УДК 519.8

В. І. Гренджа, А. Ю. Брила (Ужгородський нац. ун-т)

ЗАДАЧІ ЛЕКСИКОГРАФІЧНО-ЛЕКСИКОГРАФІЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З АЛЬТЕРНАТИВНИМИ КРИТЕРІЯМИ

The method of finding of attainable optimum solutions of linear problem of lexicographic-lexicographical multicriteria optimization with alternative criteria by reduce it to the problem of onecriterion optimization with a scalar objective function is considered.

Розглядається метод знаходження досяжних оптимальних розв'язків лінійної задачі лексикографічно-лексикографічної багатокритеріальної оптимізації з альтернативними критеріями шляхом зведення її до однокритеріальної задачі з скалярною цільовою функцією.

Вступ. Для розв'язання задачі лексикографічно-лексикографічної оптимізації у [1] запропоновано підхід, який ґрунтується на зведенні її до задачі лексикографічної оптимізації. У [3] запропоновано метод розв'язання лексикографічно-лексикографічної задачі шляхом зведення її до однокритеріальної задачі лінійного програмування з використанням відповідної лінійної згортки критеріїв. У даній статті результати отримані у [3] застосовуються для розв'язання задач лексикографічно-лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями та задач лексикографічно-лексикографічної оптимізації з альтернативними групами критеріїв.

1. Задача лексикографічно-лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями. Розглянемо лінійну задачу лексикографічно-лексикографічної максимізації [1]

$$\max^{LL} c(x)\,,\ x \in X, \tag{1}$$

де $c(x) = (c_1(x), c_2(x), ..., c_q(x))$ – векторна згортка критеріїв $c_k(x)\,,\ k = 1, 2, ..., q$ в субординації строгого ранжирування $Rg(1, 2, ..., q)$, а кожен з критеріїв $c_k(x) = (c_{k1}(x), c_{k2}(x), ..., c_{kq_k}(x))\,,\ k \in \{1, 2, ..., q\}$, в свою чергу, є векторною згорткою критеріїв c_{ki}, $i = 1, 2, ..., q_k$ в субординації $Rg(1, 2, ..., q_k)$. Множина допустимих розв'язків X задається системою лінійних нерівностей

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i = 1, 2, ..., m,$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, ..., n.$$

Якщо розв'язок лінійної багатокритеріальної задачі оптимізації може бути отриманий як розв'язок відповідної задачі лінійного програмування, з цільовою функцією, яка є лінійною згорткою критеріїв цієї багатокритеріальної задачі оптимізації, то вважають, що даний розв'язок є досяжним за зваженою сумою різноважливих критеріїв.

Нехай $\tilde{c} = \left(c_{11}, c_{12}, ..., c_{1q_1}, c_{21}, c_{22}, ..., c_{2q_2}, ..., c_{q1}, c_{q2}, ..., c_{qq_q}\right)$ – векторна функція, складена з функцій $c_{ki}(x)$, $i = 1, 2, ..., q_k$, $k = 1, 2, ...q$. В [1] показано, що задача (1) еквівалентна задачі лексикографічної оптимізації

$$\max{}^L \tilde{c}(x), \; x \in X. \tag{2}$$

Для знаходження досяжних оптимальних розв'язків задачі (2), а отже і для задачі (1), можна знайти ([3]) такі додатні коефіцієнти $\lambda_{ki}, k = 1, 2, ..., q, i = 1, 2, ..., q_q$, що розв'язок задачі

$$\max \; L(x) = \sum_{i=1}^{q_1} \lambda_{1i} c_{1i}(x) + \sum_{i=1}^{q_2} \lambda_{2i} c_{2i}(x) + ... + \sum_{i=1}^{q_q} \lambda_{qi} c_{qi}(x), \; x \in X, \tag{3}$$

є розв'язком задачі (1).

На основі задач (1), (3) розглянемо задачу, в якій оптимальний розв'язок необхідно знайти враховуючи тільки один критерій якнайвищого рангу з групи критеріїв якнайвищого рангу, для якого виконується умова

$$c_{ki}(x) \geq m_{ki}, \, m_{ki} \in R, \, k \in \{1, 2, ..., q\}, i \in \{1, 2, ..., q_k\}.$$

Такий критерій назвемо допустимим, а дану задачу назвемо задачею лексикографічно-лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями.

