

УДК 519.21

**В. Й. Дзямко** (Ужгородський нац. ун-т)

**Ю. В. Козаченко** (Київський нац. ун-т імені Т. Шевченка)

**А. І. Моца** (Ужгородський нац. ун-т)

## ПРО ЗОБРАЖЕННЯ $\varphi$ -СУБГАУССОВИХ ПЕРІОДИЧНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ У ВИГЛЯДІ РЯДІВ

The conditions for existence of representation  $\varphi$ -subgaussian periodic random processes in the form of series are found. The approximation of such processes in space  $L_2([0, \pi], \mu)$  is studied.

Отримані умови існування зображень  $\varphi$ -субгауссових періодичних випадкових процесів у вигляді рядів. Досліджена апроксимація таких процесів у просторі  $L_2([0, \pi], \mu)$ .

### Вступ

Розклади випадкових процесів у ряди використовуються для апроксимації цих процесів, збереження їх траєкторій, моделювання. Тому важливо досліджувати умови швидкості збіжності цих розкладів у різних функціональних просторах. В роботі вивчаються умови швидкості збіжності розкладів  $\varphi$ -субгауссових (зокрема, гауссових) періодичних випадкових процесів в просторі з мірою  $L_2([0, \pi], \mu)$ , де  $\mu(\cdot)$  – деяка скінченна міра.

Робота складається з вступу та чотирьох розділів. В першому формулюються необхідні відомості з теорії просторів  $\varphi$ -субгауссових випадкових величин. В другому – доведена загальна теорема про швидкість збіжності розкладу періодичних  $\varphi$ -субгауссових процесів за повною системою ортонормованих тригонометричних поліномів. В третьому розділі вивчаються розклади процесів за системами косинусів, а в четвертому – за поліномами Лежандра.

### 1. Простори $\varphi$ -субгауссових випадкових величин та $\varphi$ -субгауссові випадкові процеси

В роботах [1–3] були введені поняття  $\varphi$ -субгауссових величин, в монографії [5] та в роботі [4] вивчалися властивості просторів  $\varphi$ -субгауссових величин та  $\varphi$ -субгауссових процесів.

Сформулюємо допоміжні визначення і факти.

**Означення 1.** [6, 7] Неперервна парна опукла функція  $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$  називається  $N$ -функцією Орліча, якщо  $\varphi(0) = 0$  та  $\varphi(x) > 0$  при  $x > 0$  і виконуються співвідношення:

$$(A_0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0, \quad (A_\infty) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty.$$

Прикладами  $N$ -функцій є такі функції:

$$\varphi(x) = c \cdot |x|^\alpha, \quad c > 0, \quad \alpha > 1; \quad \varphi(x) = \exp\{|x|\} - x - 1;$$

$$\varphi(x) = \{a \cdot |x|^\alpha\} - 1, \quad a > 0, \quad \alpha > 1.$$

**Лема 1.** [6]. Кожну  $N$ -функцію  $\varphi(x)$  можна зобразити у вигляді інтеграла  $\varphi(x) = \int_0^{|x|} f(x) dx$ , де  $f(x)$  – монотонно неспадна неперервна справа функція, така, що  $f(0) = 0$ ,  $f(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Функцію  $f(x)$  називатимемо щільністю  $N$ -функції  $\varphi(x)$ .

**Означення 2.** [6]. Нехай  $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$  деяка  $N$ -функція. Функція  $\varphi^*$  така, що  $\varphi^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} |xy - \varphi(y)|$ , називається перетворенням Юнга-Фенхеля функції  $\varphi$ .

В [6] доведено, що  $\varphi^*$  є також  $N$ -функцією.

**Умова Q.** [4]. Скажемо, що для  $N$ -функції виконується умова  $Q$ , якщо

$$\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = C > 0,$$

де не виключається можливість для  $C$  прийняти нескінченне значення.

Прикладом  $N$ -функцій, для яких виконується умова  $Q$ , є функції:

$$\varphi(x) = |x|^\alpha, \quad 1 < \alpha \leq 2; \quad \varphi(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } |x| \leq 1, \\ |x|^\alpha & \text{при } |x| > 1; \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \exp\{|x|^\alpha\} - 1, \quad 1 < \alpha \leq 2.$$

**Означення 3.** [3, 4]. Нехай  $\varphi$  –  $N$ -функція, для якої виконується умова  $Q$ . Скажемо, що випадкова величина  $\xi$  належить простору  $Sub_\varphi(\Omega)$ , якщо  $E\xi = 0$  та існує стала  $a \geq 0$  така, що  $E \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda a)\}$  при всіх  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Теорема 1.** [3, 4]. Простір  $sub_\varphi(\Omega)$  є простором Банаха відносно норми

$$\tau_\varphi(\xi) = \inf\{a \geq 0 : E \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda a)\}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

**Зауваження 1.** Коли  $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$ , то простір  $Sub_\varphi(\Omega)$  називається простором субгауссових випадкових величин. Гауссові центровані випадкові величини належать цьому простору та  $\tau^2(\xi) = E\xi^2$ .

