УДК 517.518.84

М. М. Пагіря (Мукачівський держ. ун-т)
Р. А. Кацала (Ужгородський нац. ун-т)

ЗВ'ЯЗКИ ОБЕРНЕНИХ ПОХІДНИХ ДРУГОГО ТИПУ З ПОХІДНИМИ ТА ОБЕРНЕНИМИ ПОХІДНИМИ

A connections of the inverse derivatives of the second type with the derivatives and the inverse derivatives of Thiele are investigated in this paper. A formulae for expressed of the inverse derivatives of the second type between the derivatives by means of quotient of two Hankel's determinants are got. The nonlinear relation between the inverse derivatives of second type and inverse derivatives of Thiele is designated.

В роботі досліджується зв'язок обернених похідних другого типу з похідними та оберненими похідними Тіле. Отримані формули для вираження обернених похідних другого типу через звичайні похідні за допомогою відношення двох визначників Ганкеля. Вказаний нелінійний зв'язок обернених похідних другого типу і обернених похідних Тіле.

Вступ. Функції однієї змінної можуть бути наближені багаточленами, узагальненими багаточленами, апроксимаціями Паде, ланцюговими дробами і т.п. Одним із способів розвинення функцій у ланцюговий дріб є формула Тіле [1]. В роботах [2, 3] отримано аналог цієї формули для оберненого ланцюгового дробу Тіле та введено в розгляд обернені похідні 2–го типу. Встановленню взаємозв'язку між похідними 2-го типу, звичайними похідними та оберненими похідними Тіле присвячена дана робота.

1. Формула Тіле. Припустимо, що функція $f(x)$ в деякій області $\Omega \subset \mathbb{R}$ має похідні (скінчене значення, $-\infty$ чи $+\infty$) до n–го порядку включно.

Означення 1. *Оберненою похідною* 1*–го порядку функції* $f(x)$ *називаєтьcя границя*

$$\lim_{x_* \to x} \frac{x - x_*}{f(x) - f(x_*)} = {}^{\backprime}f(x) = \frac{1}{f'(x)},$$

при припущені, що вона існує і рівна скінченному значенню, $-\infty$ *чи* $+\infty$.

Твердження 1. *1. Нехай в точці* $x_0 \in \Omega,\ f'(x_0) = 0$, *тоді* ${}^{\backprime}f(x_0) = +\infty$, *якщо функція* $f(x)$ *монотонно зростає в деякому околі точки* x_0 *і* ${}^{\backprime}f(x_0) = -\infty$, *якщо функція* $f(x)$ *монотонно спадає в деякому околі точки* x_0. *2. Нехай в точці* $x_0 \in \Omega, f'(x_0) = \pm\infty$, *тоді* ${}^{\backprime}f(x_0) = 0$.

Обернена похідна ${}^{(n)}f(x)$ n–го порядку, $n \geqslant 2$, обчислюється за допомогою рекурентної формули

$${}^{(n)}f(x) = n \cdot {}^{\backprime}\!\left({}^{(n-1)}f(x)\right) + {}^{(n-2)}f(x), \qquad {}^{(0)}f(x) = f(x). \tag{1}$$

Твердження 2. *Із* (1) *випливає, що, взагалі кажучи,* ${}^{(n)}f(x) \neq {}^{\backprime}\!\left({}^{(n-1)}f(x)\right)$.

Якщо функція $f(x)$ в околі точки $x = x_*$ має обернені похідні до n–го порядку включно, то її можна подати у вигляді ланцюгового дробу за допомогою формули Тіле [1] :

$$f(x) \approx f(x_*) + \frac{x - x_*}{{}^{\backprime}f(x_*)} \, + \, \frac{x - x_*}{2\,{}^{\backprime}[{}^{\backprime}f(x_*)]} \, + \, \frac{x - x_*}{3\,{}^{\backprime}[{}^{(2)}f(x_*)]} \, + \, \cdots \, + \, \frac{x - x_*}{n\,{}^{\backprime}[{}^{(n-1)}f(x_*)]}.$$