Розглянемо задачу знаходження максимуму функціоналу

$$L(x) = \sum_{i=1}^{q_1} \bar{\lambda}_{1i} c_{1i}(x) + \sum_{i=1}^{q_2} \bar{\lambda}_{2i} c_{2i}(x) + ... + \sum_{i=1}^{q_q} \bar{\lambda}_{qi} c_{qi}(x) \tag{4}$$

на допустимій множині, що задається обмеженнями

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \; i = 1, 2, ..., m, \tag{5}$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1, 2, ..., n, \tag{6}$$

$$c_{ki}(x) \geq m_{ki} y_{ki}, \; k = 1, 2, ..., q, i = 1, 2, ..., q_k, \tag{7}$$

$$\bar{\lambda}_{ki} = \lambda_{ki} y_{ki}, \; k = 1, 2, ..., q, i = 1, 2, ..., q_k, \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{q_k} y_{ki} = 1, \tag{9}$$

$$y_{ki} \in \{0, 1\}, \; k = 1, 2, ..., q, i = 1, 2, ..., q_k. \tag{10}$$

Нехай $\left(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{\lambda}\right)$ є оптимальним розв'язком цієї задачі.

Теорема 1. $\widehat{x}$ *є розв'язком задачі знаходження оптимального розв'язку в залежності від вибору допустимого критерію якнайвищого рангу з групи критеріїв якнайвищого рангу.*

Доведення теореми легко отримати, враховуючи вибір коефіцієнтів λ_{ki}.

Очевидно, якщо оптимальний розв'язок необхідно знайти в залежності від вибору d, $d \geq 1$ допустимих критеріїв, то обмеження (9) необхідно замінити обмеженням

$$\sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{q_k} y_{ki} = d.$$

2. Задача лексикографічно-лексикографічної оптимізації з альтернативними групами критеріїв. На основі задач (1), (3) побудуємо задачу, у якій оптимальний розв'язок необхідно знайти враховуючи тільки одну групу критеріїв якнайвищого рангу, тобто тільки один векторний критерій $c_k(x)$, $k \in \{1, 2, ..., q\}$, який є векторною згорткою критеріїв c_{ki}, $i = 1, 2, ..., q_k$ в субординації $Rg(1, 2, ..., q_k)$ і

$$c_{ki}(x) \geq m_{ki}, \ i = 1, 2, ..., q_k. \tag{11}$$

Такий векторний критерій будемо вважати допустимим, а саму задачу назвемо задачею лексикографічно-лексикографічної оптимізації з альтернативними групами критеріїв.

Розглянемо задачу знаходження максимуму функціоналу

$$L(x) = \sum_{i=1}^{q_1} \tilde{\lambda}_{1i} c_{1i}(x) + \sum_{i=1}^{q_2} \tilde{\lambda}_{2i} c_{2i}(x) + ... + \sum_{i=1}^{q_q} \tilde{\lambda}_{qi} c_{qi}(x) \tag{12}$$

на допустимій множині, що задається обмеженнями

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ i = 1, 2, ..., m, \tag{13}$$

$$x_j \geq 0, \ j = 1, 2, ..., n, \tag{14}$$

$$c_{ki}(x) \geq m_{ki} y_{ki}, \ k = 1, 2, ..., q, i = 1, 2, ..., q_k, \tag{15}$$

$$\tilde{\lambda}_{ki} = \lambda_{ki} y_{ki}, \ k = 1, 2, ..., q, i = 1, 2, ..., q_k, \tag{16}$$

$$y_{ki} = \alpha_k, \ k = 1, 2, ..., q, i = 1, 2, ..., q_k, \tag{17}$$

$$\sum_{k=1}^{q} \alpha_k = 1, \tag{18}$$

$$\alpha_k \in \{0, 1\}, \ k = 1, 2, ..., q. \tag{19}$$

Нехай $\left(\widehat{x}', \widehat{y}', \widehat{\lambda}'\right)$ є оптимальним розв'язком цієї задачі .

Теорема 2. $\widehat{x}'$ *є розв'язком задачі знаходження оптимального розв'язку в залежності від вибору допустимого векторного критерію якнайвищого рангу.*

Доведення теореми легко отримати враховуючи вибір коефіцієнтів λ_{ki} та коефіцієнтів α_k.

Зауважимо, що якщо необхідно знайти оптимальний розв'язок враховуючи d, $d \geq 1$ векторних критеріїв якнайвищого рангу, то обмеження (18) необхідно замінити обмеженням

$$\sum_{k=1}^{q} \alpha_k = d.$$

1. Червак Ю. Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір/ Ю.Ю. Червак. — Ужгород: Ужгородський нац. ун–т, 2002. — 312 с.
2. Подиновский В.В., Гаврилов В.М. Опимизация по последовательно применяемым критериям/ В.В. Подиновский, В.М. Гаврилов. — М.:Наука, 1975. — 192 с.
3. Брила А.Ю. Досяжність оптимальних розв'язків лінійної задачі лексикографічно-лексикографічної багатокритеріальної оптимізації за зваженою сумою різноважливих критеріїв/ А.Ю. Брила // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2008. – Вип. 16 – С. 40–43.

Одержано 25.04.2011