**Означення 4.** [3, 4]. Випадковий процес  $X = \{X(t), t \in T\}$  називається  $\varphi$ -субгауссовим, якщо при кожному  $t \in T$  випадкова величина  $X(t)$  є  $\varphi$ -субгауссовою.

Зауважимо, що центрований гауссів процес  $X = \{X(t), t \in T\}$  є субгауссовим (тобто  $\varphi$ -субгауссовим з  $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$ ).

**Означення 5.** [5]. Сім'я  $\Delta$  випадкових величин з простору  $Sub_\varphi(\Omega)$  називається строго  $\varphi$ -субгауссовою, якщо існує стала  $C_\Delta$  така, що для будь-яких  $\xi_i \in \Delta$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in I$ , справджується нерівність:

$$\tau_\varphi \left( \sum_{i \in I} M\xi_i \right) \leq C_\Delta \left( E \left( \sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

де  $I$  – будь-яка скінченна множина цілих чисел.

Сталу  $C_\Delta$  називатимемо визначальною сталою сім'ї  $\Delta$ .

**Означення 6.** [5]. Строго  $\varphi$ -субгауссовим називається такий  $\varphi$ -субгауссовий процес  $X = \{X(t), t \in T\}$ , для якого сім'я випадкових величин  $\{X(t), t \in T\}$  є строго  $\varphi$ -субгауссовою.

Визначальну сталу цієї сім'ї  $C_X$  будемо називати визначальною сталою строго  $\varphi$ -субгауссового випадкового процесу  $X$ .

Приклади строго  $\varphi$ -субгауссових випадкових процесів та їх властивості можна знайти в монографії [5].

Гауссові центровані випадкові процеси є строго субгауссовими з визначальною сталою  $C_X = 1$ .

**Лема 2.** *Нехай  $X = \{X(\theta), \theta \in [0, \pi]\}$  – вимірний строго  $\varphi$ -субгауссовий випадковий процес з визначальною сталою  $C_X$ ,  $\mu(\cdot)$  – міра на  $[0, \pi]$ . Якщо виконується умова*

$$\int_0^\pi E |X(\theta)|^2 d\mu(\theta) < \infty, \quad (1)$$

то при будь-якому  $\varepsilon > c \left| f\left(\frac{c^{\frac{1}{2}} \cdot 2}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\right) \right|^2$  справджується нерівність

$$P \left\{ \left( \int_0^\pi |X(\theta)|^2 d\mu(\theta) \right)^{\frac{1}{2}} > \varepsilon \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\varphi^* \left( \frac{\varepsilon}{c} \right) \right\}, \quad (2)$$

де

$$c = \left( C_x^2 \cdot \int_0^\pi E |X(\theta)|^2 d\mu(\theta) \right)^{\frac{1}{2}},$$

$\varphi^*(x)$  – перетворення Юнга-Фенхеля  $N$ -функції  $\varphi$ ,  $f(\cdot)$  – неспадна на  $\mathbb{R}$  функція.

Ця лема – частинний випадок теореми 2.1 з роботи [8].

**Наслідок 1.** *Нехай  $X = \{X(\theta), \theta \in [0, \pi]\}$  – центрований гауссів випадковий процес, тоді справджується нерівність*

$$P \left\{ \left( \int_0^\pi |X(\theta)|^2 d\mu(\theta) \right)^{\frac{1}{2}} > \varepsilon \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2\widehat{c}^2} \right\} \quad (3)$$

при  $\varepsilon > 2\widehat{c}$ , де

$$\widehat{c} = \left( \int_0^\pi E |X(\theta)|^2 d\mu(\theta) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Доведення.** Оскільки центрований гауссів процес є строго субгауссовим ( $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$ , тобто  $f(x) = x$ ), то (3) є частинним випадком (2).

## 2. Швидкість збіжності розкладів у ряд строго $\varphi$ -субгауссових випадкових процесів у просторі $L_2([0, T], \mu)$

Нехай  $X = \{X(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$  – строго  $\varphi$ -субгауссовий періодичний з періодом  $2\pi$  випадковий процес, такий, що  $X(t) = X(-t)$ , причому

$$E|X(\theta)|^2 < \infty, EX(\theta) = 0, EX(\theta)X(\zeta) = R(\cos \theta, \cos \zeta).$$

Будемо вважати, що  $X(\theta)$  – неперервний в середньому квадратичному випадковий процес, тобто  $R(t, s)$  – неперервна функція. Оскільки для неперервних в середньому квадратичному процесів завжди існує вимірна модифікація, то вважатимемо, що процес  $X$ -вимірний. При виконанні всіх вище сформульованих умов, процес  $X$  будемо називати стандартним процесом. Розглядатимемо стандартний процес  $X$  на відрізку  $[0; \pi]$ .

