УДК 519.854

О. І. Кузка, І. П. Градинар (Ужгородський нац. ун-т)

НАБЛИЖЕНИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЗНАХОДЖЕННЯ МАКСИМАЛЬНОГО ЗВАЖЕНОГО РОЗРІЗУ ГРАФА

The method of global equilibrium search (GES) [1–3] shows a convincing performance over other algorithms for solving series problems, in particular the problem of finding maximum cut of graph (MAX CUT). During studing of method GES was developed approximate local search algorithm as part of this method, a description of which is presented in this work.

Метод глобального рівноважного пошуку (ГРП або GES) [1–3] проявляє переконливу ефективність в порівнянні з іншими алгоритмами при розв'язанні ряду задач, зокрема задачі знаходження максимального розрізу графа (MAX CUT). При дослідженні методу ГРП в якості складової був розроблений наближений алгоритм локального пошуку, описання якого приводиться у даній роботі.

Розглядається узагальнена постановка задачі, коли знаходиться зважений розріз графа [3]. Нехай задано орієнтовний граф $G(V, E)$, де $V = v_1, \ldots, v_{|V|}$ — множина його вершин, $E = e_1, \ldots, e_{|E|}$ — множина ребер. Кожному ребру ставиться у відповідність його вага w_{ij} ($w_{ii} = 0$, $w_{ij} = w_{ji}$), де $i, j = 1, \ldots, |V|$. Якщо ребро між двома вершинами v_i та v_j $(i, j = 1, \ldots, |V|)$ графа $G(V, E)$ не існує ($(i, j) \notin E$), то $w_{ij} = 0$.

Нехай S — деяка підмножина множини V вершин графа $G(V, E)$. Позначимо $C(S) = \{(i, j) \in E : i \in S, j \notin S\}$ — розріз графа $G(V, E)$, що визначається множиною S. Тобто, розріз графа $C(S)$ — множина ребер графа, що розділяють множину його вершин на дві множини, що не перетинаються.

Необхідно знайти таку множину $S \subset V$, щоб величина

$$\varphi(S) = \sum_{(i,j)\in C(S)} w_{ij}$$

була максимальною.

Частковий випадок задачі, коли ребра графа не зважені. В такому випадку $w_{ij} = 1$, $i, j = 1, \ldots, |E|$, а $\varphi(S) = |C(S)|$.

Кожній вершині $v_i \in V, i = 1, \ldots, |V|$ поставимо у відповідність змінну $x_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, |V|$. А будь-якому вектору $x = (x_1, \ldots, x_{|V|}) \in B^{|V|}$ поставимо у відповідність множину $S(x) = \{v_j \in V : x_j = 1\}$. Тоді математична модель задачі знаходження максимального зваженого розрізу графа $C(S(x))$ виглядає наступним чином

$$\max_{x\in B^{|V|}} \left\{ f(x) = \sum_{(i,j)\in E} x_i(1 - x_j)w_{ij} \right\},$$

де $\varphi(S) = f(x)$.

Суть пропонованого алгоритму полягає в наступному. Кожній вершині ставиться у відповідність її потенціал — величина, що характеризує переваги занесення цієї вершини в множину S. Позначимо його

$$\tau(v_i) = \sum_{v_j \notin S} w_{ij} - \sum_{v_j \in S} w_{ij}, i = 1, \ldots, |V|$$

В залежності від приналежності вершини v_i до множини S та значення $\tau(v_i)$ розглянемо наступні варіанти дій:

- $v_i \notin S, \tau(v_i) > 0$ - при занесенні вершини v_i в множину S , величина розрізу $\varphi(S)$ зросте на значення $\tau(v_i)$, цю вершину варто занести в S;
- $v_i \notin S, \tau(v_i) < 0$ - при занесенні вершини v_i в множину S , величина розрізу $\varphi(S)$ спаде на значення $|\tau(v_i)|$, цю вершину не варто заносити в S;
- $v_i \in S, \tau(v_i) > 0$ - при виведенні вершини v_i з множини S , величина розрізу $\varphi(S)$ спаде на значення $\tau(v_i)$, цю вершину не варто виводити в S;
- $v_i \in S, \tau(v_i) < 0$ - при виведенні вершини v_i з множини S , величина розрізу $\varphi(S)$ зросте на значення $|\tau(v_i)|$, цю вершину варто вивести в S.

В пропонованому алгоритмі було використано переваги алгоритмів, що описані та досліджувались в [3–6]. При виборі вершин в множину S з великою ймовірністю вибиралися вершини з найбільшим додатнім потенціалом, доки такі існують (функція $filling\_S()$). Далі за певним правилом видаляються деяка кількість вершин з S. Незважаючи на те, що видалення з S вершин від'ємного потенціалу має збільшити значення розрізу, дослідження показало, що при пропонованій схемі алгоритму виконання до деякого критерію ряду кроків видалення декількох вершин додатного потенціалу (функція $deleting\_some\_verticies\_from\_S(i)$) та застосування функції $filling\_S()$ в результаті давало більше значення розрізу.

