

УДК 519.21

Д. В. Гусак (Інститут математики НАН України)

ПРО НАБЛИЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ БАНКРУТСТВА ДЛЯ ПРОЦЕСІВ РИЗИКУ З ВИПАДКОВИМИ ПРЕМІЯМИ

Earlier many authors obtain corresponding approximations of the ruin probability for classic (semi-continuous) risk processes $\xi(t) = u + Ct - S(t)$ ($u > 0$) with the linear premium rate function $C(t) = Ct$ and with the claim processes $S(t) = \sum_{k \leq N_1(t)} Y_k$ ($N_1(t) = P_{ois}(\lambda_1)$, $0 < \lambda_1$ – the intensity of claims Y_k). Analogies of some approximations are established for the case, when the premium process is stochastic: $C(t) = \sum_{k \leq N_2(t)} X_k$ ($N_2(t) = P_{ois}(\lambda_2)$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ – the intensity of premiums $X_k - \exp(b)$, $b > 0$).

Раніше різними авторами одержані відповідні наближення ймовірності банкрутства для класичних (напівнеперервних) процесів ризику $\xi(t) = u + Ct - S(t)$ ($u > 0$) з лінійною функцією премій $C(t) = Ct$ і процесом вимог $S(t) = \sum_{k \leq N_1(t)} Y_k$ ($N_1(t) = P_{ois}(\lambda_1)$, $0 < \lambda_1$ – інтенсивність вимог Y_k). В статті наводяться аналоги деяких наближень для випадку, коли преміальний процес випадковий: $C(t) = \sum_{k \leq N_2(t)} X_k$ ($N_2(t) = P_{ois}(\lambda_2)$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ – інтенсивність премій $X_k - \exp(b)$, $b > 0$).

Розглянемо спочатку резервний процес ризику $R_u(t)$ та надлишковий процес вимог $\zeta(t)$ класичного типу

$$\begin{cases} R_u(t) = u + Ct - S(t), & C > 0, u > 0, \\ \zeta(t) = S(t) - Ct, & S(t) = \sum_{k \leq N(t)} Y_k, \end{cases} \quad (1)$$

де $N(t)$ – простий пуассонівський процес з $\lambda > 0$, функція розподілу (ф.р.) вимог Y_k :
 $F(x) = \mathbf{P}\{Y_k < x\}$, $x \geq 0, \forall k \geq 1$. Припускаємо, що $m = \mathbf{E}\zeta(1) < 0$, тоді коефіцієнт страхової надбавки (safety security loading)

$$\delta = \rho = \frac{C - \lambda\mu_1}{\lambda\mu_1} > 0, m = \lambda\mu_1 - C, \mu_k = \mathbf{E}Y_1^k, k = \overline{1, 3} \quad (2)$$

Ймовірність банкрутства визначається співвідношенням

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= \mathbf{P}\{R_u(t) < 0 \text{ для деякого } t > 0\}, \text{ або} \\ \Psi(u) &= \mathbf{P}\{\zeta(t) > u \text{ для деякого } t > 0\} \end{aligned} \quad (3)$$

Введемо позначення для функціоналів $\xi(t) = R_0(t)$ та $\zeta(t)$:

- $\xi^\pm(t) = \sup_{0 \leq t' \leq t} (\inf) \xi(t')$,
- $\xi^\pm = \sup_{0 \leq t < \infty} (\inf) \xi(t)$,
- $\tau_u^- = \inf\{t > 0 : \xi(t) < -u\}$,

- $\zeta^\pm(t) = \sup_{0 \leq t' \leq t} (\inf) \zeta(t')$,
- $\zeta^\pm = \sup_{0 \leq t < \infty} (\inf) \zeta(t)$,
- $\tau^+(u) = \inf\{t > 0 : \zeta(t) > u\}$;

$\tau_u^- \doteq \tau^+(u)$ визначають момент 1-го банкрутства.

Ймовірність банкрутства $\Psi(u)$ та ймовірність виживання $\phi(u) = 1 - \Psi(u)$ визначаються також через ф.р. абсолютних екстремумів ξ^-, ζ^+ .

$$\Psi(u) = \mathbf{P}\{\xi^- < -u\} = \mathbf{P}\{\zeta^+ > u\}, \quad u > 0 \quad (4)$$

Ймовірність банкрутства на скінченному інтервалі $[0, t]$ визначається через ф.р. $\xi^-(t), \zeta^+(t)$:

$$\Psi(t, u) = \mathbf{P}\{\xi^-(t) < -u\} = \mathbf{P}\{\tau_u^- < t\} = \mathbf{P}\{\zeta^+(t) > u\} = \mathbf{P}\{\tau^+(u) < t\}. \quad (5)$$

Якщо позначити θ_s - показниково розподілену випадкову величину з параметром $s > 0$, тоді перетворення Лапласа-Карсона $\Psi(t, u)$ виражається так

$$s \int_0^\infty e^{-st} \Psi(t, u) dt = \mathbf{P}\{\zeta^+(\theta_s) > u\} = \mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) < -u\}.$$

Знайти явний вигляд $\Psi(u)$ (як і $\Psi(t, u)$ не так просто (хіба що у випадку, коли вимоги Y_k показниково розподілені). У загальному випадку виникає потреба у знаходженні практичних оцінок для $\Psi(u)$, зокрема при $u \rightarrow \infty$. Одною з перших оцінок для $\Psi(u)$ була одностороння оцінка (так звана нерівність Крамера-Лундберга (див. [1]- [4])

$$\Psi(u) \leq e^{-Ru}, \quad u > 0, \quad R - \text{показник Крамера-Лундберга} \quad (6)$$

R визначається як мінімальний додатний корінь рівняння Лундберга

$$k(r) = 0, \quad k(r) = \ln \mathbf{E} e^{r\zeta(1)} = -rC + \lambda(r\tilde{F}(r) - 1), \quad \tilde{F}(r) = \int_0^\infty e^{rx} \bar{F}(x) dx. \quad (7)$$