Нехай  $\mu(\cdot)$  деяка скінченна міра на  $[0; \pi]$ . Оскільки

$$E \left( \int_0^\pi |X(\theta)|^2 d\mu(\theta) \right) = \int_0^\pi E|X(\theta)|^2 d\mu(\theta) = \int_0^\pi R(\cos \theta, \cos \zeta) d\mu(\theta) < \infty,$$

то з імовірністю одиниця існує інтеграл  $\int_0^\pi |X(\theta)|^2 d\mu(\theta)$ .

Нехай  $T_k(\theta)$  – повна ортонормована система дійсних тригонометричних поліномів степені  $k$  на просторі  $\{[0, T], \mu\}$ . Тоді  $X(\theta)$  можна зобразити у вигляді ряду

$$X(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k T_k(\theta), \quad (4)$$

де  $\xi_k = \int_0^T X(\theta) T_k(\theta) d\mu(\theta)$ .

Ряд (4) збіжний в нормі простору  $L_2\{[0, \pi], \mu\}$  з імовірністю одиниця.

Нехай  $X_N(\theta) = \sum_{k=0}^N \xi_k \cdot T_k(\theta)$ ,  $\Delta_N(\theta) = X(\theta) - X_N(\theta) = \sum_{l=N+1}^{\infty} \xi_k \cdot T_k(\theta)$  – похибка при апроксимації процесу  $X(\theta)$  сумою  $X_N(\theta)$ . Тоді

$$\tau^2(\Delta_N(\theta)) \leq C_X^2 \cdot E \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} \xi_k T_k(\theta) \right)^2 = C_X^2 \cdot \sum_{l=N+1}^{\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} E(\xi_k \cdot \xi_l) \cdot T_k(\theta) \cdot T_l(\theta).$$

Отже,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \tau^2(\Delta_N(\theta)) d\mu(\theta) &\leq C_X^2 \cdot \int_0^\pi E|\Delta_N(\theta)|^2 d\mu(\theta) = \\ &= C_X^2 \cdot \sum_{l=N+1}^{\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} E(\xi_k \cdot \xi_l) \cdot \int_0^\pi T_k(\theta) T_l(\theta) d\mu(\theta) = C_X^2 \cdot \sum_{k=N+1}^{\infty} E\xi_k^2. \end{aligned}$$

Введемо позначення  $C_N = C_X^2 \cdot \sum_{k=N+1}^{\infty} E\xi_k^2$ .

**Теорема 2.** Нехай  $X$  – стандартний процес. Якщо є збіжним ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} E\xi_k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} R(\cos \theta, \cos \zeta) T_k(\theta) T_k(\zeta) d\mu(\theta) d\mu(\zeta),$$

тоді при  $\varepsilon > C_N \cdot \left| f\left(\frac{C_N^{\frac{1}{2}} \cdot 2}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\right) \right|^2$  справджується нерівність

$$P \left\{ \left( \int_0^{\pi} |\Delta_N(\theta)|^2 d\mu(\theta) \right)^{\frac{1}{2}} > \varepsilon \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\varphi^* \left( \frac{\varepsilon}{C_N} \right) \right\}, \quad (5)$$

де  $\varphi^*(x)$  – перетворення Юнга-Фенхеля  $N$ -функції  $\varphi$ .

**Доведення.** За умовою теореми випадковий процес  $\Delta_N(\theta)$  є строго  $\varphi$ -субгаусовим. Тому нерівність (5) випливає з нерівності (2).

**Зауваження.** Оскільки функція  $f(u)$  неспадна, то при будь-якому  $\varepsilon > 0$  знайдеться  $N_\varepsilon$  таке, що для довільного  $N > N_\varepsilon$  справджується нерівність (5).

**Наслідок 2.** Якщо  $X(\theta)$  – центрований гауссів процес, тоді нерівність

$$P \left\{ \left( \int_0^{\pi} |\Delta_n(\theta)|^2 d\mu(\theta) \right)^{\frac{1}{2}} > \varepsilon \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2\widehat{C}_N} \right\} \quad (6)$$

справджується при будь-якому  $\varepsilon > 2\widehat{C}_N$ , де  $\widehat{C}_N = \sum_{k=N+1}^{\infty} E\xi_k^2$ .

### 3. Розклад стандартного процесу за системою косинусів

Нехай  $T_k(\theta) = c_k \cdot \cos k\theta$ , де  $k = 0, 1, 2, \dots$ , причому  $c_0 = \frac{1}{\pi}$ ,  $c_k = \frac{2}{\pi}$  при всіх  $k \geq 1$ . Ця система функцій є повною ортонормованою системою в просторі  $\{[0, \pi], \mu\}$ , де  $\mu(\cdot)$  – міра Лебега. Тому

$$E\xi_k^2 = c_k^2 \cdot \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} R(\cos \theta, \cos \zeta) \cos k\theta \cdot \cos k\zeta d\theta d\zeta.$$

Позначимо  $z_k = \int_0^{\pi} R(\cos \theta, \cos \zeta) \cos k\theta d\theta$ . Тоді, очевидно,