Загальну схему алгоритму можна представити в такому вигляді:

$largest\_\varphi(S) = 0;$
while $global\_criterion()$
    $S = \emptyset$;
    $filling\_S();$
    if $largest\_\varphi(S) < |\varphi(S)|$
        $largest\_\varphi(S) = |\varphi(S)|;$
    end if
    while $local\_criterion()$
        $i = choosing\_value();$
        $deleting\_some\_verticies\_from\_S(i);$
        $filling\_S();$
        if $largest\_\varphi(S) < |\varphi(S)|$
            $largest\_\varphi(S) = |\varphi(S)|;$

14. **end if**
15. **end while**
16. **end while**
17. **return** $largest\_\varphi(S)$;

Результати вирішення розглядуваної задачі описаним вище алгоритмом представлено в табл. 1. Конфігурація комп'ютера, на якому проводились обчислювальні експерименти (при завантаженні 25%): Intel® Core^{TM}2 Quad CPU, Q9550 @ 2.83GHz, 8,00GB RAM (Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України). Виділений для кожного графу максимальний час — одна година. Кожна задача розв'язувалась 10 разів.

В табл. 2 зведено результати одержані запропонованим алгоритмом та результати, що одержані іншими алгоритмами та наведені в [2]. Хоча наближений алгоритм був розроблений в якості складової для методу ГРП (GES), результати роботи самого алгоритму було порівняно з результатами роботи однієї з модифікацій ГРП, що одержані на комп'ютері з такою ж конфігурацією (Intel® Core^{TM}2 Quad CPU, Q9550 @ 2.83GHz, 8,00GB RAM, при завантаженні 25%). Також наведено найкращі результати, що одержані [2] при розв'язанні тестових задач алгоритмами: SS, CirCut, VNSPR (3.2 GHz Intel® Xenon processor and 2.0 GB of RAM) та RRT, MST(Pentium III 800 PC).

Запропонований в роботі наближений алгоритм локального пошуку дає гірші результати ніж одна з модифікацій методу ГРП (табл. 2), але в порівнянні з деякими іншими алгоритмами він дає кращі результати для певних графів першої групи ($G1-G3$, $G11-G16$, $G22-G24$, $G32-G37$, $G43-G45$, $G48-G50$), що є аргументом на подальше його дослідження та можливу ефективність використання в якості складової методу ГРП.

1. *Шило В. П.* Метод глобального равновесного поиска // Кибернетика и систем. анализ. - 1999. -№ 1. -С.93-102.
2. *Шило В. П., Шило О. В.* Решение задачи о максимальном разрезе графа методом глобального равновесного поиска // Кибернетика и систем. анализ. - 2010. -№ 5. -С.68-79.
3. *Сергиенко И. В., Шило В. П.* Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. — Киев: Наук. думка, 2003. — 264 с.
4. *Шило В. П., Рощин В. А., Градинар И. П.* Приближенное решение задачи нахождения максимального ρ-плотного множества вершин графа // Компьютерная математика. — Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2011. — № 1.
5. *Шило В. П., Градинар І. П., Ляшко В. І.* Наближений алгоритм знаходження максимального k-plex (co-k-plex) графу // Наукові записки НаУКМА: Комп'ютерні науки — 2011. — Т. 112.
6. *Градинар І. П.* Наближені алгоритми знаходження перешкодозахищених кодів, що корегують одну помилку в Z-каналі // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. — 2009. — Вип. 18. — С. 20-30.

Одержано 02.05.2011

Таблиця 1.

