УДК 512.44

Т. С. Гапак (Ужгородський нац. ун-т)

ЗАСТОСУВАННЯ АНАЛОГУ ФОРМУЛИ ЕЙЛЕРА-МІНДІНГА ДЛЯ ДВОВИМІРНИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ

Finding estimates for the remainder of two-dimensional interpolation continued fractions.

Знаходження оцінок залишкового члена для двовимірних інтерполяційних ланцюгових дробів.

Вступ. Формули Ейлера–Міндінга визначають вигляд узагальнених многочленів чисельника та знаменника підхідного дробу звичайного ланцюгового дробу через частинні чисельники та знаменники цього ланцюгового дробу [1]. Доведення, яке наведено в монографії О. Перона, ґрунтується на прямому рекурентному алгоритмові. Формули Ейлера–Міндінга також можна отримати, якщо скористатися оберненим рекурентним алгоритмом [5]. У даній роботі на основі аналогу оберненого рекурентного алгоритму встановлено аналог формул Ейлера–Міндінга для двовимірних ланцюгових дробів та отримані оцінки залишкових членів при інтерполяції функції двох дійсних змінних деякими типами двовимірних ланцюгових дробів.

Аналог формули Ейлера–Міндінга для двовимірних ланцюгових дробів. Нехай маємо скінчений двовимірний функціональний ланцюговий дріб (ДФЛД) виду

$$D_n(x,y)=\Phi_0^n(x,y)+\mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{n}\frac{a_{ii}(x,y)}{\Phi_i^n(x,y)}, \qquad (1)$$

де $\Phi_i^n(x,y)=b_{ii}(x,y)+\mathop{\mathrm{K}}\limits_{j=i+1}^{n}\dfrac{a_{ji}(x,y)}{b_{ji}(x,y)}+\mathop{\mathrm{K}}\limits_{j=i+1}^{n}\dfrac{a_{ij}(x,y)}{b_{ij}(x,y)}$,
$a_{ij}(x,y)\neq 0,\ b_{ij}(x,y),\ i,j=0,1,\ldots,n$ — неперервні функції двох змінних в деякій області $G\subset\mathbb{R}^2$.

Якщо скористатись аналогом оберненого рекурентного алгоритму для двовимірних ланцюгових дробів [2, 4], можна поставити у відповідність ДФЛД (1) відношення двох узагальнених многочленів, тобто $D_n(x,y)=P_n(x,y)/Q_n(x,y)$.

Позначимо через

$$\frac{P_k^n(x,y)}{Q_k^n(x,y)}=\Phi_k^n(x,y)+\mathop{\mathrm{K}}_{i=k+1}^{n}\frac{a_{ii}(x,y)}{\Phi_i^n(x,y)},\ k=0,1,\ldots,n,$$

k–й залишок, тобто, k–й "хвіст" ДФЛД (1). Має місце рекурентне співвідношення

$$\frac{P_k^n(x,y)}{Q_k^n(x,y)}=\Phi_k^n(x,y)+a_{k+1k+1}(x,y)\Bigg/\frac{P_{k+1}^n(x,y)}{Q_{k+1}^n(x,y)},\ k=n-1,n-2,\ldots,0, \qquad (2)$$

де $P_n^n(x)=b_{nn}(x,y),\ Q_n^n(x,y)=1,\ \Phi_n^n(x,y)=b_{nn}$.
Тоді $P_n(x,y)=P_0^n(x,y),\ Q_n(x,y)=Q_0^n(x,y)$.

Із (2) випливає, що $P_k^n(x,y)$ та $Q_k^n(x,y)$ задовольняють наступні рекурентні співвідношення

$$P_k^n(x,y) = \Phi_k^n(x,y)P_{k+1}^n(x,y) + a_{k+1k+1}(x,y)\cdot Q_{k+1}^n(x,y),\ Q_k^n(x,y) = P_{k+1}^n(x,y). \quad (3)$$

При $k = n-1$ маємо

$$P_{n-1}^n(x,y) = \Phi_{n-1}^n(x,y)b_{nn}(x,y) + a_{nn}(x,y) =$$

$$= \Phi_{n-1}^n(x,y)\Phi_n^n(x,y)\left(1 + \frac{a_{nn}(x,y)}{\Phi_{n-1}^n(x,y)\Phi_n^n(x,y)}\right),$$

$$Q_{n-1}^n(x,y) = b_{nn}(x,y) = \Phi_n^n(x,y).$$

При $k = n-2$ маємо

$$P_{n-2}^n(x,y) = \Phi_{n-2}^n\left(\Phi_{n-1}^n(x,y)b_{nn}(x,y) + a_{nn}(x,y)\right) + a_{n-1n-1}(x,y)\Phi_n^n(x,y) =$$

$$= \Phi_{n-2}^n(x,y)\Phi_{n-1}^n(x,y)\Phi_n^n(x,y)\left(1 + \frac{a_{nn}(x,y)}{\Phi_{n-1}^n(x,y)\Phi_n^n(x,y)} + \frac{a_{n-1n-1}(x,y)}{\Phi_{n-2}^n(x,y)\Phi_{n-1}^n(x,y)}\right),$$