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} R(\cos \theta, \cos \zeta) \cos k\theta d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} R\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{k}\right), \cos \zeta\right) \cdot \cos(k\theta + \pi) d\theta = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} R\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{k}\right), \cos \zeta\right) \cos k\theta d\theta. \end{aligned}$$

Отже,

$$z_k = -\frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ R\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{k}\right), \cos \zeta\right) - R(\cos \theta, \cos \zeta) \right] \cos k\theta d\theta.$$

Аналогічно отримаємо

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} R(\cos \theta, \cos \zeta) \cos k\theta \cdot \cos k\zeta d\theta d\zeta &= \frac{1}{16} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ R\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{k}\right), \cos\left(\zeta + \frac{\pi}{k}\right)\right) - \right. \\ &- R\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{k}\right), \cos \zeta\right) - R\left(\cos \theta, \cos\left(\zeta + \frac{\pi}{k}\right)\right) + \\ &\left. + R(\cos \theta, \cos \zeta) \right] \cos k\theta \cdot \cos k\zeta d\theta d\zeta. \end{aligned} \quad (7)$$

**Теорема 3.** Нехай  $X(\theta)$  – стандартний процес,  $T_k(\theta) = c_k \cos k\theta$ ,  $c_k = \frac{2}{\pi}$ ,  $k > 0$ ,  $\mu(\cdot)$  – міра Лебега. Якщо виконується умова

$$\begin{aligned} \sup_{-1 \leq t, s \leq 1} |R(t+h, s+h_1) - R(t+h, s) - R(t, s+h_1) + R(t, s)| &\leq \\ &\leq C_R h^\alpha \cdot h_1^\alpha, C_R > 0, \alpha > \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (8)$$

тоді при  $N > 0$

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} E\xi_k^2 \leq C_R \cdot 16 \cdot 4^{2\alpha} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\alpha}} \underline{\text{def}} S_N(R) < +\infty, \quad (9)$$

а при

$$\varepsilon > \widehat{C}_N \cdot \left| f\left(\frac{(\widehat{C}_N)^{\frac{1}{2}} \cdot 2}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\right) \right|^2, \quad \text{де } \widehat{C}_N = C_X^2 \cdot S_N(R)$$

має місце нерівність

$$P \left\{ \left( \int_0^{\pi} (\Delta_N(\theta))^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} > \varepsilon \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\varphi^* \left( \frac{\varepsilon}{\widehat{C}_N} \right) \right\}. \quad (10)$$

**Доведення.** Оскільки при  $k \geq 1$  маємо  $c_k = \frac{2}{\pi}$ , то з (7) отримуємо

$$\begin{aligned} E\xi_k^2 &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} R(\cos \theta, \cos \zeta) \cdot \cos k\theta \cdot \cos k\zeta d\theta d\zeta \leq \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| R\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{k}\right), \cos\left(\zeta + \frac{\pi}{k}\right)\right) - R\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{k}\right), \cos \zeta\right) - \right. \\ &\quad \left. - R\left(\cos \theta, \cos\left(\zeta + \frac{\pi}{k}\right)\right) + R(\cos \theta, \cos \zeta) \right| d\theta d\zeta \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{4}{\pi^2} C_R \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \cos \left( \zeta + \frac{\pi}{k} \right) - \cos \zeta \right|^\alpha \cdot \left| \cos \left( \theta + \frac{\pi}{k} \right) - \cos \theta \right|^\alpha d\theta d\zeta \leq \\ &\leq C_R \cdot \frac{4}{\pi^2} \cdot (2\pi)^2 \cdot \left| 2 \sin \frac{\pi}{k} \right|^{2\alpha} \leq C_R \cdot 16 \cdot 4^{2\alpha} \cdot \frac{\pi^{2\alpha}}{k^{2\alpha}}. \end{aligned}$$

Нерівність (9) доведена. Нерівність (10) випливає з (9) і (5).

**Наслідок 3.** Якщо  $X$  – гауссів процес, для якого справджується (8), то при  $\varepsilon > 2\widehat{C}_N$  має місце нерівність

$$P \left\{ \left( \int_0^T |\Delta_N(\theta)|^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} > \varepsilon \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2\widehat{C}_N} \right\}. \quad (11)$$

Наслідок 3 випливає з теореми 2 та наслідку 2.