Визначником Ганкеля називається визначник виду

$$H_0^{(n)} = 1, \qquad H_k^{(n)} = \begin{vmatrix} c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{n+k-1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \cdots & c_{n+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+k-1} & c_{n+k} & \cdots & c_{n+2k-2} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \dots ,$$

де $c_n = \dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \dots,$ $c_{-1} = 0.$

В роботі [4] встановлено взаємозв'язок між оберненими похідними функції та її похідними і зокрема доведено, що обернена похідна ${}^{(n)}f(x)$ рівна відношенню двох визначників Ганкеля

$$ {}^{(2k-1)}f(x) = \frac{H_{k-1}^{(3)}}{H_k^{(1)}}, \qquad {}^{(2k)}f(x) = \frac{H_{k+1}^{(0)}}{H_k^{(2)}}, \qquad k \geqslant 1\ . \tag{2}$$

Формули (2) були також отримані в роботі [5, с. 419–427] іншим способом із використанням властивостей коефіцієнтів інтерполяційного багаточлена у формі Ньютона.

2. Аналог формули Тіле у випадку оберненого ІЛД Тіле. Нехай функція $f(x)$, $x \in \Omega$, задана значеннями в точках множини

$$\Lambda = \{x_i : x_i \in \Omega,\ i = 0, 1, \cdots, n,\ x_i \neq x_j \text{ при } i \neq j\},\ \ y_i = f(x_i),\ i = 0, 1, \cdots, n\,.$$

Функція $f(x)$ інтерполюється в $\Omega \subset \mathbb{R}$ оберненим інтерполяційним ланцюговим дробом Тіле [2]

$$f(x) \approx \left(b_0 + \frac{x - x_0}{b_1} \, + \, \frac{x - x_1}{b_2} \, + \, \cdots \, + \, \frac{x - x_{n-1}}{b_n} \right)^{-1},$$

де коефіцієнти b_k визначаються через обернені різниці 2–го типу наступним чином

$$b_0 = \rho_0[x_0] = \frac{1}{y_0}, \quad b_1 = \rho_1[x_0, x_1] = \frac{(x_1 - x_0)y_0 y_1}{y_0 - y_1},$$
$$b_k = \rho_k[x_0, \dots, x_k] - \rho_{k-2}[x_0, \dots, x_{k-2}], \qquad k = 2, 3, \dots, n.$$

В [2] показано, що обернені різниці 2–го типу визначаються за наступними формулами:

$$\rho_{2n}[x_0,x_1,\ldots,x_{2n}] = \begin{vmatrix} 1 & y_0 & x_0 & x_0y_0 & \ldots & x_0^{n-1} & x_0^{n-1}y_0 & x_0^n \\ 1 & y_1 & x_1 & x_1y_1 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^{n-1}y_1 & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_{2n} & x_{2n} & x_{2n}y_{2n} & \ldots & x_{2n}^{n-1} & x_{2n}^{n-1}y_{2n} & x_{2n}^n \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} 1 & y_0 & x_0 & x_0y_0 & \ldots & x_0^{n-1} & x_0^{n-1}y_0 & x_0^ny_0 \\ 1 & y_1 & x_1 & x_1y_1 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^{n-1}y_1 & x_1^ny_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_{2n} & x_{2n} & x_{2n}y_{2n} & \ldots & x_{2n}^{n-1} & x_{2n}^{n-1}y_{2n} & x_{2n}^ny_{2n} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