Пізніше при відповідних умовах на $\zeta(t)$ одержані односторонні узагальнення (6)

$$\Psi(u) \leq ce^{-Ru}, \quad 0 < c < 1, \quad u > 0, \quad (8)$$

та двосторонні нерівності (див теорему 6.3 в [1], або теорему 5.6 в [5])

$$c_- e^{-Ru} \leq \Psi(u) \leq c_+ e^{-Ru}, \quad (9)$$

$$c_\mp = \inf_{x \geq 0} (\sup) \frac{\bar{F}(x)}{\int_0^\infty e^{R(y-x)} dF(x)}, \quad 0 < c_- < c_+ < 1.$$

Показник Крамера-Лундберга R також нелегко знайти, оскільки рівняння (7) (яке може бути і трансцендентним, див. далі приклад 1) не завжди піддається розв'язанню. Тому використовуються різні способи обчислення наближень R , сталих c, c_\pm в термінах

$$m_k = \mathbf{E}\zeta(1)^k, \quad (k \leq 3), \quad \text{або } \mu_k = \mathbf{E}y_1^k, \quad \text{та } \rho = \delta = \frac{|\mathbf{E}\zeta(1)|}{\lambda\mu_1} > 0.$$

Співвідношення для $\Psi(u)$ наводяться в додатку IV в [5], його наближення при $u \rightarrow \infty$ в додатку V в [5] в основному для класичного випадку

а) $C(t) = Ct, C > 0, \zeta(t) = S(t) - Ct$ – класичний процес ризику (див.(1)).

Ми розглянемо випадок випадкових премій

б) $C(t) \neq Ct$,

$$\zeta(t) = S(t) - C(t), S(t) = \sum_{k \leq N_1(t)} Y_k, C(t) = \sum_{k \leq N_2(t)} X_k, \quad (10)$$

$$K(r) = \lambda_1 r \tilde{F}(r) - \lambda_2 r(r+b)^{-1}.$$

де $N_{1,2}(t) - P_{ois}(\lambda_{1,2})$ – незалежні пуассонівські процеси з інтенсивностями $\lambda_{1,2} > 0, (\lambda = \lambda_1 + \lambda_2)$ премії $X_k > 0$ - показниково розподілені з параметром $b > 0, (X_k = \exp(b))$. Зауважимо, що коефіцієнт страхової надбавки для випадку б) відрізняється від (2) і має вигляд

$$\rho = \frac{|m|}{\mathbf{E}S(1)} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 b \mu_1}{\lambda_1 b \mu_1} = \frac{q - p b \mu_1}{p b \mu_1} > 0, p = \frac{\lambda_1}{\lambda}, q = \frac{\lambda_2}{\lambda}, \lambda = \lambda_1 + \lambda_2. \quad (11)$$

Завдання полягає в тому, щоб одержати аналоги деяких наближень імовірності банкрутства, раніше одержаних в [1–3] для випадку а), і для процесів (10) з випадковими преміями (випадок б)).

Почнем з наближень $\Psi_0(u)$ при $C = 1$ і $\Psi_1(u) = \Psi_R(u)$ при $\forall C > 0$ – наближення Реньї (див. таблицю V в Додатках [5]). Для цього замінимо процес $\zeta(t)$ в (10) "наближеним" процесом із задачі (20.2) в [6] або [7] зі складовою $C(t) = \sum_{k \leq N_2(t)} X_k, X_k = \exp(b)$ – показниково розподілені з $b > 0, \mathbf{E}C(1) = \lambda_2 b^{-1}$ (по суті $S(t)$ заміняється на $S_0(t)$),

$$\zeta_0(t) = S_0(t) - C(t), S_0(t) = \sum_{k \leq N_0(t)} Y_k^0, N_0(t) = P_{ois}(\lambda_0), Y_k^0 = \exp(a), a > 0. \quad (12)$$

Припускаємо, що $\mathbf{E}S_0(1)^k = \mathbf{E}S(1)^k$ ($k = 1, 2$), $m = \mathbf{E}\zeta(1) = \lambda_1 \mu_1 - \lambda_2 b^{-1} < 0$. Тоді мають місце співвідношення

$$\begin{cases} \lambda_1 \mu_1 = \lambda_0 a^{-1} \\ \lambda_1 \mu_2 = 2 \lambda_0 a^{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = a \lambda_1 \mu_1 \\ \lambda_1 \mu_2 = 2 \lambda_1 \mu_1 a^{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2 \mu_1}{\mu_2}, \\ \lambda_0 = \frac{2 \lambda_1 \mu_1^2}{\mu_2}, \end{cases} \quad \lambda_0 + \lambda_2 = \frac{2 \lambda_1 \mu_1^2 + \lambda_2 \mu_2}{\mu_2},$$

що встановлюють зв'язок між параметрами $\zeta(t)$ та $\zeta_0(t)$.

Рівняння Лундберга для $\zeta_0(t)$ при $\mathbf{E}\zeta_0(1) < 0$ зводиться до лінійного і визначає корінь $r = \rho_+^0 > 0$:

$$\frac{\lambda_0}{a-r} = \frac{\lambda_2}{b+r} \Rightarrow \rho_+^0 = \frac{ab|m|}{\lambda_0 + \lambda_2} = \frac{2\mu_1|m|b}{\mu_2(\lambda_0 + \lambda_2)} = \frac{2\mu_1|m|b}{2\lambda_1\mu_1^2 + \lambda_2\mu_2}, \quad (13)$$

$$p_+^0 = \frac{\rho_+^0}{a} = \frac{b|m|}{\lambda_0 + \lambda_2}, q_+^0 = 1 - \frac{b|m|}{\lambda_0 + \lambda_2} = \frac{b + b\lambda_1\mu_1}{\lambda_0 + \lambda_2} = \frac{\lambda_1\mu_1(2\mu_1 + \mu_2b)}{2\lambda_1\mu_1^2 + \lambda_2\mu_2}.$$

Отже згідно з (3.105) в [5] ρ_+^0 визначає розподіл $\zeta_0^+ = \sup_{0 \leq t < \infty} \zeta_0(t)$ і має місце

Пропозиція 1. Якщо за "наближення" $\zeta(t)$ в (10) вибрати процес $\zeta_0(t)$ в (12), то корінь $r = \rho_+^0$ рівняння Лундберга для $\zeta_0(t)$ визначає розподіл ζ_0^+ (а отже і відповідне наближення $\Psi_0(u)$)

$$\Psi(u) \sim \Psi_0(u) = \mathbf{P}\{\zeta_0^+ > u\} = q_+^0 e^{-\rho_+^0 u}, \rho_+^0 = a\rho_+^0, u > 0. \quad (14)$$