**Приклад 1.** Нехай  $\{\Omega, \eta, \nu\}$  – простір з мірою,  $R(t, s) = \int_{\Omega} f(t, \lambda) \overline{f(s, \lambda)} d\nu(\lambda)$ , де  $f(t, \cdot) \in L_2(\lambda)$ ,  $t \in [0, T]$ . Тоді

$$\begin{aligned} &\sup_{-1 \leq t, s \leq 1} |R(t+h, s+h_1) - R(t+h, s) - R(t, s+h_1) + R(t, s)| \leq \\ &\leq \sup_{-1 \leq t, s \leq 1} \int_{\Omega} |f(t+h, \lambda) - f(t, \lambda)| \cdot |f(s+h_1, \lambda) - f(s, \lambda)| d\nu(\lambda). \end{aligned}$$

Якщо

$$\sup_{-1 \leq t \leq 1} |f(t+h, \lambda) - f(t, \lambda)| \leq z(\lambda) \cdot |h|^\alpha,$$

де  $\alpha > \frac{1}{2}$ , і  $z(\lambda)$  – функція, така, що  $\int_{\Omega} |z(\lambda)|^2 d\nu(\lambda) < \infty$ , тоді умова (8) виконується при  $C_R = \int_{\Omega} |z(\lambda)|^2 d\nu(\lambda)$ .

Якщо є, наприклад,

$$R(t, s) = R(t-s) = \int_0^{+\infty} f(\lambda) \cos \lambda t d\lambda,$$

де  $f(\lambda) \geq 0$  – парна функція та  $\int_0^{\infty} f(\lambda) d\lambda < \infty$ , тоді

$$R(t, s) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t-s)} f(\lambda) \cdot d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{e^{i\lambda s}} f(\lambda) d\lambda.$$

Покладемо  $f(t, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\lambda t}$ ,  $d\nu(\lambda) = f(\lambda) d\lambda$ . Тоді при достатньо малих  $h$ ,  $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$  маємо

$$|f(t+h, \lambda) - f(t, \lambda)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |e^{i\lambda(t+h)} - e^{i\lambda t}| = \frac{1}{\sqrt{2}} |e^{i\lambda h} - 1| =$$

$$= \sqrt{2} \cdot |1 - \cos \lambda h|^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \left( 2 \sin^2 \frac{\lambda h}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \left| \sin \frac{\lambda h}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{\lambda h}{2} \right|^{\alpha} = 2^{1-\alpha} \cdot |\lambda h|$$

при  $0 < \alpha \leq 1$ . Якщо взяти  $\alpha > \frac{1}{2}$ , тоді при умові, що інтеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2\alpha} f(\lambda) d\lambda$  збіжний, буде справджуватися умова (8), де  $C_R = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2\alpha} \cdot f(\lambda) d\lambda$ .

#### 4. Розклад стандартного процесу за системою поліномів Лежандра

Нехай  $T_k(\theta) = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \cdot P_k(\cos \theta)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , де  $P_k(t)$  – поліноми Лежандра ([9], ст. 46). Система  $T_k(\theta)$  повна та ортонормована в просторі  $([0, \pi], \mu)$ , де  $\mu(A) = \int_A \sin \theta d\theta$ . Розглянемо

$$x(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \cdot T_k(\theta), \text{ де } \xi_k = \int_0^{\pi} x(\theta) T_k(\theta) \sin \theta d\theta.$$

$$\begin{aligned} E\xi_k^2 &= \frac{2k+1}{2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} R(\cos \theta, \cos \zeta) P_k(\cos \theta) \cdot P_k(\cos \zeta) \sin \theta \sin \zeta d\theta d\zeta = \\ &= \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 R(t, s) \cdot P_k(t) \cdot P_k(s) dt ds. \end{aligned} \quad (12)$$

Нехай існує неперервна похідна  $\frac{\partial^2 R(t, s)}{\partial s \partial t}$ ,  $-1 \leq t, s \leq 1$ . Оскільки ([9], ст. 50)

$$P_k(t) = \frac{1}{k+1} [P'_{k+1}(t) - t \cdot P'_k(t)],$$

тоді

$$\int_{-1}^1 R(t, s) P_k(t) dt = \frac{1}{k+1} \left[ \int_{-1}^1 R(t, s) P'_{k+1}(t) dt - \int_{-1}^1 R(t, s) \cdot t \cdot P'_k(t) dt \right]. \quad (13)$$

Відомо ([9], ст. 46), що  $P_k(1) = 1$ ,  $P_k(-1) = (-1)^k$  при всіх  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Крім того  $R(t, s)$  – парна функція по обох змінних.

Обчислимо інтеграли в правій частині (13).

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 R(t, s) \cdot t \cdot P'_k(t) dt &= P_k(t) \cdot R(t, s) \cdot t \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_k(t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} [R(t, s) \cdot t] dt = \\ &= P_k(1) \cdot R(1, s) \cdot 1 - P_k(-1) \cdot R(-1, s) \cdot (-1) - \int_0^1 P_k(t) \left[ \frac{\partial R(t, s)}{\partial t} \cdot t + R(t, s) \right] dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [P_k(1) + P_k(-1)] R(1, s) - \int_0^1 P_k(t) \left[ \frac{\partial R(t, s)}{\partial t} \cdot t + R(t, s) \right] dt = \\
&= [1 + (-1)^k] R(1, s) - \int_0^1 P_k(t) \left[ \frac{\partial R(t, s)}{\partial t} \cdot t + R(t, s) \right] dt. \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 R(t, s) P'_{k+1}(t) dt &= P_{k+1}(t) \cdot R(t, s) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_{k+1}(t) \cdot \frac{\partial R(t, s)}{\partial t} dt = \\
&= P_{k+1}(1) \cdot R(1, s) - P_{k+1}(-1) R(-1, s) - \int_{-1}^1 P_{k+1}(t) \cdot \frac{\partial R(t, s)}{\partial t} dt = \\
&= [1 - (-1)^{k+1}] R(1, s) - \int_{-1}^1 P_{k+1}(t) \cdot \frac{\partial R(t, s)}{\partial t} dt. \quad (15)
\end{aligned}$$

