УДК 517.95

Баранецький Я. О. , Ярка У. Б., Федушко С. С.
(Національний університет "Львівська політехніка")

ІЗОСПЕКТРАЛЬНІ ЗБУРЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ДІРІХЛЕ

В роботі досліджуються збурення оператора задачі Діріхле операторами із деякої заданої множини. Доведено, що при таких збуреннях спектр задачі залишається незмінним. Встановлено повноту системи власних функцій збуреної задачі.

This paper investigates the problem of the perturbation operator Dirichlet operators of some given set. It is shown that the spectrum of perturbations problem remains invariable. It completeness of eigenfunctions of perturbed problems.

Для збурених звичайних диференціальних рівнянь другого порядку та диференціально-операторних рівнянь вищих порядків аналогічні задачі вивчались в роботах [1,2,3,4].

Введемо в розгляд оператор $\tilde{I}u\,(t) \equiv u\,(1-t)\,,\ u \in C\,[0,1]$, та його розширення I на простір $L_2\,(0,1)$, $\tilde{I} \subset I$.
Визначимо простори:
$B(L_2\,(0,1))-$ банахів простір неперервних операторів з $L_2\,(0,1)$ в $L_2\,(0,1)\,,$
$H_0 \equiv \{u \in L_2\,(0,1) : Iu = u\}\,,\ H_1 \equiv \{u \in L_2\,(0,1) : Iu = -u\}\,,$
$W_2^m(0,1)-$ множина функцій з простору $C^{m-1}(0,1)$, таких що $D_t^{m-1}u-$ абсолютно неперервна на (0,1) та $D_t^m u \in L_2(0,1)$, D_t- оператор диференціювання.
Для будь-якої функції $u \in H_i$, отримаємо рівність $Iu\,(t) = (-1)^i\,u\,(t)\,,\ i = (0,1)$.
Визначимо оператори $p_0 \equiv \frac{E+I}{2}, p_1 \equiv \frac{E-I}{2}, E-$ тотожне перетворення з простору $L_2\,(0,1)$ в $L_2\,(0,1)$.

Розглянемо деякі властивості операторів I та $p_i,\ (i = 0,1)$.

Лема 1. *Правильними є такі твердження:*

1) $D_tIu = -ID_tu,\ u \in W_2^1\,(0,1),$

2) $I^2 = E,$

3) $D_tp_iu = p_{1-i}D_tu,\ \ u \in W_2^1\,(0,1)\,,\ (i = 0,1),$

4) $D_t^2p_iu = p_iD_t^2u,\ \ u \in W_2^2\,(0,1)\,,\ (i = 0,1).$

Доведення. Доведемо перше твердження: $D_tIu(t) = D_tu(1-t) = -ID_tu(t)$. Для будь-якої неперервної на [0,1] функції $u(t)$ маємо $I^2u(t) = \tilde{I}^2u(t) = \tilde{I}(u(1-t)) = u(1-(1-t)) = u(t)$. Із означення оператора I, як розширення на простір $L_2(0,1)$ оператора $\tilde{I}$, випливає друге співвідношення для довільної функції $u(t) \in L_2(0,1)$.
Доведемо третє твердження для $i = 0$: $D_tp_0u = D_t(\frac{E+I}{2})u = (\frac{E-I}{2})D_tu = p_1D_tu, u(t) \in W_2^1(0,1)$. Аналогічно для $i = 1$, $D_tp_1u = D_t(\frac{E-I}{2})u = (\frac{E+I}{2})D_tu = p_0D_tu, u(t) \in W_2^1(0,1)$.
Розглянемо останнє твердження леми для $i = 0$, $D_tD_t(p_0u) = D_t(p_1D_tu) =$

$p_0 D_t(D_t u) = p_0 D_t^2 u$, $u \in W_2^2(0,1)$. Для $i = 1$ дане твердження доводиться аналогічно.
Лему доведено.

Лема 2. *Оператори p_0, p_1 є ортопроекторами в просторі $L_2\,(0,1)$.*

Доведення. Покажемо, що оператори p_0, p_1 є проекторами в просторі $L_2(0,1)$: $p_i^2 = p_i$, $(i = 0,1)$.
Використовуючи означення операторів p_0, p_1 та твердження 2 леми1 отримуємо:

$$p_i^2 = \frac{E + (-1)^i I}{2} \frac{E + (-1)^i I}{2} = \frac{1}{4}(E + 2(-1)^i I + E) = \frac{1}{2}(E + (-1)^i I) = p_i,$$

Доведемо, що проектори p_0, p_1- ортогональні: $p_0 p_1 = \frac{1}{4}(E + I)(E - I) = \frac{1}{4}(E - I^2) = \frac{1}{4}(E - E) = 0,\ (i = 0,1)$.
Лему доведено.

