}$$

Інтеграл I_3 оцінюватимемо окремо у двох випадках: $\theta \le c$ і $\theta > c$.

Нехай $\theta \le c$ $(l = 1)$.

$$I_3 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|>T_1}\left|\prod_{k=1}^{n} g_k(t)\right| dt \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|>T_1} e^{-\lambda n|t|^\alpha} dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{T_1}^{\infty} e^{-\lambda n|t|^\alpha} dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\lambda n T_1^\alpha}^{\infty} e^{-z} z^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dz \le$$

$$\le \frac{1}{\pi(\lambda n)^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\lambda n T^{\alpha_1}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} e^{-\lambda n T^{\alpha_1}} = \frac{T_1^{1-\alpha}}{\pi\lambda n} e^{-\lambda n\left(-\frac{1}{\lambda}\ln\theta\right)^{\frac{1}{\alpha}\alpha}} = \frac{\left(-\frac{1}{\lambda}\ln\theta\right)^{1-\alpha}}{\pi\lambda n}\theta^n \le \frac{\theta c_4}{n^{\frac{1}{\alpha}}}. \tag{10}$$

Нехай $\theta > c$ $(l = 2)$. Тоді

$$I_3 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|>T_2}\left|\prod_{k=1}^{n} g_k(t)\right| dt \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{T_2}^{\infty} e^{-\lambda n|t|^\alpha} dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\lambda n T_2^\alpha}^{\infty} e^{-z} \frac{z^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{\alpha(\lambda n)^{\frac{1}{\alpha}}} dz =$$

$$= \frac{1}{\pi\alpha\,(\lambda n)^{\frac{1}{\alpha}}} \int\limits_{\lambda n T_2^{\alpha}}^{\infty} e^{-z} z^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dz \le \frac{1}{\pi\alpha\,(\lambda n)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\lambda n T_2^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-z} z^{\frac{2}{\alpha}-1} dz =$$

$$= \frac{1}{\pi\alpha\,(\lambda n)^{\frac{1}{\alpha}+1} \left(\frac{c}{\theta}\right)} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-z} z^{\frac{2}{\alpha}-1} dz \le \frac{\theta c_5}{n^{\frac{1}{\alpha}}}. \qquad (11)$$

Із (8)–(11) випливає твердження теореми.

Наслідок 1. *Нехай* $n \ge 2$ *і виконуються умови* (8) *і* (11). *Тоді*

$$\sup_x |p_n(x) - q_n(x)| \le \frac{C}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \min\{\nu_0, \chi, \chi_0\} + \frac{A}{2\pi} \prod_{k=1}^{n-1} b_k.$$

Доведення безпосередньо випливає із того факту, що при $s = 0$ в умові леми 2 можна покласти $\theta_k = \nu_{0k}$, при $s = 1$ – $\theta_k = \chi_{0k}$, а при $s = \alpha + 1$ – $\theta_k = \chi_k$.

1. *Золотарев В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. – М.: Наука. – 1986. – 416 с.
2. *Боярищева Т. В., Слюсарчук П. В.* Оцінка близькості розподілів двох сум для різно розподілених випадкових величин // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2001. – Вип. 6. – С. 4–8.
3. *Боярищева Т. В.* Оцінка швидкості збіжності в локальній граничній теоремі для щільності у випадку різно розподілених випадкових величин // VIII Міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука: Тези доповідей. – Київ, 2000. – С. 413.

Одержано 29.04.2011