$$\rho_{2n+1}[x_0,x_1,\ldots,x_{2n+1}] =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & y_0 & x_0 & x_0y_0 & \ldots & x_0^{n-1}y_0 & x_0^ny_0 & x_0^{n+1}y_0 \\ 1 & y_1 & x_1 & x_1y_1 & \ldots & x_1^{n-1}y_1 & x_1^ny_1 & x_1^{n+1}y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_{2n+1} & x_{2n+1} & x_{2n+1}y_{2n+1} & \ldots & x_{2n+1}^{n-1}y_{2n+1} & x_{2n+1}^ny_{2n+1} & x_{2n+1}^{n+1}y_{2n+1} \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} 1 & y_0 & x_0 & x_0y_0 & \ldots & x_0^{n-1} & x_0^{n-1}y_0 & x_0^n & x_0^ny_0 \\ 1 & y_1 & x_1 & x_1y_1 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^{n-1}y_1 & x_1^n & x_1^ny_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_{2n+1} & x_{2n+1} & x_{2n+1}y_{2n+1} & \ldots & x_{2n+1}^{n-1} & x_{2n+1}^{n-1}y_{2n+1} & x_{2n+1}^n & x_{2n+1}^ny_{2n+1} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

Означення 2. *Граничне значення $\rho_n[x_0,x_1,\ldots,x_n]$, коли всі вузли прямують до x, при припущені, що воно існує і рівне скінченому значенню, $-\infty$ чи $+\infty$, називають оберненою похідною 2–го типу і позначають через ${}^{[n]}f(x)$, тобто*

$${}^{[n]}f(x) = \rho_n[\underbrace{x,\ldots,x}_{n+1}] = \lim_{x_0,x_1,\ldots,x_n\to x}\rho_n[x_0,x_1,\ldots,x_n]. \tag{5}$$

В [2] показано, що обернені похідні 2–го типу можна обчислювати за допомогою наступних рекурентних формул

$${}^{[0]}f(x) = \frac{1}{f(x)}, \quad {}^{[1]}f(x) = -\frac{f^2(x)}{f'(x)}, \quad {}^{[n]}f(x) = n\,\grave{}\,({}^{[n-1]}f(x)) + {}^{[n-2]}f(x), \quad n \geqslant 2.$$

Розвиток функції $f(x)$ в обернений ланцюговий дріб Тіле буде мати вигляд:

$$f(x) = \left(\frac{1}{f(x_*)} + \frac{x-x_*}{{}^{[1]}f(x_*)} \ + \ \frac{x-x_*}{2\,\grave{}\,({}^{[1]}f(x_*))} \ + \ \cdots \ + \ \frac{x-x_*}{n\,\grave{}\,({}^{[n-1]}f(x_*))} \ + \ \cdots\right)^{-1}.$$

3. Зв'язок обернених похідних 2–го типу із похідними. Обернені похідні 2–го типу можна шукати переходячи поступово до границі в формулах (3) і (4) так, як це робиться для перших трьох похідних в [2]. Знайдемо загальну формулу визначення обернених похідних 2–го типу через звичайні похідні.

В (4) при $n=0$ замість x_0 і x_1 відповідно підставимо x і $x+h$. У визначниках чисельника і знаменника віднімемо від другого рядка перший, поділимо на

h і перейдемо до границі. Далі у визначнику чисельника віднімемо від другого стовпчика перший помножений на x та змінимо місцями другий та перший стовпчики. Визначник знаменника розвинемо за першим стовпчиком. Отримаємо:

$$^{[1]}f(x) = \rho_1[x,x] = -\lim_{x_0,x_1\to x}\begin{vmatrix} f(x_0) & x_0\,f(x_0) \\ f(x_1) & x_1\,f(x_1)\end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & f(x_0) \\ 1 & f(x_1)\end{vmatrix} =$$

$$= -\lim_{h\to 0}\begin{vmatrix} f(x) & x\,f(x) \\ f(x+h) & (x+h)\,f(x+h)\end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & f(x) \\ 1 & f(x+h)\end{vmatrix} =$$

$$= -\lim_{h\to 0}\begin{vmatrix} f(x) & x\,f(x) \\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} & x\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x+h)\end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & f(x) \\ 1 & \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} c_0 & xc_0 \\ c_1 & xc_1+c_0\end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & c_0 \\ 0 & c_1\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c_0 & 0 \\ c_1 & c_0\end{vmatrix} : c_1 = \begin{vmatrix} c_{-1} & c_0 \\ c_0 & c_1\end{vmatrix} : c_1 = \frac{H_2^{(-1)}}{H_1^{(1)}}.$$