Лема 3. *Простір $L_2\,(0,1)$ розкладається в ортогональну суму просторів $H_0,\ H_1$: $L_2\,(0,1) = H_0 \oplus H_1$.*

Доведення. Будь-яку функцію $u \in L_2(0,1)$, можна подати у вигляді суми $u(t) = \frac{u(t)+u(1-t)}{2} + \frac{u(t)-u(1-t)}{2} = p_0 u(t) + p_1 u(t)$, $p_0 u \in H_0$, $p_1 u \in H_1$. Тобто $L_2(0,1) \subseteq H_0 + H_1$, $(p_0 + p_1)u(t) = p_0 u(t) + p_1 u(t) = u(t)$, $p_0 + p_1 = E$. Сума просторів є ортогональною, оскільки p_0, p_1- ортопроектори. Включення $L_2(0,1) \supseteq H_0 + H_1$ очевидне. Отже, $L_2\,(0,1) = H_0 \oplus H_1$.
Лему доведено.

Лема 4. *Якщо $u \in\ H_j \bigcap W_2^1\,(0,1)$, то $D_t u\ \in H_{1-j}$, $(j = 0,1)$.*

Доведення. Враховуючи лему 1 отримаємо рівність:$I D_t u(t) = -D_t I u(t), u \in W_2^1(0,1)$.
Нехай $u \in H_0 \bigcap W_2^1(0,1)$, тоді $Iu(t) = u(t)$. Отже, $I D_t u(t) = -D_t u(t) \in H_1$. Аналогічно для випадку $u \in H_1 \bigcap W_2^1(0,1)$, $I D_t u(t) = -D_t I u(t) = (-1)(-1) D_t u(t) = D_t u(t) \in H_0$.
Лему доведено.
Розглянемо властивості допоміжної крайової задачі:

$$L_0 u(t) \equiv -D_t^2 u(t) = f(t), \quad f \in L_2\,(0,1)\,, \tag{1}$$

$$\begin{cases} l_0^0 u \equiv u(0) + u(1) = 0, \\ l_1^0 u \equiv u(0) - u(1) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Через L_0 позначимо оператор задачі (1), (2) породжений операцією $L_0 v \equiv -D_t^2 v$, $D\,(\mathrm{L}_0) \equiv \{v\,(t) \in W_2^2\,(0,1) : v\,(0) = v\,(1) = 0\}$, $V\,(\mathrm{L}_0) \equiv \{v_k^0 \in L_2\,(0,1) : v_k^0(t) = \sqrt{2}\sin \pi k t, k \in N\}$. Введемо простір $H(L_0)-$ замикання множини $D(L_0)$ за нормою $\| u \|^2_{H(L_0)} = \| u \|^2_{L_2(0,1)} + \| D_t^2 u \|^2_{L_2(0,1)}$.

Спектральні властивості оператора L_0 описує наступна відома теорема:

Теорема 1. *Правильними є такі два твердження:*

1. Точковий спектр $\sigma_0(\mathrm{L}_0)$ оператора L_0 складається з чисел

$$\sigma_0\left(\mathrm{L}_0\right)=\left\{\lambda_k=\pi^2k^2, k=1,2,...\right\}.$$

2. Множина власних функцій $V(L_0)$ оператора L_0 утворює ортонормовану базу простору $L_2\left(0,1\right)$.

Нехай $\mathrm{L}_0^{\mathrm{i}}: H_i\to L_2\left(0,1\right)-$ звуження оператора L_0 на простори H_i, $(i=0,1)$,
$V_i\left(\mathrm{L}_0\right)\equiv\left\{v^0_{2r-(-1)^i}\in V\left(\mathrm{L}_0\right)\bigcap H_i,\ r\in N\right\}$, $\sigma_i\left(\mathrm{L}_0\right)\equiv\left\{\lambda_{2r-(-1)^i}\in\sigma\left(\mathrm{L}_0\right),\ r\in N\right\}$.

Лема 5. *Правильними є такі твердження:*
1. Оператор $\mathrm{L}_0^{\mathrm{i}}$, має спектр $\sigma_i(\mathrm{L}_0)$ та систему власних функцій $V_i(\mathrm{L}_0)$, яка утворює ортонормовану базу простору H_i, $(i=0,1)$.
2. L_0=$\mathrm{L}_0^0+\mathrm{L}_0^1$.