та

$$Q_{n-2}^n(x,y) = \Phi_{n-1}^n(x,y)b_{nn}(x,y) + a_{nn}(x,y) =$$

$$= \Phi_{n-1}^n(x,y)\Phi_n^n(x,y)\left(1 + \frac{a_{nn}(x,y)}{\Phi_{n-1}^n(x,y)\Phi_n^n(x,y)}\right).$$

Скориставшись методом повної математичної індукції із (3), аналогічно як в [3,5] для випадку ланцюгових дробів, можна отримати наступні співвідношення

$$\begin{aligned} P_k^n(x,y) &= A_k^n\left(1 + \sum_{i=k}^{n-1}\Psi_i + \cdots + \sum_{i_1=k}^{n+1-2\nu_k}\Psi_{i_1}\sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2\nu_k}\Psi_{i_2}\cdots\sum_{i_{\nu_k}=i_{\nu_k-1}+2}^{n-1}\Psi_{i_{\nu_k}}\right),\\ Q_k^n(x,y) &= A_{k+1}^n\left(1 + \sum_{i=k+1}^{n-1}\Psi_i + \cdots + \sum_{i_1=k+1}^{n+1-2\mu_k}\Psi_{i_1}\sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2\mu_k}\Psi_{i_2}\cdots\sum_{i_{\mu_k}=i_{\mu_k-1}+2}^{n-1}\Psi_{i_{\mu_k}}\right),\end{aligned} \quad (4)$$

де

$$A_s^n = A_s^n(x,y) = \prod_{i=s}^{n}\Phi_i^n(x,y),\quad \Psi_i = \Psi_i(x,y) = \frac{a_{i+1i+1}(x,y)}{\Phi_i^n(x,y)\cdot\Phi_{i+1}^n(x,y)},$$

$$\nu_k = \left[\frac{(n+1-k)}{2}\right], \mu_k = \left[\frac{(n-k)}{2}\right].$$

Тоді аналог формули Ейлера–Міндінга для $P_n(x,y)$ та $Q_n(x,y)$ двовимірного ланцюгового дробу відповідно має вигляд:

$$\begin{aligned} P_n(x,y) &= A_0^n\left(1 + \sum_{i=0}^{n-1}\Psi_i + \cdots + \sum_{i_1=0}^{n+1-2m_1}\Psi_{i_1}\sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2m_1}\Psi_{i_2}\cdots\sum_{i_{m_1}=i_{m_1-1}+2}^{n-1}\Psi_{i_{m_1}}\right),\\ Q_n(x,y) &= A_1^n\left(1 + \sum_{i=1}^{n-1}\Psi_i + \cdots + \sum_{i_1=1}^{n+1-2m_2}\Psi_{i_1}\sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2m_2}\Psi_{i_2}\cdots\sum_{i_{m_2}=i_{m_2-1}+2}^{n-1}\Psi_{i_{m_2}}\right),\end{aligned} \quad (5)$$

де $m_1 = [(n+1)/2]$, $m_2 = [n/2]$.

Позначимо через

$$R_{k,s}^n(x,y) = \sum_{i_1=s}^{n+1-2k} \Psi_{i_1} \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2k} \Psi_{i_2} \cdots \sum_{i_k=i_{k-1}+2}^{n-1} \Psi_{i_k},$$

де $s \in \{0,1\},\ k = 1,2,\ldots,m,\ m \in \{\nu_k, \mu_k\}$. Легко бачити, що $R_{k,s}^n(x,y)$ задовольняє співвідношення

$$R_{k,s}^n(x,y) = \sum_{i=s}^{n+1-2k} \Psi_i \cdot R_{k-1,i+2}^n(x,y), \qquad R_{0,s}^n(x,y) = 1.$$

Тепер формули (4) та (5) можуть бути записані у вигляді

$$P_k^n(x,y) = A_k^n(x,y) \cdot \sum_{i=0}^{\nu_k} R_{i,k}^n(x,y), \qquad Q_k^n(x,y) = A_{k+1}^n(x,y) \cdot \sum_{i=0}^{\mu_k} R_{i,k+1}^n(x,y), \quad (6)$$

та

$$P_n(x,y) = A_0^n(x,y) \cdot \sum_{i=0}^{m_1} R_{i,0}^n(x,y), \qquad Q_n(x,y) = A_1^n(x,y) \cdot \sum_{i=0}^{m_2} R_{i,1}^n(x,y).$$

Для подальших міркувань будемо використовувати наступну теорему з теорії ланцюгових дробів.