У (3), при $n=1$ замість x_0 і x_1 відповідно підставимо x і $x+h$. В обох визначниках віднімемо елементи першого рядка від відповідних елементів другого рядка, потім поділимо на h чисельник і знаменник та спрямуємо h до нуля. В результат замість x_2 підставимо $x+h$, віднімемо в обох визначниках елементи першого рядка та елементи другого рядка помножені на h від елементів третього рядка, далі поділимо чисельник і знаменник на h^2 та спрямуємо h до нуля. У визначнику знаменника віднімемо елементи другого стовпця помножені на x від відповідних елементів третього стовпця і обидва визначники розвинемо за першим стовпцем. Потім визначник чисельника розвинемо за другим стовпцем, а у визначнику знаменника змінимо місцями стовпчики. Отримаємо:

$$^{[2]}f(x) = \lim_{x_0,x_1,x_2\to x}\rho_2[x_0,x_1,x_2] = \lim_{x_0,x_1,x_2\to x}\begin{vmatrix} 1 & f(x_0) & x_0 \\ 1 & f(x_1) & x_1 \\ 1 & f(x_2) & x_2\end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & f(x_0) & x_0f(x_0) \\ 1 & f(x_1) & x_1f(x_1) \\ 1 & f(x_2) & x_2f(x_2)\end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{\substack{x_2\to x \\ h\to 0}}\begin{vmatrix} 1 & f(x) & x \\ 1 & f(x+h) & x+h \\ 1 & f(x_2) & x_2\end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & f(x) & xf(x) \\ 1 & f(x+h) & (x+h)f(x+h) \\ 1 & f(x_2) & x_2f(x_2)\end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\begin{vmatrix} 1 & f(x) & x \\ 0 & f'(x) & 1 \\ 1 & f(x+h) & x+h\end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & f(x) & xf(x) \\ 0 & f'(x) & xf'(x)+f(x) \\ 1 & f(x+h) & (x+h)f(x+h)\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & c_0 & x \\ 0 & c_1 & 1 \\ 0 & c_2 & 0\end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & c_0 & xc_0 \\ 0 & c_1 & xc_1+c_0 \\ 0 & c_2 & xc_2+c_1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c_0 & x \\ 0 & c_1 & 1 \\ 0 & c_2 & 0\end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & c_0 & 0 \\ 0 & c_1 & c_0 \\ 0 & c_2 & c_1\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & 1 \\ c_2 & 0\end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & c_0 \\ c_2 & c_1\end{vmatrix} = c_2 : \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2\end{vmatrix} = \frac{H_1^{(2)}}{H_2^{(0)}}.$$

Аналогічно знайдемо обернену похідну 2–го типу третього порядку. Використовуючи формули (4) і (5) маємо:

$$^{[3]}f(x) = \lim_{x_0,x_1,x_2,x_3\to x}\rho_3[x_0,x_1,x_2,x_3] =$$

$$
= -\lim_{x_0,x_1,x_2,x_3\to x}\begin{vmatrix}1 & f(x_0) & x_0f(x_0) & x_0^2f(x_0)\\ 1 & f(x_1) & x_1f(x_1) & x_1^2f(x_1)\\ 1 & f(x_2) & x_2f(x_2) & x_2^2f(x_2)\\ 1 & f(x_3) & x_3f(x_3) & x_3^2f(x_3)\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}1 & f(x_0) & x_0 & x_0f(x_0)\\ 1 & f(x_1) & x_1 & x_1f(x_1)\\ 1 & f(x_2) & x_2 & x_2f(x_2)\\ 1 & f(x_3) & x_3 & x_3f(x_3)\end{vmatrix} =
$$