Доведення. Виберемо довільну функцію $u\in H_0\bigcap H(L_0)$. Тоді з леми 4 отримаємо $-D_t^2u\in H_0$. Враховуючи рівність (1) та твердження 4 леми 1 отримаємо, $-D_t^2u=f, f\in H_0$. З означення оператора L_0^0 випливає, що умова $l_1^0u=0$ виконується автоматично. При цьому перша крайова умова (2) набирає вигляду $l_0^0u\equiv 2u(0)=0$.
Функція $u\in H_0\bigcap H(L_0)$ є розв'язком задачі:
$-D_t^2u=f,\ f\in H_0, l_0^0u\equiv u(0)+u(1)=2u(0)=0.$
Цій задачі відповідає оператор L_0^0.
Аналогічно для функції $u\in H_1\bigcap H(L_0)$ отримаємо крайову задачу:
$-D_t^2u=f,\ f\in H_1,\ l_1^0u\equiv u(0)-u(1)=2u(0)=0.$
При цьому умова $l_0^0u=0$ справджується за означення простору H_1. Враховуючи лему 3 отримаємо рівність: $\mathrm{L}_0=\mathrm{L}_0^0+\mathrm{L}_0^1$.
Оскільки H_i є підпросторами простору $L_2(0,1)$, то за означенням системи $V(L_0)$ отримуємо, що $V_i(L_0)-$ ортонормовані бази в просторах $H_i,(i=0,1)$.
Лему доведено.

Введемо позначення: M є множина замкнутих, щільно визначених операторів з $L_2\left(0,1\right)$ в $L_2\left(0,1\right)$, $M_j\equiv\left\{S\in M: SI=\left(-1\right)^{j+1}S,\ IS=\left(-1\right)^jS\right\}$, $(j=0,1)$.

Лема 6. *Якщо оператор $S\in M_j$ то $S: H_{1-j}\bigcap D\left(S\right)\to H_j, S: H_j\bigcap D\left(S\right)\to 0,\ (j=0,1)$.*

Доведення. Нехай $j=1$, тоді за означенням множини M_1 для довільного оператора $S\in M_1$ справджуються рівності: $SI=S, IS=-S$. Тому $S=\frac{S+S}{2}=\frac{S+SI}{2}=Sp_0,\ S=\frac{S+S}{2}=\frac{S-IS}{2}=\frac{E-I}{2}S=p_1S.$
Отже, ми отримали, що $S: H_0\bigcap D(S)\to H_1$.
Оскільки p_0,p_1- ортопроектори в $L_2(0,1)$, то для довільної функції $u\in H_1$ отримуємо рівність $Su=Sp_1u=Sp_0p_1u=0$. Аналогічно доводимо випадок для $j=0$.
Лему доведено.

Лема 7. *Нехай $S\in M_j$, тоді $S^2=0$, $(j=0,1)$.*

Доведення. Розглянемо випадок для $j=1$. Нехай $v\in D(S^2), v=v_0+v_1, v_0\in H_0, v_1\in H_1$. Позначимо $Sv=u_1$. Тоді, враховуючи, що оператор $S\in M_1$, отримаємо з твердження леми 6: $S: H_1\bigcap D\left(S\right)\to 0,\ \ S: H_0\bigcap D\left(S\right)\to H_1$. Тобто $u_1\in H_1$.

Отже, $S^2(v) = S(Sv) = S(S(v_0 + v_1)) = S(u_1) = 0$. Для $j = 0$ доведення проводиться аналогічно.
Лему доведено.

Нехай оператор $Q \in M_1$, $Q : W_2^2(0,1) \to L_2(0,1)$.
Розглянемо крайову задачу:

$$L_Q u(t) \equiv L_0 u(t) + Qu(t) = f(t), \quad f(t) \in L_2(0,1), \tag{3}$$

$$\begin{cases} l_0^0 u \equiv u(0) + u(1) = 0, \\ l_1^0 u \equiv u(0) - u(1) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Через $\mathrm{L_Q}$ позначимо оператор задачі (3), (4), $D(\mathrm{L_Q}) = D(\mathrm{L_0})$.
Спектральні властивості оператора L_Q описує наступна теорема:

Теорема 2. *Для довільного оператора $Q \in M_1$ виконується наступне:*
1. Множини власних значень операторів $\mathrm{L_0}$ та $\mathrm{L_Q}$ співпадають;
2. Система власних векторів $V(\mathrm{L_Q})$ цього оператора повна в просторі $L_2(0,1)$.