Значення q_+^0 та ρ_+^0 згідно з (13) виражаються в термінах моментів $\zeta(t)$ 1-го й 2-ого порядків. Після заміни в (14) q_+^0 на $q_+ = \Psi(0)$ (див. табл. II в [5]) одержується наближення

$$\Psi(u) \sim \Psi_R^0(u) = q_+ e^{-\frac{2\mu_1 |m| bu}{2\lambda_1 \mu_1^2 + \lambda_2 \mu_2}}, u \rightarrow \infty, q_+ = p(1 + b\mu_1) = \frac{1 + p\rho}{1 + \rho}. \quad (15)$$

Отже, одержане наближення (14) для $\zeta(t)$ є аналогом наближення $\Psi_0(u)$ (з $C = 1$), а (15) – аналогом наближення $\Psi_R(u)$ ($\forall C > 0$) у таблиці V [5].

Щоб одержати аналог наближення Де Вільдера (див. $\Psi_3(u)$ в таблиці V [5]) за "наближення" до $\zeta(t)$ в (10) виберем процес $\zeta_0(t) = S_0(t) - C_0 t$ ($C_0 > 0, S_0(t)$.(12)) так, щоб $\mathbf{E}\zeta_0(1)^k = \mathbf{E}\zeta(1)^k$ ($k = \overline{1, 3}, m = \mathbf{E}\zeta(1) < 0$). Тоді похідні кумулянт $k(r) = \mathbf{E}e^{r\zeta(1)}$ і $k_0(r) = \mathbf{E}e^{r\zeta_0(1)}$ задовольняють умову: $k^{(i)}(0) = k_0^{(i)}(0)$ ($i = \overline{1, 3}$), з якої випливає система рівнянь для визначення невідомих параметрів (λ_0, C_0, a)

$$\begin{cases} \lambda_1^0 a^{-1} - C_0 = m \quad (m = k'(0) = \lambda_1 \mu_1 - \lambda_2 b^{-1}) \\ 2\lambda_1^0 a^{-2} = k_2 \quad (k_2 = \lambda_1 \mu_2 + 2\lambda_2 b^{-2}) \\ 6\lambda_1^0 a^{-3} = \lambda_1 \mu_3 - 6\lambda_2 b^{-3} = k_3. \end{cases}$$

Для розв'язання системи визначимо з 1-го рівняння $C_0 = |m| + \lambda_1^0 a^{-1}$ і позначимо $x = \lambda_1^0 a^{-2}$. З двох останніх рівнянь визначаються невідомі x та a : $x = \frac{1}{2}k_2$, $a = 6x(\lambda_1 \mu_3 - 6\lambda_2 b^{-3})^{-1}$. Звідси визначаються всі невідомі параметри

$$a = \frac{3k_2}{2(\lambda_1 \mu_3 - 6\lambda_2 b^{-3})}, \lambda_1^0 = \frac{k_2^3}{2(\lambda_1 \mu_3 - 6\lambda_2 b^{-3})}, C_0 = |m| + \frac{3k_2^2}{2(\lambda_1 \mu_3 - 6\lambda_2 b^{-3})}. \quad (16)$$

Єдиний додатний корінь рівняння Лундберга ($k_0(r) = 0$), що зводиться до лінійного: $C_0(r - a) + \lambda_1^0 = 0 \Rightarrow \rho_+^0 = a - \lambda_1^0 C_0^{-1}$ визначає розподіл ζ_0^+ (див. (3.105) в [5]), а отже і відповідне наближення для $\Psi(u)$. Таким чином справедлива

Пропозиція 2. У випадку б) для процесу $\zeta(t)$ в (10) імовірність банкрутства $\Psi(u)$ визначається аналогом наближення Де Вільдера

$$\Psi(u) \sim \Psi_2(u) = \Psi_{DV}^0(u) = \mathbf{P}\{\zeta_0^+ > u\} = q_+^0 e^{-\rho_+^0 u}, u > 0 \quad (17)$$

$$\rho_+^0 = a - \lambda_1^0 C_0^{-1}, q_+^0 = \lambda_1^0 (a C_0)^{-1} \quad (\text{див. табл. II в [5], у випадку а) } q_+ = \frac{\lambda \mu}{C}),$$

де значення параметрів a, λ_0, C_0 згідно з (16) визначається через перші три моменти процесу $\zeta(t)$ ($\mu_k = \mathbf{E}Y_1^k, \mathbf{E}X_1^k = k!b^{-k}, k = \overline{1, 3}$). Кінцеві значення q_+^0, ρ_+^0 див. далі в табл. V в [5] 2.б).

Для виведення аналога наближення Беекмана–Боверса $\Psi_3(u) = \Psi_{BB}(u)$ (див. табл. V в [5]) розглянемо при $m = \mathbf{E}\zeta(1) < 0$ умовну імовірність банкрутства

$$H(u) = \mathbf{P}\{\zeta^+ > u | \zeta^+ > 0\} = \frac{\Psi(u)}{q_+} \quad (0 < q_+ = \Psi(0)). \quad (18)$$

Оскільки $H(0) = 1$, $H(\infty) = 0$, то $H(u)$ можна замінити хвостом гамма-розподілу $G(x) = G_{\alpha, \beta}(x)$, перші два моменти якого

$$\mu_* = \int_{x \geq 0} x dG(x) = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \sigma_*^2 = \int_{x \geq 0} (x - \mu_*)^2 dG(x) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

збігаються з відповідними моментами ζ^+ . Для обчислення цих моментів використаємо формулу Полячека–Хінчина для випадку б) (див. далі 1 б) у таблиці IV в [5])

$$\varphi_+(z) = \mathbf{E}e^{-z\zeta^+} = \frac{p_+}{1 - q_+ \tilde{\varphi}_0(z)}, \quad p_+ = \mathbf{P}\{\zeta^+ = 0\} = 1 - q_+; \quad (19)$$

$$\tilde{\varphi}_0(z) = \frac{1}{q_+} \int_0^\infty e^{-xz} dF_*(x), \quad \bar{F}_*(0) = \int_0^\infty dF_*(x) = q_+, \quad \tilde{\varphi}_0(0) = 1,$$

$$dF_*(x) = dF(x) + b\bar{F}(x)dx, \quad \bar{F}(x) = p\mathbf{P}\{Y_1 > x\}, \quad x > 0.$$