$$
= -\lim_{\substack{x_2,x_3\to x\\ h\to 0}}\begin{vmatrix}1 & f(x) & xf(x) & x^2f(x)\\ 1 & f(x+h) & (x+h)f(x+h) & (x+h)^2f(x+h)\\ 1 & f(x_2) & x_2f(x_2) & x_2^2f(x_2)\\ 1 & f(x_3) & x_3f(x_3) & x_3^2f(x_3)\end{vmatrix} :
$$

$$
: \begin{vmatrix}1 & f(x) & x & xf(x)\\ 1 & f(x+h) & x+h & (x+h)f(x+h)\\ 1 & f(x_2) & x_2 & x_2f(x_2)\\ 1 & f(x_3) & x_3 & x_3f(x_3)\end{vmatrix} =
$$

$$
= -\lim_{\substack{x_3\to x\\ h\to 0}}\begin{vmatrix}1 & f(x) & xf(x) & x^2f(x)\\ 0 & f'(x) & xf'(x)+f(x) & x^2f'(x)+2xf(x)\\ 1 & f(x+h) & (x+h)f(x+h) & (x+h)^2f(x+h)\\ 1 & f(x_3) & x_3f(x_3) & x_3^2f(x_3)\end{vmatrix} :
$$

$$
: \begin{vmatrix}1 & f(x) & x & xf(x)\\ 0 & f'(x) & 1 & xf'(x)+f(x)\\ 1 & f(x+h) & x+h & (x+h)f(x+h)\\ 1 & f(x_3) & x_3 & x_3f(x_3)\end{vmatrix} =
$$

$$
= -\lim_{h\to 0}\begin{vmatrix}1 & f(x) & xf(x) & x^2f(x)\\ 0 & f'(x) & xf'(x)+f(x) & x^2f'(x)+2xf(x)\\ 0 & \dfrac{f''(x)}{2!} & x\dfrac{f''(x)}{2!}+f'(x) & x^2\dfrac{f''(x)}{2!}+2xf'(x)+f(x)\\ 1 & f(x+h) & (x+h)f(x+h) & (x+h)^2f(x+h)\end{vmatrix} :
$$

$$
: \begin{vmatrix}1 & f(x) & x & xf(x)\\ 0 & f'(x) & 1 & xf'(x)+f(x)\\ 0 & \dfrac{f''(x)}{2!} & 0 & x\dfrac{f''(x)}{2!}+f'(x)\\ 1 & f(x+h) & x+h & (x+h)f(x+h)\end{vmatrix} =
$$

$$
= -\begin{vmatrix}1 & c_0 & xc_0 & x^2c_0\\ 0 & c_1 & xc_1+c_0 & x^2c_1+2xc_0\\ 0 & c_2 & xc_2+c_1 & x^2c_2+2xc_1+c_0\\ 0 & c_3 & xc_3+c_2 & x^2c_3+2xc_2+c_1\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}1 & c_0 & x & xc_0\\ 0 & c_1 & 1 & xc_1+c_0\\ 0 & c_2 & 0 & xc_2+c_1\\ 0 & c_3 & 0 & xc_3+c_2\end{vmatrix}.
$$

У визначнику чисельника віднімемо елементи другого стовпця помножені на x від відповідних елементів третього стовпця, після цього віднімемо елементи другого стовпця помножені на x^2 і елементи третього стовпця помножені на $2x$ від відповідних елементів четвертого стовпця. У визначнику знаменника віднімемо елементи другого стовпця помножені на x від відповідних елементів четвертого стовпця. Далі обидва визначники розвинемо за першим стовпцем. У визначнику чисельника переставимо місцями перший та третій стовпчики. Визначник знаменника розвинемо за другим стовпцем та переставимо стовпчики місцями. Таким чином:

$$
{}^{[3]}f(x) = -\begin{vmatrix} 1 & c_0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & c_0 & 0 \\ 0 & c_2 & c_1 & c_0 \\ 0 & c_3 & c_2 & c_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & c_0 & x & 0 \\ 0 & c_1 & 1 & c_0 \\ 0 & c_2 & 0 & c_1 \\ 0 & c_3 & 0 & c_2 \end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix} c_1 & c_0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & 1 & c_0 \\ c_2 & 0 & c_1 \\ c_3 & 0 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & c_0 & c_1 \\ c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{H_3^{(-1)}}{H_2^{(1)}}.
$$