Теорема 1 (Слешинського–Прінгсгейма [8]). *Ланцюговий дріб* $\underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} a_k/b_k$ *з комплексними елементами збігається, якщо* $|\, b_k \,| \geqslant |\, a_k \,| + 1,\ k = 1,2,\ldots$. *Для всіх n-х наближень виконується нерівність* $|\, f_n \,| < 1,\ n = 1,2,\ldots$

Лема 1. *Нехай частинні чисельники $a_{ij}(x,y)$ та знаменники $b_{ij}(x,y)$ ДФЛД (1) для всіх значень $(x,y) \in G$ задовольняють нерівності*

$$|a_{ji}(x,y)| \leqslant d,\ |b_{ji}(x,y)| \geqslant d+1,\ i,j = 0,1,\ldots,n, j \neq i, \quad (7)$$

$$\gamma \leqslant |a_{ii}(x,y)| \leqslant d^2,\ d^2+3 \leqslant |b_{ii}(x,y)| \leqslant \beta,\ i = 0,1,\ldots,n,$$

де d, γ, β деякі сталі. Тоді

$$d^2 + 1 \leqslant |\Phi_i^n| \leqslant \beta + 2.$$

Доведення. Оцінимо Φ_i^n по модулю

$$|\Phi_i^n| = \left| b_{ii}(x,y) + \underset{j=i+1}{\overset{n}{\mathrm{K}}} \frac{a_{ji}(x,y)}{b_{ji}(x,y)} + \underset{j=i+1}{\overset{n}{\mathrm{K}}} \frac{a_{ij}(x,y)}{b_{ij}(x,y)} \right| \geqslant$$

$$\geqslant |b_{ii}(x,y)| - \left| \underset{j=i+1}{\overset{n}{\mathrm{K}}} \frac{a_{ji}(x,y)}{b_{ji}(x,y)} \right| - \left| \underset{j=i+1}{\overset{n}{\mathrm{K}}} \frac{a_{ij}(x,y)}{b_{ij}(x,y)} \right|.$$

Тоді, згідно теореми 1, отримаємо $\Phi_i^n \geqslant d^2+1$. Нерівність $|\Phi_i^n| \leqslant \beta+2$ очевидна.

Лема 2. *Нехай частинні чисельники* $a_{ij}(x,y)$ *та знаменники* $b_{ij}(x,y)$ *ДФЛД (1) задовольняють умови леми 1. Тоді*

$$\left|R^n_{k,s}(x,y)\right| \leqslant \rho^k \cdot C^k_{n+1-s-k}, \tag{8}$$

де $\rho = d^2/(d^2+1)^2,\ k = 1,2,\ldots,m,\ s \in \{0,1\},\ m \in \{\nu_k, \mu_k\}$.

Доведення. Скористаємося методом повної математичної індукції. Нехай $k = 1$. У цьому випадку

$$R^n_{1,s}(x,y) = \sum_{i=s}^{n-1} \Psi_i = \sum_{i=s}^{n-1} \frac{a_{i+1i+1}(x,y)}{\Phi^n_i(x,y)\cdot\Phi^n_{i+1}(x,y)},$$

згідно твердженням леми 1 маємо, що $|\Psi_i| \leqslant \rho$, а тоді $\left|R^n_{1,s}(x,y)\right| \leqslant \rho\cdot C^1_{n-s}$. Отже, твердження вірне при $k = 1$. Припустимо, воно виконується для всіх $k = 1,2,\ldots,l-1$. При $k = l$ отримуємо, що

$$R^n_{l,s}(x,y) = \sum_{i=s}^{n+1-2l} \Psi_i \cdot R^n_{l-1,i+2}(x,y).$$

Тоді з припущенням індукції та умовами леми маємо, що

$$\left|R^n_{l,s}(x,y)\right| \leqslant \sum_{i=s}^{n+1-2l} \rho\cdot\rho^{l-1}\cdot C^{l-1}_{n-l-i} = \rho^l \cdot \sum_{i=s}^{n+1-2l} C^{l-1}_{n-l-i} = \rho^l\, C^l_{n-l-s+1}.$$