Із (13), (14), (15) випливає, що

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 R(t, s) P_k(t) dt &= \frac{1}{k+1} \left\{ \left( [1 - (-1)^{k+1}] R(1, s) - \int_{-1}^1 P_{k+1}(t) \cdot \frac{\partial R(t, s)}{\partial t} dt \right) - \right. \\
&\quad \left. - \left( [1 + (-1)^k] R(1, s) - \int_0^1 P_k(t) \left[ \frac{\partial R(t, s)}{\partial t} \cdot t + R(t, s) \right] dt \right) \right\} = \\
&= \frac{1}{k+1} \left\{ \left( [1 + (-1)^k] \cdot R(1, s) - \int_{-1}^1 P_{k+1}(t) \frac{\partial R(t, s)}{\partial t} dt \right) \right\} - \\
&\quad - \left( [1 + (-1)^k] \cdot R(1, s) - \int_{-1}^1 P_k(t) \left[ \frac{\partial R(t, s)}{\partial t} \cdot t + R(t, s) \right] dt \right) \Big\} = \\
&= \frac{1}{k+1} \left\{ \int_{-1}^1 P_k(t) \left[ \frac{\partial R(t, s)}{\partial t} \cdot t + R(t, s) \right] dt - \int_{-1}^1 P_{k+1}(t) \cdot \frac{\partial R(t, s)}{\partial t} dt \right\}. \quad (16)
\end{aligned}$$

Перепишемо (16) у такому вигляді

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 R(t, s) P_k(s) ds &= \frac{1}{k+1} \left\{ \int_{-1}^1 P_k(s) \left[ \frac{\partial R(t, s)}{\partial s} \cdot s + R(t, s) \right] ds - \right. \\
&\quad \left. - \int_{-1}^1 P_{k+1}(s) \cdot \frac{\partial R(t, s)}{\partial s} ds \right\} \quad (17)
\end{aligned}$$

Тоді, враховуючи (16), (17) отримаємо

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 R(t, s) P_k(s) P_k(t) ds dt = \int_{-1}^1 \left[ \int_{-1}^1 R(t, s) P_k(s) ds \right] P_k(t) dt \quad \underline{\underline{(17)}} \\
& = \int_{-1}^1 \frac{1}{k+1} \left\{ \int_{-1}^1 P_k(s) \left[ \frac{\partial R(t, s)}{\partial s} \cdot s + R(t, s) \right] ds - \int_{-1}^1 P_{k+1}(s) \frac{\partial R(t, s)}{\partial s} ds \right\} P_k(t) dt = \\
& = \frac{1}{k+1} \left\{ \int_{-1}^1 \left[ \int_{-1}^1 \frac{\partial R(t, s)}{\partial s} P_k(t) dt \right] s \cdot P_k(s) ds + \int_{-1}^1 \left[ \int_{-1}^1 R(t, s) P_k(t) dt \right] P_k(s) ds - \right. \\
& - \left. \int_{-1}^1 \left[ \int_{-1}^1 \frac{\partial R(t, s)}{\partial s} P_k(t) dt \right] P_{k+1}(s) ds \right\} \underline{\underline{(16)}} \frac{1}{k+1} \left( \int_{-1}^1 \frac{1}{k+1} \left\{ \int_{-1}^1 P_k(t) \left[ \frac{\partial^2 R(t, s)}{\partial s \partial t} \cdot t + \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{\partial R(t, s)}{\partial s} \right] dt - \int_{-1}^1 P_{k+1}(t) \cdot \frac{\partial^2 R(t, s)}{\partial s \partial t} dt \right\} s \cdot P_k(s) ds + \int_{-1}^1 \frac{1}{k+1} \left\{ \int_{-1}^1 P_k(t) \left[ \frac{\partial R(t, s)}{\partial t} \cdot t + \right. \right. \\
& + R(t, s) \right] dt - \int_{-1}^1 P_{k+1}(t) \cdot \frac{\partial R(t, s)}{\partial t} dt \left. \right\} P_k(s) ds - \int_{-1}^1 \frac{1}{k+1} \left\{ \int_{-1}^1 P_k(t) \left[ \frac{\partial^2 R(t, s)}{\partial s \partial t} \cdot t + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{\partial R(t, s)}{\partial s} \right] dt - \int_{-1}^1 P_{k+1}(t) \cdot \frac{\partial^2 R(t, s)}{\partial s \partial t} \cdot dt \right\} P_{k+1}(s) ds = \\
& = \frac{1}{(k+1)^2} \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 R(t, s)}{\partial s \partial t} \cdot t \cdot s \cdot P_k(t) P_k(s) dt ds + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial R(t, s)}{\partial s} \cdot s \cdot P_k(t) P_k(s) dt ds - \right. \\
& - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 R(t, s)}{\partial s \partial t} \cdot s \cdot P_{k+1}(t) P_k(s) dt ds + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial R(t, s)}{\partial t} \cdot t \cdot P_k(t) P_k(s) dt ds + \\
& + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 R(t, s) P_k(t) P_k(s) dt ds - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial R(t, s)}{\partial t} P_{k+1}(t) P_k(s) dt ds - \\
& - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 R(t, s)}{\partial s \partial t} \cdot t \cdot P_k(t) P_{k+1}(s) dt ds - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial R(t, s)}{\partial s} \cdot P_k(t) P_{k+1}(s) dt ds + \\
& \left. + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 R(t, s)}{\partial s \partial t} \cdot P_{k+1}(t) P_{k+1}(s) dt ds \right\} = \frac{1}{(k+1)^2} \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial^2 R(t, s)}{\partial s \partial t} \cdot t \cdot s + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial R(t, s)}{\partial s} \cdot s + \frac{\partial R(t, s)}{\partial t} \cdot t + R(t, s) \Big] P_k(t) P_k(s) dt ds - \\
& - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial^2 R(t, s)}{\partial s \partial t} \cdot s + \frac{\partial R(t, s)}{\partial t} \right] P_{k+1}(t) P_k(s) dt ds - \\
& - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \frac{\partial^2 R(t, s)}{\partial s \partial t} \cdot t + \frac{\partial R(t, s)}{\partial s} \right] P_k(t) P_{k+1}(s) dt ds + \\
& + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 R(t, s)}{\partial s \partial t} P_{k+1}(t) P_{k+1}(s) dt ds. \tag{18}
\end{aligned}$$