Отримаємо тепер у загальному випадку зображення оберненої похідної 2–го типу k–го порядку через похідні функції. Розглянемо два випадки: a) $k = 2n$; b) $k = 2n + 1$.

a) Нехай $k = 2n$. Покладемо в (3) замість x_0 і x_1 відповідно x і $x + h$, в обох визначниках, віднімемо елементи першого рядка від відповідних елементів другого рядка, поділимо на h чисельник і знаменник та спрямуємо h до нуля; потім підставимо $x + h$ замість x_2, віднімемо в обох визначниках елементи першого рядка та елементи другого рядка помножені на h від елементів третього рядка, поділимо чисельник і знаменник на h^2 та спрямуємо h до нуля; і т. д.; на останньому кроці підставимо $x + h$ замість x_{2n}, віднімемо в обох визначниках елементи першого рядка, елементи другого рядка помножені на h, і т. д., елементи 2n–го рядка помножені на h^{2n-1} від елементів 2n+1–го рядка, поділимо чисельник і знаменник на h^{2n} та спрямуємо h до нуля. Отримаємо:

$$
{}^{[2n]}f(x) = \lim_{x_0, x_1, \ldots, x_{2n} \to x} \rho_{2n}[x_0, x_1, \ldots, x_{2n}] =
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & c_0 & x & xc_0 & \ldots & x^{n-1} & x^{n-1}c_0 & x^n \\ 0 & c_1 & 1 & xc_1 + c_0 & \ldots & \binom{n-1}{1}x^{n-2} & \sum\limits_{i=0}^{1}\binom{n-1}{i}x^{n-1-i}c_{1-i} & \binom{n}{1}x^{n-1} \\ 0 & c_2 & 0 & xc_2 + c_1 & \ldots & \binom{n-1}{2}x^{n-3} & \sum\limits_{i=0}^{2}\binom{n-1}{i}x^{n-1-i}c_{2-i} & \binom{n}{2}x^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{2n} & 0 & xc_{2n} + c_{2n-1} & \ldots & 0 & \sum\limits_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^{n-1-i}c_{2n-i} & 0 \end{vmatrix} :
$$

$$
: \begin{vmatrix} 1 & c_0 & x & xc_0 & \ldots & x^{n-1} & x^{n-1}c_0 & x^n c_0 \\ 0 & c_1 & 1 & xc_1 + c_0 & \ldots & \binom{n-1}{1}x^{n-2} & \sum\limits_{i=0}^{1}\binom{n-1}{i}x^{n-1-i}c_{1-i} & \sum\limits_{i=0}^{1}\binom{n}{i}x^{n-i}c_{1-i} \\ 0 & c_2 & 0 & xc_2 + c_1 & \ldots & \binom{n-1}{2}x^{n-3} & \sum\limits_{i=0}^{2}\binom{n-1}{i}x^{n-1-i}c_{2-i} & \sum\limits_{i=0}^{2}\binom{n}{i}x^{n-i}c_{2-i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{2n} & 0 & xc_{2n} + c_{2n-1} & \ldots & 0 & \sum\limits_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^{n-1-i}c_{2n-i} & \sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}c_{2n-i} \end{vmatrix}.
$$