З (19) випливає, що шукані моменти ζ^+ виражаються через

$$|\tilde{\varphi}'_0(0)| = \frac{p}{q_+}(\mu_1 + \frac{b\mu_2}{2}), \quad \tilde{\varphi}''_0(0) = \frac{p}{q_+}(\mu_2 + \frac{b\mu_3}{3}), \quad p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

а саме

$$\begin{aligned} m_+ &:= \mathbf{E}\zeta^+ = \frac{q_+}{p_+} |\tilde{\varphi}'_0(0)|, \quad m_+^2 = \left(\frac{q_+}{p_+} \tilde{\varphi}'_0(0)\right)^2, \\ \mathbf{E}(\zeta^+)^2 &= 2 \frac{q_+^2}{p_+^3} \tilde{\varphi}'_0(0)^2 + \frac{q_+}{p_+} \tilde{\varphi}''_0(0) = \frac{2m_+^2}{p_+ q_+} + \frac{q_+}{p_+} \tilde{\varphi}''_0(0), \\ D\zeta^+ &= m_+^2 \frac{2 - p_+ q_+}{p_+ q_+} + \frac{p}{p_+} (\mu_2 + \frac{b\mu_3}{3}), \quad q_+ = p(1 + b\mu_1). \end{aligned} \quad (20)$$

З умови рівності моментів ζ^+ та ф.р. $G(x)$:

$$\frac{\alpha}{\beta} = m_+, \quad \frac{\alpha}{\beta^2} = D\zeta^+ \Rightarrow \beta = \frac{m_+}{D\zeta^+}, \quad \alpha = m_+ \beta = \frac{m_+^2}{D\zeta^+}. \quad (21)$$

Згідно з (20) m_+ , $D\zeta^+$ виражаються через перші три моменти вимог: $\mathbf{E}Y_1^k = \mu_k$ і премій $\mathbf{E}X_1^k = k!b^{-k}$ ($k = \overline{1, 3}$).

Залежність α і β від страхової надбавки (11)

$$\rho = \frac{q - pb\mu_1}{pb\mu_1} = \frac{p_+}{q - p_+} = \frac{p_+}{q_+ - p}$$

у випадку б) складніша ніж у випадку а).

Отже, в термінах α і β – виражених через перші моменти вимог і премій має місце

Пропозиція 3. Для процесу $\zeta(t)$ з (10) при $m_k = \mathbf{E}\zeta(1)^k < \infty$, ($k = 1, 3$), $m_1 < 0$ має місце аналог наближення Беекмана–Боверса

$$\Psi(u) \sim \Psi_3(u) = \Psi_{BB}^0(u) = p(1 + b\mu_1) \int_{\beta u}^{\infty} \Gamma(\alpha)^{-1} y^{\alpha-1} e^{-y} dy, \quad (22)$$

параметри якого α, β визначаються в (21).

Ф.р. $F(x)$, хвосту яких мають уповільнене спадання порівняно з показниковим при $x \rightarrow \infty$ називають розподілами з важкими хвостами. Зокрема, таке спадання мають хвосту розподілів:

Вейбула–Гнеденко: $\bar{F}(x) = \exp\{-x^\beta\}$ ($0 < \beta < 1, x > 0$);

розподіл Парето: $\bar{F}(x) = (1 + x)^{-\alpha}$ ($\alpha > 0, x > 0$);

логнормальний розподіл: $\bar{F}(x) = \bar{\Phi}(\frac{\log x - m}{\sigma})(\sigma^2, m > 0), x > 0$.

Останнє наближення $\Psi_9(u)$ для "важких хвостів" можна одержати за допомогою перших двох формул (1)–(2) з Додатку IV в [5] у обох випадках а), б). Згідно з позначеннями в [1], [3] та асимптотичними співвідношеннями в [1, р. IX, с. 254]

$$\bar{\bar{F}}(x) = \mu_1 \bar{F}_I(x), \quad \bar{F}_I(x)^{*n} \approx n \bar{F}_I(x), \quad n \geq 2. \quad (23)$$

Клас розподілів з важкими хвостами називають підпоказниковим (subexponential) і позначають через S .

Теорема. а) Якщо для процесу $\zeta(t)$ в (1) ф.р. $F(x) = \mathbf{P}\{Y_k < x\} \in S$, тоді при $m < 0$

$$\Psi(u) \sim \Psi_9(u) = \rho^{-1} \bar{F}_I(u) = \frac{1}{\rho \mu_1} \bar{\bar{F}}(u), \quad u \rightarrow \infty; \quad \rho = \frac{C - \lambda \mu_1}{\mu_2}; \quad (24)$$

б) Якщо для $\zeta(t)$ в (10) премії $X_k = \exp(b)$ ($b > 0$), $F(x) \in S$, тоді при $m < 0$

$$\Psi(u) \sim \Psi_9^0(u) = \frac{1}{p_+} \bar{F}_*(u) = \frac{\lambda}{b|m|} \bar{\bar{F}}_*(u), \quad u \rightarrow \infty, \quad p_+ = \frac{q\rho}{1 + \rho}, \quad (25)$$

$$\bar{\bar{F}}_*(x) = \bar{F}(x) + b \bar{\bar{F}}(x), \quad x > 0, \quad \bar{\bar{F}}(x) = \int_x^{\infty} \bar{F}(y) dy.$$

Доведення. Обмежимося доведенням для випадку б), оскільки для випадку а) його можна знайти в [1]– [2]. Зауважимо, що $\bar{\bar{F}}_*(x)$ після "нормування" стає "хвостом" ф.р.

$$\bar{\bar{\Phi}}_I(x) = q_+^{-1} \bar{\bar{F}}_*(x), \quad \bar{\bar{F}}_*(0) = q_+ = \Psi(0). \quad (26)$$

Згідно з 2.б) в таблиці IV, що наводиться далі, має місце обернення формули Полячека–Хінчина для випадку б):

$$\Psi(u) = p_+ \sum_{n>0} \bar{\bar{F}}_*(u)^{*n}, \quad u > 0, \quad q_+ = \frac{1 + p\rho}{1 + \rho} = p(1 + b\mu_1), \quad p = \frac{\lambda_1}{\lambda}, \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2. \quad (27)$$