Доведення. Побудуємо елементи системи $V(L_Q)$:

$$v_k(t,Q) = v_k^0(t) + v_k^1(t,Q), (k \in N). \tag{5}$$

Для $k = 2r, v_{2r}^0(t) \in H_1$. З того, що $Q \in M_1$, маємо $Q : H_1 \to 0, Qv_{2r}^0(t) = 0, L_Q v_{2r}^0 = \lambda_{2r} v_{2r}^0, (r \in N)$.
Отже,

$$v_{2r}(t,Q) = v_{2r}^0(t), \ (r \in N). \tag{6}$$

Для $k = 2r - 1$ вибираємо невідому функцію $v_{2r-1}^1(t,Q)$ з множини H_1.
Тому,

$$Qv_{2r-1}^1(t,Q) = 0, \ (r \in N).$$

Підставляючи (3) в рівняння $L_Q v_k(t,Q) = \lambda v_k(t,Q)$ для $k = 2r - 1$ отримуємо

$$(-D_t^2 + Q)(v_{2r-1}^0(t) + v_{2r-1}^1(t,Q)) = \lambda_{2r-1}(v_{2r-1}^0(t) + v_{2r-1}^1(t,Q)), \ (r \in N). \tag{7}$$

Тому,

$$\left(-D_t^2 - \lambda_{2r-1}\right) v_{2r-1}^1(t,Q) = -Qv_{2r-1}^0(t), \ (r \in N).$$

Введемо в розгляд оператор $S : v_k^0(t) \equiv v_k^1(t,Q), (k \in N)$, при цьому $Sv_{2r}^0 = 0$, $Sv_{2r-1}^0(t) \equiv v_{2r-1}^1(t,Q) \quad , (r \in N)$.

Оскільки $\lambda_{2r-1}v_{2r-1}^0 = -D_t^2 v_{2r-1}^0 = L_0 v_{2r-1}^0$, то $Qv_{2r-1}^0 = (SL_0 - L_0 S)v_{2r-1}^0$.
За означенням операторів Q та S маємо: $0 = Qv_{2r}^0 = (SL_0 - L_0 S)v_{2r}^0, (r \in N)$.
Отже,

$$Qv_n^0 = (SL_0 - L_0 S)v_n^0, (n \in N).$$

Враховуючи рівності (5), (7) отримуємо

$$v_k(t,Q) = (E + S)v_k^0(t), (k \in N).$$

З рівності (4) випливає, що $\sigma(L_0) \subset \sigma(L_Q)$.

Покажемо, що система $\{v_k(t,Q)\}_{k=1}^{\infty}$ повна в просторі $L_2(0,1)$.
Нехай h довільний елемент з простору $L_2(0,1)$. Тоді, за лемою 2 його можна подати у вигляді суми $h = h_0 + h_1$, де $h_1 \in H_1, h_0 \in H_0$.
Для $k = 2p-1$ маємо:
$(h, v_{2p-1})_{L_2(0,1)} = (h_0 + h_1, v_{2p-1}^0)_{L_2(0,1)} = (h_0, v_{2p-1}^0)_{L_2(0,1)} = 0,\ (p \in N)$. Оскільки система $\{v_{2p-1}^0\}_{p=1}^{\infty}$ тотальна в просторі H_0, то $h_0 = 0$, тому $h = h_1$.
Для $k = 2p$ враховуючи, що $v_{2p}^1 \in H_0$ отримаємо $(h_1, v_{2p}^1)_{L_2(0,1)} = 0$, тому $(h_1, v_{2p})_{L_2(0,1)} = (h_1, v_{2p}^0 + v_{2p}^1)_{L_2(0,1)} = (h_1, v_{2p}^0)_{L_2(0,1)} = 0, (p \in N)$. З тотальності системи $\{v_{2p}^0\}_{p=1}^{\infty}$ в просторі H_1 випливає, що $h_1 = 0$, а отже $h \equiv 0$. Тобто система $V(L_Q)-$ повна (тотальна) в просторі $L_2(0,1)$ і $\sigma(L_0) = \sigma(L_Q)$.
Теорему доведено.

1. *Каленюк П.И., Баранецкий Я.Е., Нитребич З.Н.* Обобщенный метод разделения переменных. К., 1993.- 229 с.
2. *Баранецький Я.О., Каленюк П.І., Ярка У.Б.* Збурення крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.// Вісн. держ. ун-ту "Львівська політехніка". 1998. № 337 - с. 70-73.
3. *Ярка Уляна.* Спектральні властивості граничної задачі для абстрактного диференціального рівняння.// Вісн. Львів. ун-ту. сер. мех. мат. 2000. Вип. 56. с. 70-73.
4. *У.Б.Ярка.* Про один клас крайових задач для диференціально-функціональних рівнянь еліптичного типу, ізоспектральних задач Діріхле для рівняння Пуассона.// Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. сер. мат. 2004. Вип. 191-192. с. 146-150.

Одержано 10.04.2012