Теорема 2. *Якщо всі частинні чисельники* $a_{ij}(x,y)$ *та знаменники* $b_{ij}(x,y)$ *ДФЛД (1) задовольняють умови (7) то*

$$|Q^n_k(x,y)| < (\beta+2)^{n-k}\cdot\varphi_{n-k+1}, \qquad |P^n_k(x,y)| < (\beta+2)^{n-k+1}\cdot\varphi_{n-k+2},$$

та

$$|Q_n(x,y)| < (\beta+2)^{n}\cdot\varphi_{n+1}, \qquad |P_n(x,y)| < (\beta+2)^{n+1}\cdot\varphi_{n+2},$$

де

$$\varphi_n = \left(\left(1+\sqrt{1+4\rho}\right)^n - \left(1+\sqrt{1-4\rho}\right)^n\right)\cdot 2^{-n}\cdot\left(\sqrt{1-4\rho}\right)^{-1}.$$

Доведення. Із рівності (6) та леми 2 випливає, що

$$|Q^n_k(x,y)| \leqslant \left|A^n_{k+1}\right| \cdot \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \left|R^n_{i,k+1}(x,y)\right| \leqslant (\beta+2)^{n-k}\cdot \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \rho^i\, C^i_{n-k-i}.$$

Скориставшись відомою рівністю з комбінаторики

$$\sum_{i=0}^{[n/2]} \rho^i\cdot C^i_{n-i} = \left(\left(1+\sqrt{1+4\rho}\right)^{n+1} - \left(1+\sqrt{1-4\rho}\right)^{n+1}\right)\cdot 2^{-(n+1)}\cdot\left(\sqrt{1-4\rho}\right)^{-1},$$

отримаємо твердження для $Q^n_k(x,y)$. Інші нерівності доводяться аналогічно.

Двовимірний інтерполяційний ланцюговий дріб Кучмінської–Коут. Нехай функція $f(x,y)$ неперервна на множині $G=[\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta]$ та визначена своїми значеннями у вузлах сітки $G_n = X\times Y=\{(x_i,y_j): x_i\in X, y_j\in Y\}$, де $X=\{x_i: x_i\in[\alpha,\beta], x_i\neq x_l, \text{при } i\neq l,\ i,l=0,1,\ldots,n\}$ та $Y=\{y_j: y_j\in [\alpha,\beta], y_j\neq y_l, \text{при } j\neq l,\ j,l=0,1,\ldots,n.\}$.

Розглянемо ДІЛД Кучмінської–Коут [8]

$$D_n(x,y)=\frac{P_n(x,y)}{Q_n(x,y)}=\Phi_0^n(x,y)+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n}\frac{(x-x_{k-1})(y-y_{k-1})}{\Phi_k^n(x,y)}, \tag{9}$$

де $\Phi_i^n(x,y)=b_{ii}+\mathop{\mathrm{K}}\limits_{j=i+1}^{n}\frac{x-x_{j-1}}{b_{ji}}+\mathop{\mathrm{K}}\limits_{j=i+1}^{n}\frac{y-y_{j-1}}{b_{ij}}$.

Легко бачити, що ДІЛД (9) є ДФЛД з частинними чисельниками $a_{ki}(x,y)= x-x_{k-1},\quad a_{ik}(x,y)=y-y_{k-1},\quad a_{ii}(x,y)=(x-x_{i-1})(y-y_{i-1}), k>i, i,k= 0,1,\ldots,n$, і частинними знаменниками $b_{ki}(x,y)=b_{ki},\ i,k=0,1,\cdots,n,$.

Чисельник $P_n(x,y)$ та знаменник $Q_n(x,y)$ ДІЛД (9) дробу можуть бути представлені за допомогою аналогу формули Ейлера–Міндінга (5), при $\Psi_i = (x-x_{i-1})\cdot(y-y_{i-1})/(\Phi_i^n(x,y)\cdot\Phi_{i+1}^n(x,y))$. Коефіцієнти дробу (9) визначаються з умови інтерполяції

$$D_n(x_i,y_j)=f(x_i,y_j)=c_{ij},\quad i,j=0,1,\ldots,n\ .$$

Теорема 3. *[6] Коефіцієнти ДІЛД (9) визначаються із співвідношення*

$$b_{ij}=\delta_{ij}^{s-1}, i,j=0,1,\ldots,n,\ s=\max\{i,j\}, \tag{10}$$

де

$$\delta_{ij}^{k}=\frac{x_{ik}\cdot y_{jk}}{\delta_{ij}^{k-1}+\theta_j^k\cdot\delta_{ik}^{k-1}+\theta_i^k\cdot\delta_{kj}^{k-1}+\theta_i^k\cdot\theta_j^k\cdot\delta_{kk}^{k-1}},\qquad \delta_{ij}^{-1}=c_{ij}, k=0,\ldots,n-1,$$