Після підстановки (23) у (27) одержимо

$$\Psi(u) = p_+ \sum_{n \geq 1} q_+^n \bar{\bar{\Phi}}_I(u)^{*n}. \quad (28)$$

Враховуючи, що $\bar{\Phi}_I^{*n}(u) \approx n\bar{\Phi}_I(u)$ і формулу

$$\sum_{n \geq 1} nx^n = x \sum_{n \geq 1} nx^{n-1} = x \left(\sum_{n \geq 0} x^n \right)' = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (29)$$

із (28) одержимо співвідношення

$$\Psi(u) \approx p_+ \bar{\Phi}_I(u) \sum_{n > 0} nq_+^n = \frac{q_+}{p_+} \bar{\Phi}_I(u) = \frac{1}{p_+} \bar{F}_*(u), u \rightarrow \infty. \quad (30)$$

Згідно з наслідком 20.4 в [6] або [7] $p_+ = b|m|\lambda^{-1}$, тоді з (30) випливає (25).

Зауважимо, що в таблиці V наближення $\Psi_8(u)$ в [5] справедливе для обох випадків а) і б) з відповідними значеннями $q_+ = \Psi(0)$: а) $q_+ = \frac{\lambda\mu}{C}$; б) $q_+ = p(1 + \mu_1 b)$.

Отже, таблиці IV-V в [5] після доповнення новими результатами, одержаними для випадку б), мають такий вигляд.

IV. Основні формули для $\Psi(u) = 1 - \phi(u) = \bar{\phi}(u) = \mathbf{P}\{\tau^+(u) < \infty\}$

1. Узагальнення формули Полячека-Хінчина

$$\mathbf{E}e^{-z\zeta^+} = \frac{p_+}{1 - q_+ \tilde{\varphi}_0(z)}; \quad \tilde{\varphi}_0(z) := \mathbf{E}[e^{-z\gamma^+(0)} \mid \zeta^+ > 0],$$

а) $\tilde{\varphi}_0(z) = \mu^{-1} \int_0^\infty e^{-zx} \bar{F}(x) dx; \quad \bar{F}(x) = \int_x^\infty dF(x);$

б) $\tilde{\varphi}_0(z) = q_+^{-1} \int_0^\infty e^{-zx} dF_*(x), \quad F_*(x) = F(x) + b\bar{F}(x), x \geq 0.$

2. Обернення формули Поляченка-Хінчина (див (5.16) та (6.60) в [5])

а) для напівнеперервного знизу процесу вимог $\zeta(t)$ ($q_+ = \lambda\mu C^{-1}$)

$$\Psi(u) = p_+ \sum_{n > 0} q_+^n \mu^{-n} \bar{\bar{F}}(u)^{*n}, \quad \bar{\bar{F}}(u) = \int_u^\infty \bar{F}(x) dx, \quad u > 0;$$

б) для майже напівнеперервного знизу процесу ризику $\zeta(t)$ ($p_+ = b|m|\lambda^{-1}$)

$$\Psi(u) = p_+ \sum_{n > 0} \bar{F}_*(u)^{*n}, \quad \bar{F}_*(u) = \bar{F}(u) + b\bar{\bar{F}}(u), \quad u > 0, \quad \mathbf{E}X_k = b^{-1}.$$

3. Формула, що впливає з мартингальності $X(t) = \mathbf{E}e^{-R_+\zeta(t)}$ ($k(R_+) = 0$).

$$\Psi(u) = e^{-R_+u} g_+(u, R_+), \quad g_+(u, z) = \mathbf{E}[e^{-z\gamma^+(u)}, \zeta^+ > u];$$

а) для напівнеперервного знизу надлишкового процесу вимог $\zeta(t)$

$$g_+(u, z) = \frac{\lambda}{C} \int_0^\infty e^{-zx} \bar{F}(u+x) dx + \frac{\lambda}{|m|} \int_{+0}^u \int_0^\infty e^{-zx} \bar{F}(u-y+x) dx d\phi(y);$$

б) для майже напівнеперервного знизу процесу ризику $\zeta(t)$

$$g_+(u, z) = \int_0^\infty e^{-zx} F'_*(u+x) dx + \frac{\lambda}{b|m|} \int_{+0}^u \int_0^\infty e^{-yz} F'_*(u-y+x) dx d\phi(y);$$

$$F'_*(x) = F'(x) + b\overline{F}(x), \overline{F}(x) = p\overline{F}_1(x), F_1(x) = P\{Y_1 < x\}, x > 0, p = \frac{\lambda_1}{\lambda}$$

4. Формула для $\Psi(u)$ в термінах "хвостів" 2-го порядку $\overline{\overline{F}}(x)$:

а) $\Psi(u) = \frac{\lambda}{C}\overline{\overline{F}}(u) + \frac{\lambda}{|m|} \int_0^u \overline{\overline{F}}(u-z)\phi'(z)dz, \Psi(0) = q_+ = \frac{\lambda\mu_1}{C};$

б) $\Psi(u) = \overline{F}_*(u) + \frac{\lambda}{|m|} \int_0^u \overline{F}_*(u-y)\phi'(y)dy,$

$\Psi(0) = q_+ = p(1 + b\mu'_k), \mu'_k = \mathbf{E}(Y_1)^k, k = 1, 2.$

5. Асимптотична формула (див. значення $\Psi(0)$ в (15), (16))

$$\Psi(u) = e^{-R_+u}(\Psi(0) + o(1)) \quad (u \rightarrow \infty)$$

а) $\Psi(0) = \frac{\lambda\mu_1}{C}$; б) $\Psi(0) = \overline{F}_*(0) = p(1 + b\mu'_1).$

V. Деякі наближення $\Psi_k(u) \sim \Psi(u)$ ($u \rightarrow \infty$) в термінах

$\mu_n = \int_0^\infty x^n dF(x), n = \overline{1, 3}, m = \mathbf{E}\zeta(1),$ (а) $\rho = \frac{C - \lambda\mu_1}{\lambda\mu_1} = \frac{p_+}{q_+} > 0;$