Одержані результати

№	Назва графа	Найкраще значення	Середнє значення	Середній час (с)	Станд. відх.часу
1	G1	11624	11622.20	757.035	872.650269
2	G2	11620	11620.00	66.630	77.207291
3	G3	11622	11622.00	600.323	1029.810547
4	G11	484	482.20	1514.386	1173.064087
5	G12	452	450.40	1482.505	811.039673
6	G13	506	501.40	1220.003	350.318420
7	G14	3046	3043.30	1908.783	1141.919556
8	G15	3019	3018.20	1672.167	1127.257324
9	G16	3037	3035.50	1829.873	1229.865601
10	G22	13353	13318.60	264.083	491.665466
11	G23	13332	13313.40	217.381	621.113892
12	G24	13320	13309.10	7.448	3.446968
13	G32	1180	1171.00	1159.483	1164.517578
14	G33	1160	1153.60	172.038	385.476685
15	G34	1146	1141.80	1611.958	1359.784302
16	G35	7606	7595.80	1078.944	995.853088
17	G36	7604	7581.30	0.320	0.182237
18	G37	7621	7592.80	434.111	880.702820
19	G43	6660	6660.00	162.056	217.833115
20	G44	6650	6649.00	336.217	220.946808
21	G45	6654	6652.90	559.734	848.650635
22	G48	5888	5876.40	1791.081	1076.943970
23	G49	5880	5855.60	1342.021	944.838257
24	G50	5806	5793.00	1521.181	1188.264038
25	sg3dl101000	840	829.40	838.048	1021.815979
26	sg3dl102000	852	846.60	805.269	1063.387695
27	sg3dl103000	818	809.80	559.252	844.040588
28	sg3dl104000	840	834.20	196.533	290.109894
29	sg3dl105000	832	827.40	526.880	877.207031
30	sg3dl106000	828	820.60	970.639	815.784973
31	sg3dl107000	838	833.80	902.097	628.349060
32	sg3dl108000	822	816.40	489.722	630.608215
33	sg3dl109000	824	818.00	898.986	935.781982
34	sg3dl1010000	838	831.00	1190.852	1205.226074
35	sg3dl141000	2244	2216.60	458.333	606.169434
36	sg3dl142000	2242	2226.80	396.967	1061.021606
37	sg3dl143000	2244	2218.80	548.536	997.203552
38	sg3dl144000	2234	2214.80	21.066	30.406525
39	sg3dl145000	2250	2195.80	367.897	706.596619
40	sg3dl146000	2250	2229.20	105.883	210.327393
41	sg3dl147000	2236	2218.20	389.000	766.487915
42	sg3dl148000	2222	2195.40	409.031	761.812744
43	sg3dl149000	2188	2168.60	491.400	992.130554
44	sg3dl1410000	2234	2215.60	605.626	1099.629272

Таблиця 2.

Порівняння результатів, одержаних різними алгоритмами

№ п/п	Назва графа	Одержані алгоритмами значення розрізу графа						
		GES	Запроп. алгоритм	SS	CirCut	VNSPR	RRT	MST
1	G1	11624	**11624**	11624	11624	11621	11624	11624
2	G2	11620	**11620**	11620	11617	11615	11620	11620
3	G3	11622	**11622**	11622	11622	11622	11622	11622
4	G11	564	484	562	560	564	564	562
5	G12	556	452	552	552	556	556	552
6	G13	582	506	578	574	580	580	576
7	G14	3064	**3046**	3060	3058	3055	3042	3063
8	G15	3050	3019	3049	3049	3043	3024	3050
9	G16	3052	**3037**	3045	3045	3043	3026	3052
10	G22	13359	**13353**	13346	13346	13295	13235	13358
11	G23	13342	**13332**	13317	13317	13290	13246	13329
12	G24	13333	**13320**	13303	13314	13276	13241	13327
13	G32	1408	1180	1398	1390	1396	1384	1392
14	G33	1380	1160	1362	1360	1376	1358	1368
15	G34	1384	1146	1364	1368	1372	1362	1368
16	G35	7681	**7606**	7668	7670	7635	7590	7672
17	G36	7674	**7604**	7660	7660	7632	7577	7669
18	G37	7688	**7621**	7664	7666	7643	7589	7675
19	G43	6660	**6660**	6656	6656	6659	6660	6660
20	G44	6650	**6650**	6648	6643	6642	6650	6650
21	G45	6654	**6654**	6642	6652	6646	6654	6650
22	G48	6000	5888	6000	6000	6000	-	-
23	G49	6000	5880	6000	6000	6000	-	-
24	G50	5880	5806	5880	5880	5880	-	-
25	sg3dl101000	896	840	882	880	892	892	896
26	sg3dl102000	900	852	894	892	900	898	900
27	sg3dl103000	892	818	884	882	884	886	888
28	sg3dl104000	898	840	892	894	896	896	896
29	sg3dl105000	886	832	880	882	882	884	884
30	sg3dl106000	888	828	870	886	880	884	888
31	sg3dl107000	900	838	890	894	896	898	898
32	sg3dl108000	882	822	880	874	880	880	880
33	sg3dl109000	902	824	888	890	898	900	902
34	sg3dl1010000	894	838	886	886	890	890	892
35	sg3dl141000	2442	2244	2428	2410	2416	2378	2438
36	sg3dl142000	2458	2242	2418	2416	2416	2394	2448
37	sg3dl143000	2440	2244	2410	2408	2406	2394	2434
38	sg3dl144000	2448	2234	2422	2414	2418	2390	2436
39	sg3dl145000	2446	2250	2416	2406	2416	2380	2432
40	sg3dl146000	2450	2250	2424	2412	2420	2394	2440
41	sg3dl147000	2442	2236	2404	2410	2404	2384	2434
42	sg3dl148000	2446	2222	2416	2418	2418	2386	2434
43	sg3dl149000	2424	2188	2412	2388	2384	2362	2416
44	sg3dl1410000	2456	2234	2430	2420	2422	2402	2450