Таким чином, повторюючи процедури, проведені при перетвореннях (14), (15), (16), приходимо до такої рівності:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 R(t, s) P_k(t) P_k(s) dt ds & = \frac{1}{(k+1)^2} \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 z_{11}(t, s) P_k(t), P_k(s) dt ds - \right. \\
& - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 z_{21}(t, s) P_{k+1}(t) P_k(s) dt ds - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 z_{12}(t, s) P_k(t) P_{k+1}(s) dt ds + \\
& \left. + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 z_{22}(t, s) P_{k+1}(t) P_k(s) dt ds, \right. \tag{19}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
z_{11}(t, s) & = \frac{\partial^2 R(t, s)}{\partial s \partial t} t \cdot s + \frac{\partial R(t, s)}{\partial s} \cdot s + \frac{\partial R(t, s)}{\partial t} \cdot t + R(t, s);, \\
z_{21} & = \frac{\partial^2 R(t, s)}{\partial s \partial t} \cdot s + \frac{\partial R(t, s)}{\partial t}; \\
z_{12} & = \frac{\partial^2 R(t, s)}{\partial s \partial t} \cdot t + \frac{\partial R(t, s)}{\partial s}; \\
z_{22} & = \frac{\partial^2 R(t, s)}{\partial s \partial t}. \tag{20}
\end{aligned}$$

Оскільки ([9], ст. 50)  $P_k(\cos \theta) \sqrt{\sin \theta} \leq \frac{2}{\sqrt{k\pi}}$ , то

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 z_{lm}(t, s) P_i(t) P_j(s) dt ds \right| = \\
& = \left| \int_0^\pi \int_0^\pi z_{lm}(\cos \theta, \cos \zeta) P_i(\cos \theta) \cdot P_j(\zeta) \sin \theta \cdot \sin \zeta d\theta d\zeta \right| \leq
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{4}{\pi\sqrt{ij}} \int_0^\pi \int_0^\pi |z_{lm}(\cos \theta, \cos \zeta)| d\theta d\zeta.$$

Отже,

$$E\xi_k^2 \leq \frac{2k+1}{2} \cdot \frac{4}{k\pi} \cdot \frac{1}{(k+1)^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \sum_{l,m=1}^2 |z_{lm}(\cos \theta, \cos \zeta)| d\theta d\zeta.$$

Підсумовуючи, сформулюємо результат у вигляді такої теореми.