б) $\rho = \frac{q - pb\mu_1}{pb\mu_1} = \frac{p_+}{q_+ - p} > 0).$

1. Наближення Реньї $\Psi_1(u) = \Psi_R(u)$

а) $\Psi_R(u) = \frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{2\rho\mu_1 u}{\mu_2(1+\rho)}} = q_+ e^{-\frac{2\mu_1|m|u}{\mu_2 C}}, q_+ = \Psi(0) = \frac{\lambda\mu_1}{C}.$

б) $\Psi_R^0(u) = q_+ e^{-\frac{2\mu_1|m|bu}{2\lambda_1\mu_1^2 + \lambda_2\mu_2}}, q_+ = \Psi_R^0(0) = p(1 + b\mu_1), p = \frac{\lambda_1}{\lambda}, \lambda = \lambda_1 + \lambda_2.$

2. Наближення Крамера-Лундберга Ф. $\Psi_2(u) = \Psi_{CL}(u)$ ($R_+ > 0$)

а) $\Psi_{CL}(u) = \frac{|m|}{k'(R_+)} e^{-R_+u}, R_+ -$ корінь рівняння $k(R_+) = 0$ ($k(r)$ див. (7)).

б) $\Psi_{CL}^0(u) = \frac{|m|}{2qk'(R_+)} e^{-R_+u}, (k(r)$ див. (10), $q = \frac{\lambda_2}{\lambda}.$

3. Наближення Де Вільдера $\Psi_3(u) = \Psi_{DV}(u)$

а) $\Psi_{DV}(u) = \frac{3\mu_2^2}{3\mu_2^2 + 2\mu_1\mu_3\rho} \exp\{-\frac{6\mu_1\mu_2\rho u}{3\mu_2^2 + 2\mu_1\mu_3\rho}\}; \Psi_{DV}(0) < 1;$

б) $\Psi_{DV}^0(u) = q_+^0 e^{-\rho_+^0 u}; q_+^0 = \frac{2k_2^2 k_3}{3(2|m|k_3 + 3k_2^2)}, k_2 = \lambda_1\mu_2 + 2\lambda_2 b^{-1},$

$\rho_+^0 = \frac{3k_2 \cdot 2k_3(3|m| - k_2^2) + 9k_2}{3(2k_3|m| + 3k_2^2)}, k_3 = \lambda_1\mu_3 - 6\lambda_2 b^{-3}.$

4. Наближення Бекмана-Боверса $\Psi_4(u) = \Psi_{BB}(u)$

а) $\Psi_{BB}(u) = \frac{1}{1+\rho} \int_{\beta u}^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-x} dx, \alpha = \frac{1+\rho}{1+(c-1)\rho}, \beta = \frac{2\mu_1\rho}{\mu_2+(c-\mu_2)\rho}, c = \frac{4\mu_1\mu_3}{3\mu_2^2};$

б) $\Psi_{BB}^0(u) = q_+ \int_{Bu}^\infty \Gamma(\alpha)^{-1} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, q_+ = p(1 + b\mu_1),$

$\alpha = \mathbf{E}(\zeta^+)^2(D\zeta^+), \beta = \mathbf{E}\zeta_+(D\zeta^+)^{-1}; (\mathbf{E}(\zeta^+)^{1,2}, D\zeta^+)$ див.(20)-(21)).

5. Експоненційне наближення $\Psi_5(u) = \Psi_E(u)$

$$\Psi_E(u) = \exp\{-1 - \frac{2\rho\mu_1 u - \mu_2}{\sqrt{\mu_2^2 + \frac{4}{3}\rho\mu_1\mu_3}}\}, \Psi_E(0) = \exp\{(1 + \frac{4\rho\mu_1}{3\mu_2\mu_3})^{-1/2} - 1\}.$$

6. Дифузійне наближення $\Psi_6(u) = \Psi_D(u)$

$\Psi_D(u) = e^{-\frac{2\rho\mu_1 u}{\mu_2}}$ ($\Psi_D(0) = 1$ не дає нічого для $\Psi(0) = q_+).$

7. Наближення Ове Лундберга (сина Ф. Лундберга) $\Psi_7(u) = \Psi_{OL}(u)$

$\Psi_{OL}(u) = \Psi_D(u)[1 + (\rho u - \frac{\mu_2}{\mu_1})\frac{4\rho\mu_1\mu_3}{3\mu_2^2}], \Psi_{OL}(0) = 1 - \frac{4\rho\mu_1\mu_3}{3\mu_2^2} < 1.$

8. Наближення подібне до $\Psi_{CL}(u)$
 $\Psi_8(u) = \Psi_*(u) = \Psi(0)e^{-R_+u}$,
 а) $\Psi(0) = \frac{\lambda\mu_1}{C}$,
 б) $\Psi(0) = \bar{F}_*(0) = p(1+b\mu_1)$ (R_+ - корінь рівняння Лундберга \mathcal{L}_0 : $k(R_+) = 0$)
 9. Наближення для випадку "важких" хвостів $\bar{F}(x)$: $\Psi_9(u) = \Psi_{**}(u)$,
 а) $\Psi_{**}(u) = (\rho\mu_1)^{-1}\bar{\bar{F}}(u) = \frac{1}{\rho}\bar{F}(u)$, $(\rho\mu_1)^{-1} = \lambda |m|^{-1}$,
 б) $\Psi_{**}^0(u) = \frac{1}{p_+}\bar{F}_*(u) = \frac{\lambda}{b|m|}\bar{F}_*(u)$, $\bar{F}_*(u) = \bar{F}(u) + b\bar{F}(u)$, $p_+ = \frac{q\rho}{1+\rho}$ (ρ див. в (11))

Приклад 1. Нехай $\zeta(t) = S(t) - t$ (> 0 , $t \geq 0$) - класичний процес ризику, стрибки (вимоги) якого Y_k в $S(t) = \sum_{k \leq N(t)} Y_k$ мають подвоєну гауссову щільність

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{P}\{Y_k < x\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; \Phi_I^0(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz, x > 0.$$

$N(t)$ - пуассонівський процес з інтенсивністю $\lambda > 0$, х.ф. стрибків Y_k

$$\varphi_0(\alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha Y_k} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i\alpha x - \frac{x^2}{2}} dx.$$