$$x_{ij}=\begin{cases}x_i-x_j, & \textit{при}\quad i>j,\\ 1, & \textit{при}\quad i\leqslant j,\end{cases}\quad y_{ij}=\begin{cases}y_i-y_j, & \textit{при}\quad i>j,\\ 1, & \textit{при}\quad i\leqslant j,\end{cases}\quad \theta_s^t=\begin{cases}-1, & \textit{при}\quad s>t,\\ 0, & \textit{при}\quad s\leqslant t.\end{cases}$$

Теорема 4. *Нехай виконуються наступні умови:*

1) функція $f(x,y)$ визначена та неперервна в області G,, для неї існує ДІЛД (9), коефіцієнти якого визначаються значеннями функції в точках сітки G_n за формулами (10);
2) коефіцієнти ДІЛД (9) задовольняють умови

$$|\ b_{ij}\ |\geqslant d+1,\ i\neq j,\ d^2+3\leqslant|\ b_{ii}\ |\leqslant\beta_1,\qquad i=1,\ldots,n,\ \text{де } d=\beta-\alpha\neq 1;$$

3) існує точка $(x_*,y_*)\in G,\ x_*\notin X, y_*\notin Y$, така, що виконуються нерівності

$$|\ b_{n+1,j}(x_*)\ |\geqslant d+1,\ |\ b_{i,n+1}(y_*)\ |\geqslant d+1,\ d^2+3\leqslant|\ b_{n+1,n+1}(x_*,y_*)\ |\leqslant\beta_1,$$

де $b_{n+1,j}(x_*),\ \ b_{i,n+1}(y_*),\ \ b_{n+1,n+1}(x_*,y_*)$ визначаються за формулами (10) для випадку, коли $x_{n+1}=x_*,\ y_{n+1}=y_*$.

Тоді має місце оцінка:

$$|f(x_*, y_*) - D_n(x_*, y_*)| \geqslant \left| \frac{\gamma^{n+1}}{(\beta_1+2)\varphi_2 \prod\limits_{s=1}^{n} (\beta_1+2)^{2(n-s)+4} \varphi_{n-s+2} \cdot \varphi_{n-s+3}} - \right.$$
$$\left. - \sum\nolimits_{m=0}^{n} \frac{2d^{m+n-1}(d-1)^2}{(d^{n+1-m}-1)(d^{n+2-m}-1)} \right|,$$

де $\gamma \leqslant |(x-x_i)(y-y_i)|,\ i = 0, 1, \ldots, n.$

Доведення. Точка $(x_*, y_*) \notin G_n$ згідно умови теореми. Побудуємо інший ДІЛД за значеннями функції $f(x,y)$ в точках сітки
$G_{n+1} = \{x_0, \ldots, x_n, x_{n+1}\} \times \{y_0, \ldots, y_n, y_{n+1}\}$, де $x_{n+1} = x_*, y_{n+1} = y_*$.

$$D_{n+1}(x,y) = \Phi_0^{n+1}(x,y) + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{n+1} \frac{(x-x_{i-1})(y-y_{i-1})}{\Phi_i^{n+1}(x,y)}, \tag{11}$$

де $\Phi_i^{n+1}(x,y) = b_{ii} + \mathop{\mathrm{K}}\limits_{j=i+1}^{n+1} \dfrac{x-x_{j-1}}{b_{ji}} + \mathop{\mathrm{K}}\limits_{j=i+1}^{n+1} \dfrac{y-y_{j-1}}{b_{ij}}.$

Коефіцієнти $b_{ij},\ i,j = 0,1,\ldots,n$ в ДІЛД (11) будуть рівними відповідним коефіцієнтам в ДІЛД (9) за побудовою, а коефіцієнти $b_{n+1,i} = b_{n+1,i}(x_*), b_{i,n+1} = b_{i,n+1}(y_*),\ b_{n+1,n+1} = b_{n+1,n+1}(x_*, y_*)$ і визначаються за (10).