**Теорема 4.** Нехай  $X(\theta)$  – стандартний процес,  $T_k(\theta) = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} P_k(\cos \theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , де  $P_k(t)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  – поліноми Лежандра,  $\mu(A) = \int_A \sin \theta d\theta$  – міра. Якщо існує неперервна похідна  $\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial s \partial t}$ , тоді при  $N \geq 0$  справджується нерівність

$$\sum_{k=N+1}^\infty E\xi_k^2 \leq \sum_{k=N+1}^\infty \frac{2k+1}{k\pi} \cdot 2 \cdot \frac{1}{(k+1)^2} \cdot d \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{S}_N(R),$$

де

$$d = \int_0^\pi \int_0^\pi \sum_{l,m=1}^2 |z_{lm}(\cos \theta, \cos \zeta)| d\theta d\zeta, \quad z_{l,m}(\cos \theta, \cos \zeta) -$$

визначені у (20). Якщо

$$\varepsilon > \widehat{C}_N \left| f \left( \frac{(\widehat{C}_N)^{\frac{1}{2}} \cdot 2}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right) \right|^2,$$

де

$$\widehat{C}_N = C_X^2 \cdot \widehat{S}_N(R), \tag{21}$$

тоді має місце нерівність

$$P \left\{ \left( \int_0^\pi |S_N(\theta)|^2 \sin \theta d\theta \right)^{\frac{1}{2}} > \varepsilon \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\varphi^* \left( \frac{\varepsilon}{\widehat{C}_N} \right) \right\}.$$

**Наслідок 4.** Якщо  $X$  – гауссів процес, для якого існує неперервна похідна  $\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial s \partial t}$ , то при  $\varepsilon > 2\widehat{C}_N$ , де  $\widehat{C}_N$  задано в (21), має місце нерівність

$$P \left\{ \left( \int_0^\pi |\Delta_N(\theta)|^2 \sin \theta d\theta \right)^{\frac{1}{2}} > \varepsilon \right\} < 2 \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2\widehat{C}_N} \right\}.$$

**Приклад 2.** Нехай, як і в прикладі 1,  $\{\Omega, \eta, \nu\}$  - простір з мірою,

$$R(t, s) = \int_{\Omega} f(t, \lambda) \overline{f(s, \lambda)} d\nu(\lambda), \text{ де } f(t, \cdot) \in L_2(\lambda), t \in [0, T], \lambda \in \mathbb{R}.$$

Тоді умови теореми 4 виконуються, якщо функція  $f(t, \lambda)$  така, що при всіх  $\lambda \in \Omega$  існує неперервна похідна  $\frac{\partial f(t, \lambda)}{\partial t}$  і при всіх  $t, s \in [0, T]$  збіжним інтеграл

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial f(t, \lambda)}{\partial t} \cdot \frac{\partial f(s, \lambda)}{\partial s} \right| d\nu(\lambda),$$

що випливає з умови  $\left| \frac{\partial f(t, \lambda)}{\partial t} \right| \leq a(\lambda)$  при всіх  $t$  і збіжності інтеграла  $\int_{\Omega} [a(\lambda)]^2 d\nu(\lambda)$ .

Якщо ж  $R(t, s) = \int_0^{+\infty} f(\lambda) \cos \lambda t d\lambda$ , тоді умови теореми 4 будуть виконуватися, якщо є збіжним інтеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \cdot f(\lambda) \cdot d\lambda < \infty$ .

## Висновки

В роботі досліджується швидкість збіжності розкладів  $\varphi$ -субгауссових процесів у вигляді рядів у просторі  $L_2([0, \pi])$  за системами ортонормованих тригонометричних поліномів. В другій частині цієї роботи будуть викладені умови швидкості збіжності таких розкладів у просторі  $C([0, \pi])$ .

1. *Козаченко Ю. В.* Свойства случайных процессов типа субгауссовских // Доклады АН УССР. – 1984. – № 9. – С. 14–16.
2. *Островский Е. И.* Обобщение нормы Булдыгина-Козаченко и центральная предельная теорема в банаховых пространствах // Теория вероятностей и её применения. – 1982. – Т. 27, № 3. – С. 618.
3. *Козаченко Ю. В., Островский Е. И.* Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовых // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1985. – Т. 32. – С. 42–53.
4. *Giuliano Antonini R., Kozachenko Ju. and Nikitina T.* Space of  $Sub_u(\Omega)$  random variables // "Academia Nazionale della Scienze detta dei XL", Memoria di Matematica e Applicazioni. – 2003. – Vol XXVII, № 121. – P. 95–124.
5. *Василик О. І., Козаченко Ю. В., Ямненко Р. Є.*  $\varphi$ -субгауссові випадкові процеси. – К.: Київський ун-т, – 2008. – 231 с.
6. *Красносельский М. А., Рутецкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. – М.: Физматгиз, 1958. – 271 с.
7. *Buldygin V. V., Kozachenko Ju. V.* Metric characterization of Random variables and Random processes // American Mathematical Society, Providence Rhode Island, 2000. – 257 p.
8. *Козаченко Ю. В., Каменщикова О. Є.* Апроксимація  $ssub_u(\Omega)$  випадкових процесів у просторі  $L_p(T)$  // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2008. – Т. 79. – С. 73–78.
9. *Кампе де Ферье Ж., Кемпбелл Р., Петью Г., Фогель Т.* Функции математической физики. – М.: Физматгиз, 1963. – 102 с.

Одержано 24.04.2012