Як х.ф. $\zeta(\theta_s)$ так і кумулянта $\psi(\alpha) = \ln \mathbf{E}e^{i\alpha\zeta(\theta_s)}$ є трансцендентними функціями: $\psi(\alpha) = \lambda(\varphi_0(\alpha) - 1) - i\alpha C$, $\varphi(s, \alpha) = \mathbf{E}e^{i\alpha\zeta(\theta_s)} = \frac{s}{s - \psi(\alpha)}$. Дійсно після підстановки $i\alpha = r$, знаходимо:

$$\varphi_0(-ir) = \frac{2\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{\frac{2rz - z^2}{2}} dz = \frac{2\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{\frac{r^2 - (z-r)^2}{2}} dz = \lambda e^{\frac{r^2}{2}} (\Phi_I^0(r) + 1),$$

$$k(r) = \lambda e^{\frac{r^2}{2}} (\Phi_I^0(r) + 1) - \lambda - Cr. \quad (31)$$

Коефіцієнт страхової надбавки (2) виражається через $m = \mathbf{E}\zeta(1) < 0$, $\mu = \mathbf{E}Y_1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$, λ, C .

$$m = k'(0) = \frac{2\lambda}{\sqrt{2\pi}} - C, \delta = \rho = \frac{|m|}{\lambda\mu} = \frac{C - \lambda\mu}{\lambda\mu} > 0. \quad (32)$$

При $C = \lambda = 1$ $\delta = \rho = \frac{1-\mu}{\mu} > 0$ і виконання умови (32) забезпечує умову $\Psi(u) < 1$. Щоб знайти наближення ймовірності банкрутства слід розв'язати рівняння Лундберга (7), яке в даному прикладі зводиться до трансцендентного рівняння

$$e^{\frac{r^2}{2}} (\Phi_I^0(r) + 1) = 1 + r. \quad (33)$$

Додатний розв'язок (33) визначає показник Лундберга $R_+ = \rho_+ > 0$. Наближення для $R_+ = \rho_+ \approx 0,4$ знаходиться графічним способом. Згідно з (20.34) в [6] при $\lambda = 1$, $p_+ = |m|$, $q_+ = \mu = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$. Отже

$$\Psi(u) \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,4u}, \quad u \rightarrow \infty. \quad (34)$$

Не зменшуючи загальності, знову вважаємо $\lambda = 1$. Тоді згідно з (20.34) в [6] $\delta = \rho = \frac{C-\mu}{\mu} = \frac{p_+}{q_+} = \frac{|m|}{\mu}$. В умовах "чесної гри" ($p_+ = q_+ = \frac{1}{2}$) $= 2\mu = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}$, рівняння (7) зводиться до трансцендентного рівняння (з відповідним наближенням розв'язком)

$$e^{\frac{r^2}{2}} (\Phi_I^0(r) + 1) = 1 + \frac{4r}{\sqrt{2\pi}} \Rightarrow r = \rho_+ \approx 0,89. \tag{35}$$

Отже, в умовах "чесної гри": $q_+ = \Psi(0) = \frac{1}{2}$, $R_+ = \rho_+ \approx 0,89$,

$$\Psi(u) \approx \frac{1}{2} e^{-0,89u}, \quad u \rightarrow \infty. \tag{36}$$

За допомогою обернень формули Полячека–Хінчина (див.п. 2.а), б) в табл.IV) встановлюються наступні наслідки.

Наслідок 1. *Нехай $\zeta(t) = S(t) - Ct (C > 0, t \geq 0)$ – класичний процес ризику з показниково розподіленими вимогами*

$$F(x) = \mathbf{P}\{Y_k < x\} = 1 - e^{-ax}, \quad x \geq 0, a > 0, \mu = a^{-1}. \tag{37}$$

Тоді (не вдаючись до розв'язання рівняння Лундберга (7)) за оберненою формулою Полячека–Хінчина (див. п. 2а) в табл.IV)

$$\Psi(u) = p_+ \sum q_+^n \mu^{-n} \bar{F}(u)^{*n} \tag{38}$$

встановлюється співвідношення

$$\Psi(u) = q_+ e^{-ap_+u}, \quad q_+ = \lambda \mu C^{-1}, \quad p_+ = \frac{|m|}{C} = \frac{aC - \lambda}{aC}. \tag{39}$$

Доведення. Формула Полячека–Хінчина визначає генератрису ζ^+ через умовну генератрису $\gamma^+(0)$ – першого перестрибку через 0,

$$\mathbf{E} e^{-z\zeta^+} = \frac{p_+}{1 - q_+ \tilde{\varphi}_0(z)}, \quad \tilde{\varphi}_0(z) = \mathbf{E}[e^{-z\gamma^+(0)} | \zeta^+ > 0], \tag{40}$$

у випадку а)

$$\varphi_0(z) = \mu^{-1} \int_0^\infty e^{-zx} \bar{F}(x) dx, \quad \bar{F}(x) = \int_x^\infty \bar{F}(y) dy, \quad \bar{F}(x) = \mu_1 \bar{F}_I(x).$$

При умові (37)

$$\begin{aligned} \bar{F}(x) &= e^{-ax}, \quad \bar{\bar{F}}(x) = a^{-1} e^{-ax}, \quad (\mu_1 = a^{-1}) \\ \bar{\bar{F}}(x)^{*n} &= (\mu \bar{F}(x))^* = \mu^n \bar{F}(x)^{*n} = \mu^n e^{-ax} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(ax)^r}{r!} \end{aligned} \tag{41}$$

Після підстановки (41) в (38) одержується співвідношення

$$\Psi(u) = p_+ \sum_{n=1}^\infty q_+^n \bar{F}(u)^{*n} = p_+ e^{-au} \sum_{n=1}^\infty q_+^n \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(au)^r}{r!} =$$

$$= q_+ e^{-au} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(aq_+u)^r}{r!} = q_+ e^{-au+aq_+u},$$

з якого випливає (39). Оскільки $\zeta(t)$ не тільки неперервний знизу, а й майже напівнеперервний зверху, то згідно з (3.105) в [5] $ap_+ = \rho_+$ і (39) узгоджується з (20.14) в [6], встановленим з використанням рівняння (7).