ДІЛД (11) є інтерполяційним, тобто $D_{n+1}(x_*, y_*) = f(x_*, y_*)$ за побудовою, а тоді

$$f(x_*, y_*) - D_n(x_*, y_*) = D_{n+1}(x_*, y_*) - D_n(x_*, y_*).$$

Відома формула різниці сусідніх підхідних дробів [7]

$$D_{n+1} - D_n = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n+1} \left(\frac{\prod\limits_{j=m+1}^{n+1} a_{jm}}{Q_{n,m}\, Q_{n+1,m}} + \frac{\prod\limits_{j=m+1}^{n+1} a_{mj}}{Q_{m,n}\, Q_{m,n+1}} \right) \prod_{s=1}^{m} \frac{a_{ss}}{F_s^n\, F_s^{n+1}} + \tag{12}$$
$$+ \frac{(-1)^n \prod\limits_{s=1}^{n+1} a_{ss}}{F_{n+1}^{n+1} \prod\limits_{s=1}^{n} F_s^n\, F_s^{n+1}},$$

де $F_k^n = \Phi_k^n(x,y) + \mathop{\mathrm{K}}\limits_{i=k+1}^{n} \dfrac{a_{ii}(x,y)}{\Phi_i^n(x,y)},\ k = 0,1,\ldots,n-1,\ F_n^n = \Phi_n^n(x,y),\ Q_{n,m}$ – знаменник ланцюгового дробу $\mathop{\mathrm{K}}\limits_{i=m}^{n} \dfrac{a_{im}}{b_{im}},\ Q_{m,n}$ – знаменник ланцюгового дробу $\mathop{\mathrm{K}}\limits_{i=m}^{n} \dfrac{a_{mi}}{b_{mi}}$. Відомо [9], що $|Q_{n,m}| \geqslant \dfrac{d^{n+1-m}-1}{d-1},\ m = 0,1,\ldots,n.$

Отже, $F_k^n = \dfrac{P_k^n}{Q_k^n}$, тоді легко переконатися, що $F_k^n = Q_{k-1}^n$. Оцінимо рівність (12) знизу

$$|D_{n+1} - D_n| \geqslant \left| \frac{\prod\limits_{s=1}^{n+1} |a_{ss}|}{\left|F_{n+1}^{n+1}\right| \prod\limits_{s=1}^{n} |F_s^n| \left|F_s^{n+1}\right|} - \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{\prod\limits_{j=m+1}^{n+1} |a_{jm}|}{|Q_{n,m}|\, |Q_{n+1,m}|} + \frac{\prod\limits_{j=m+1}^{n+1} |a_{mj}|}{|Q_{m,n}|\, |Q_{m,n+1}|} \right) \prod_{s=1}^{m} \frac{|a_{ss}|}{|F_s^n| \left|F_s^{n+1}\right|} \right|.$$

Враховуючи результати з [6] та теорему 4, отримаємо наступну теорему.

Теорема 5. *При виконані умов теореми 4 справедливі наступні оцінки:*

$$\left| \frac{\gamma^{n+1}}{(\beta_1+2)\varphi_2 \prod\limits_{s=1}^{n} (\beta_1+2)^{2(n-s)+4} \varphi_{n-s+2}\cdot\varphi_{n-s+3}} - \sum_{m=0}^{n} \frac{2d^{m+n-1}(d-1)^2}{(d^{n+1-m}-1)(d^{n+2-m}-1)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant |f(x_*,y_*)-D_n(x_*,y_*)| \leqslant \sum_{m=0}^{n} \frac{2d^{m+n-1}(d-1)^2}{(d^{n+1-m}-1)(d^{n+2-m}-1)} + \frac{1}{d^{2n}}.$$

Двовимірні ланцюгові C′ **– дроби.** Розглянемо двовимірний ланцюговий дріб

$$D_n(x,y) = \Phi_0^n(x,y) + \underset{i=1}{\overset{n}{\mathrm{K}}} \frac{b_{ii}(x,y)}{\Phi_i^n(x,y)}, \tag{13}$$

де

$$\Phi_i^n(x,y) = 1 + \underset{j=i+1}{\overset{n}{\mathrm{K}}} \frac{b_{ji}(x,y)}{1} + \underset{j=i+1}{\overset{n}{\mathrm{K}}} \frac{b_{ij}(x,y)}{1}, \quad i=1,2,\ldots,n,$$

$$\Phi_0^n = b_{00} + \underset{i=1}{\overset{n}{\mathrm{K}}} \frac{b_{i0}(x,y)}{1} + \underset{i=1}{\overset{n}{\mathrm{K}}} \frac{b_{0i}(x,y)}{1}.$$

Формули (5) залишаються вірними при $\Psi_i = \dfrac{b_{i+1i+1}}{\Phi_i^n\Phi_{i+1}^n}$. Аналогічно до лем 1 та 2 можна сформулювати і довести наступну лему.

Лема 3. *Нехай частинні чисельники $b_{ij}(x,y)$ функціонального двовимірного ланцюгового дробу (13) задовольняють наступні умови:*

$$|b_{ij}| \leqslant t(1-t),\ i,j=0,1,\ldots,n,\ j\neq i,$$

$$|b_{ii}| \leqslant 2t,\ i=0,1,\ldots,n,\ \text{де } 0\leqslant t\leqslant 1/2.$$

Тоді:

1. $1-2t \leqslant |\Phi_i^n| \leqslant 1+2t$;

2.

$$\left|R_{k,s}^n\right| \leqslant \rho_1^k C_{n+1-s-k}^k,\ \text{де } \rho_1 = \frac{2t}{(1-2t)^2}.$$

Теорема 6. *Якщо всі частинні чисельники $b_{ij}(x,y)$ функціонального двовимірного ланцюгового дробу (13) задовольняють умови леми 3, то*

$$|Q_k^n(x,y)| < (1+2t)^{n-k}\cdot\bar\varphi_{n-k+1}, \qquad |P_k^n(x,y)| < (1+2t)^{n-k+1}\cdot\bar\varphi_{n-k+2},$$

$$|Q_n(x,y)| < (1+2t)^{n}\cdot\bar\varphi_{n+1}, \qquad |P_n(x,y)| < (1+2t)^{n+1}\cdot\bar\varphi_{n+2},$$

де

$$\bar\varphi_n = \left(\left(1+\sqrt{1+4\rho_1}\right)^n - \left(1+\sqrt{1-4\rho_1}\right)^n\right)\cdot 2^{-n}\cdot\left(\sqrt{1-4\rho_1}\right)^{-1}.$$

Розглянемо інтерполяційний ланцюговий дріб

$$D_n(x,y) = \Phi_0^n(x,y) + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{n} \frac{b_{ii}(x-x_{i-1})(y-y_{i-1})}{\Phi_i^n(x,y)}, \tag{14}$$

де

$$\Phi_i^n(x,y) = 1 + \mathop{\mathrm{K}}_{j=i+1}^{n} \frac{b_{ji}(x-x_{j-1})}{1} + \mathop{\mathrm{K}}_{j=i+1}^{n} \frac{b_{ij}(y-y_{j-1})}{1},\ i = 1,2,\ldots,n$$

$$\Phi_0^n = b_{00} + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{n} \frac{b_{i0}(x-x_{i-1})}{1} + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{n} \frac{b_{0i}(y-y_{i-1})}{1},$$

де $b_{ij},\ i,j = 0,1,\ldots,n$ – сталі.

Коефіцієнти b_{ij} визначають з умови інтерполяції. Введемо наступне позначення:

$$\beta_{ij}^{(k)} = \frac{\omega_{ij}^{(k-1)}}{x_{ik}y_{j\,k}} \left[\frac{1}{\beta_{ij}^{(k-1)}} + \frac{\theta_j^k}{\beta_{ik}^{(k-1)}} + \frac{\theta_i^k}{\beta_{kj}^{(k-1)}} + \frac{\theta_j^k\,\theta_i^k}{\beta_{kk}^{(k-1)}} \right],$$

де $\omega_{ij}^{(k-1)} = \begin{cases} \beta_{ik}^{(k-1)}, & \text{коли} \quad j>i,\ i<k, \\ \beta_{kj}^{(k-1)}, & \text{коли} \quad i>j,\ j<k, \\ \beta_{kk}^{(k-1)}, & \text{коли} \quad i\geqslant k,\ j\geqslant k, \end{cases}$

$$\beta_{ij}^{(0)} = \frac{c_{ij} + \theta_j^0 c_{i0} + \theta_i^0 c_{0j} + \theta_j^0\theta_i^0 c_{00}}{x_{i0}\ y_{j0}}, \quad i,j = 0,1,\ldots,n,\ k = 1,2,\ldots,n-1.$$

Теорема 7. *[6] Коефіцієнти ДІЛД (14) можуть бути знайдені за допомогою співвідношення*

$$b_{ij} = \beta_{ij}^{(k-1)}, \qquad i,j = 0,1,\ldots,n, k = max\{i,j\}. \tag{15}$$