Наслідок 2. Нехай $\zeta(t) = S(t) - C(t)$ (див.(10)) майже напівнеперервний (і зверху і знизу) процес ризику з показниково розподіленими вимогами $Y_k - \exp(a)$ і преміями $X_k - \exp(b)$ і відповідною кумулянтною

$$k(r) = \psi(-i\alpha) = \frac{\lambda_1 r}{a-r} + \frac{\lambda_2 r}{b+r}, \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0, p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

$$m = k'(0) = \lambda_1 a^{-1} - \lambda_2 b^{-1} < 0 \quad (\mu = a^{-1}).$$

Тоді на підставі формули обернення (27) встановлюються співвідношення

$$\Psi(u) = q_+ e^{-ap_+u}, \quad u > 0, q_+ = p(1 + b\mu). \quad (42)$$

Доведення. В силу виконання умови (37) для $F_1(x) = \mathbf{P}\{Y_k < x\}$ знаходимо, що

$$\begin{aligned} \bar{F}_*(x) &= p(\bar{F}_1(x) + b\bar{F}(x)) = q_+ e^{-ax}, \quad q_+ = p(1 + ba^{-1}), \\ \bar{F}_*(x)^{*n} &= q_+^n + F_1(x)^{*n} = q_+^n e^{-ax} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(ax)^r}{r!}. \end{aligned} \quad (43)$$

Підставляючи (43) в (27) знаходимо

$$\Psi(u) = p_+ e^{-ax} \sum_{n \geq 1} q_+^n \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(au)^r}{r!} = p_+ e^{-au} \sum_*; \quad (44)$$

$$\sum_* = \sum_{r \geq 0} \frac{(au)^r}{r!} \sum_{n \geq r+1} q_+^n = \frac{q_+}{1 - q_+} \sum_{r \geq 0} \frac{(auq_+)^r}{r!} = \frac{q_+}{p_+} e^{-aq_+u}.$$

Після підстановки \sum_* в (44) одержимо (42). Як і в попередньому прикладі $a - aq_+ = ap_+ = \rho_+$, а (42) узгоджується з формулою (3.105) в [5], одержаною з використанням рівняння (7).

Для ілюстрації наближень (14) і (15) розглянемо процес із задач у [6], [7].

Приклад 2. Нехай $\zeta(t)$ процес із задач 20.9–20.10 в [6] (або в [7], 17.9–17.10).

$$\zeta(t) = S(t) - C(t), \quad S(t) = \sum_{k \leq N_1(t)} Y_k, \quad \mathbf{E}e^{i\alpha Y_k} = \frac{1}{(1 - i\alpha)^2}, \quad (45)$$

$$C(t) = \sum_{k \leq N_2(t)} X_k, \quad X_k = \exp(b), \quad \text{інтенсивності } N_{1,2}(t) \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Щоб знайти $\Psi_R^0(u)$, за наближення для $S(t)$ виберем $S_0(t)$ в (12)

$$S_0(t) = \sum_{k \leq N_0(t)} Y_k^0, \quad Y_k^0 = \exp(a), \quad k_0(r) = \ln E e^{r\zeta_0(1)} = r \left(\frac{\lambda_0}{a-r} - \frac{1}{b+r} \right).$$

Із співвідношень (12)–(13) при $b = \frac{1}{14}$ легко знайти значення параметрів:

$$a = \lambda_0 = 1, \quad \rho_+^0 = p_+^0 = \frac{3}{7}, \quad q_+^0 = q_+ = \Psi(0) = \frac{4}{7}.$$

Тому наближення (14) і (15) збігаються

$$\Psi(u) \sim \Psi_0(u) = \Psi_R^0(u) = \frac{4}{7}e^{-\frac{3}{7}u}, \quad u \rightarrow \infty. \quad (46)$$

Точне співвідношення $\Psi(u)$, одержане при розв'язанні задачі 20.10 в [6], ((17.10) в [7]) має вигляд

$$\Psi(u) = \frac{27}{41}e^{-\frac{1}{4}u} - \frac{25}{287}e^{-\frac{12}{7}u} \xrightarrow{u \rightarrow 0} \Psi(0) = \frac{4}{7}. \quad (47)$$

При порівнянні ρ_+^0 з додатними коренями $r_{1,2} > 0$ рівняння Лундберга для $\zeta(t)$ ($k(r) = \ln \mathbf{E}e^{r\zeta(1)} = 0$) виявляється, що

$$r_1 = R = \frac{1}{4} < \rho_+^0 = \frac{3}{7} < r_2 = \frac{25}{7} \quad (0,25 < \rho_+^0 \approx 0,4 < 1,7),$$

тобто, що корінь рівняння ($k_0(r) = 0$) ρ_+^0 значно ближче до показника Крамера–Лундберга $R = 0,25$ – меншого кореня рівняння $k(r) = 0$. Значення $q_+ = q_+^0 = \frac{4}{7} \approx 0,6$ близьке до коефіцієнта $\frac{27}{41} \approx 0,66$ при домінуючій експоненті e^{-Ru} в (47) і при $u \rightarrow \infty$

$$\Psi(u) = \frac{27}{41}e^{-0,25u} + o(e^{-Ru}). \quad (48)$$

Співвідношення (46) можна вважати задовільною практичною оцінкою для $\Psi(u)$ в (47).

1. Asmussen S. Ruin probability. World science. Singapore, 2000. – 385 p.
2. Grandell J. Aspects of risk theory. – New-Jork: Springer-Verlag. – 1993, 175 p.
3. Grandell J. Simple approximations of ruin probabilities. – Probabilistic Analysis of Rare Events: Theory and problems of Safety. Insurance and Ruin. – Riga Aviation Univ., 1999. – 47-51.
4. Гусак Д.В. Граничні задачі для процесів з незалежними приростами в теорії ризику. – Київ: Праці Інституту математики НАНУ, т.65: 2007, – 460с.
5. Гусак Д.В. Процеси з незалежними приростами в теорії ризику. – Київ: Праці Інституту математики НАНУ, т.88: 2011, – 544с.
6. Гусак Д.В., та інші. Збірник задач з теорії випадкових процесів та її застосувань. – Київ: ВПЦ "Київський ун-т" – 2008. – 398с.
7. Gusak D.V. et.al. Theory of stochastic processes with applications. – New-York, Dordrecht, London: Springer 2010. – 376 p.

Одержано 17.04.2012