Теорема 8. *Нехай виконуються наступні умови:*

1) функція $f(x,y)$, визначена і неперервна в області G, для неї побудований С′–ДІЛД (14), коефіцієнти якого визначаються значеннями функції у вузлах сітки G_n;
2) коефіцієнти С′–ДІЛД (14) задовольняють умови

$$|a_{ij}| \leqslant t(1-t),\ i,j = 0,1,\ldots,n, i \neq j$$

$$\gamma_1 \leqslant |a_{ii}| \leqslant 2t,\ i = 0,1,\ldots,n,$$

де $0 \leqslant t \leqslant 1/2$, $a_{ij} = b_{ij}(y-y_{j-1})$, $a_{ji} = b_{ji}(x-x_{j-1}), i>j$ $a_{ii} = b_{ii}(x-x_{i-1})(y-y_{i-1})$;
3) існує точка $(x_*, y_*) \in G$, $x_* \notin X$, $y_* \notin Y$, для якої виконуються нерівності $|a_{n+1j}(x_*)| \leqslant t(1-t)$, $j = 0,\ldots,n$, $|a_{in+1}(y_*)| \leqslant t(1-t)$, $i = 0,1,\ldots,n$, $\gamma_1 \leqslant |a_{n+1n+1}(x_*, y_*)| \leqslant 2t$, де величини $b_{n+1j}(x_*)$, $b_{in+1}(y_*)$, $b_{n+1n+1}(x_*, y_*)$ визначаються за формулами (15) у випадку, коли $x_{n+1} = x_*$, $y_{n+1} = y_*$.

Тоді має місце оцінка

$$|f(x_*, y_*) - D_n(x_*, y_*)| \geqslant \left| \frac{\gamma_1^{n+1}}{(1+2t)\bar{\varphi}_2 \prod\limits_{s=1}^{n} (1+2t)^{2(n-s)+4} \bar{\varphi}_{n-s+2} \cdot \bar{\varphi}_{n-s+3}} - \right.$$

$$\left. - \sum_{m=0}^{n} \frac{2^{1-m} t^{n-2m+1} (1-t)^{n-m+1} ((1-t)^{n-m+1} - t^{n-m+1})}{(1-t)^{n-m+3} - t^{n-m+3}} \right|.$$

Доведення аналогічне доведенню теореми 4.

Враховуючи результати з [6] та теорему 8, отримаємо наступну теорему.

Теорема 9. *При виконанні умов теореми 8 справедливі наступні оцінки:*

$$\left| \frac{\gamma_1^{n+1}}{t_1 \bar{\varphi}_2 \prod\limits_{s=1}^{n} t_1^{2(n-s)+4} \bar{\varphi}_{n-s+2} \bar{\varphi}_{n-s+3}} - \sum_{m=0}^{n} \frac{t^{n-2m+1}(1-t)^{n-m+1}((1-t)^{n-m+1} - t^{n-m+1})}{2^{m-1}((1-t)^{n-m+3} - t^{n-m+3})} \right| \leqslant$$

$$\leq |f(x_*, y_*) - D_n(x_*, y_*)| \leqslant \sum_{m=0}^{n} \frac{t^{n-2m+1}(1-t)^{n-m+1}((1-t)^{n-m+1} - t^{n-m+1})}{2^{m-1}((1-t)^{n-m+3} - t^{n-m+3})} + \frac{1}{(2t)^n},$$

де $t_1 = 1 + 2t$.

1. *Perron O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band I. – Stuttgart: Teubner, 1954. – 194 s.
2. *Пагіря М. М.* Інтерполяція функцій ланцюговим дробом та його узагальненнями у випадку функцій багатьох змінних // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1998. – Вип. 3. – С. 155–164.
3. *Пагіря М. М.* Задача інтерполяцій функцій ланцюговими дробами // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2005. – Вип. 10-11. – С. 77–87.
4. *Пагіря М. М.* Про побудову двовимірного та трьохвимірного інтерполяційних ланцюгових дробів // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. мат. – 1999. – Вип. 4. – С. 85–89.
5. *Пагіря М. М.* Інтерполяція функцій ланцюговим дробом та гіллястим ланцюговим дробом спеціального виду // Наук. Вісник Ужгород. ун-ту. Сер. мат. – 1994. Вип. I. – С. 72–79.
6. *Пагіря М. М., Свида Т. С.* Задача інтерполяції функції двовимірними ланцюговими дробами // Укр. мат. ж-л. –К.: 2006. –Том 58. –С.842-852.
7. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – К.: Наукова думка, 1986. – 176 с.
8. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
9. *Pahirya M.* Some New Aspects of Thiele Interpolation Continued Fraction // Communication in the Analytic Theory of Continued Fractions. – 2001. – Vol. IX, Summer 2001. – P. 21–29.

Одержано 05.04.2011