Дещо спростимо формулу. У визначниках чисельника і знаменника від четвертого стовпця віднімемо другий помножений на x; потім від шостого віднімемо другий помножений на x^2 і четвертий помножений на $2x$; і т. д.; від $2n$–го віднімемо другий помножений на x^{n-1}, четвертий помножений на $\binom{n-1}{1}x^{n-2}$, і т. д., $2n-2$–й помножений на $\binom{n-1}{n-2}x$. У визначнику знаменника крім того від $2n+1$–го стовпця віднімемо другий помножений на x^n, четвертий помножений на $\binom{n}{1}x^{n-1}$, і т. д., $2n$–й помножений на $\binom{n}{n-1}x$. Отримаємо:

$$
{}^{[2n]}f(x) = \begin{vmatrix} 1 & c_0 & x & 0 & x^2 & \dots & x^{n-1} & 0 & x^n \\ 0 & c_1 & 1 & c_0 & 2x & \dots & \binom{n-1}{1}x^{n-2} & 0 & \binom{n}{1}x^{n-1} \\ 0 & c_2 & 0 & c_1 & 1 & \dots & \binom{n-1}{2}x^{n-3} & 0 & \binom{n}{2}x^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{2n} & 0 & c_{2n-1} & 0 & \dots & 0 & c_{n+1} & 0 \end{vmatrix} :
$$

$$
: \begin{vmatrix} 1 & c_0 & x & 0 & x^2 & \dots & x^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 1 & c_0 & 2x & \dots & \binom{n-1}{1}x^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & c_1 & 1 & \dots & \binom{n-1}{2}x^{n-3} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{2n} & 0 & c_{2n-1} & 0 & \dots & 0 & c_{n+1} & c_n \end{vmatrix}.
$$

Розвинемо визначники за першим стовпчиком; далі результат розвинемо за другим стовпчиком і т.д. В обох визначниках процедуру розвинення повторимо n разів. Крім того, визначник чисельника розвинемо за останнім стовпчиком. Маємо:

$$
{}^{[2n]}f(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} c_{n+1} & c_n & \dots & c_3 & c_2 \\ c_{n+2} & c_{n+1} & \dots & c_4 & c_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{2n} & c_{2n-1} & \dots & c_{n+2} & c_{n+1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_n & c_{n-1} & \dots & c_1 & c_0 \\ c_{n+1} & c_n & \dots & c_2 & c_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{2n} & c_{2n-1} & \dots & c_{n+1} & c_n \end{vmatrix}.
$$

У визначниках переставимо місцями перший стовпець та останній, другий та передостанній і т. д. В чисельнику буде здійснено $[n/2]$ перестановок стовпців, а у знаменнику — $[(n+1)/2]$ перестановок. Тобто, в двох визначниках буде зроблено n перестановок стовпців. Отримуємо:

$$
{}^{[2n]}f(x) = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \dots & c_n & c_{n+1} \\ c_3 & c_4 & \dots & c_{n+1} & c_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{2n-1} & c_{2n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-1} & c_{2n} \end{vmatrix} = \frac{H_n^{(2)}}{H_{n+1}^{(0)}}.
$$

b) Нехай $k = 2n+1$. Якщо в (4) в обох визначниках підставити замість x_0 і x_1, відповідно, x і $x+h$ та виконати аналогічні дії, тобто відняти елементи першого рядка від відповідних елементів другого рядка, поділити на h чисельник і знаменник та спрямувати h до нуля; далі, підставити $x+h$ замість x_2, відняти у визначниках елементи першого рядка і елементи другого рядка помножені на h, від елементів третього рядка, поділити чисельник і знаменник на h^2 та спрямувати h до нуля; і т. д., то отримаємо формулу для оберненої похідної 2–го типу $2n+1$–го порядку:

$$
{}^{[2n+1]}f(x) = \lim_{x_0, x_1, \dots, x_{2n+1} \to x} \rho_{2n+1}[x_0, x_1, \dots, x_{2n+1}] =
$$

$$
= -\begin{vmatrix}
1 & \dots & x^{n-1}c_0 & x^n c_0 & x^{n+1}c_0 \\
0 & \dots & \sum\limits_{i=0}^{1}\binom{n-1}{i}x^{n-1-i}c_{1-i} & \sum\limits_{i=0}^{1}\binom{n}{i}x^{n-i}c_{1-i} & \sum\limits_{i=0}^{1}\binom{n+1}{i}x^{n+1-i}c_{1-i} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & \sum\limits_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^{n-1-i}c_{2n+1-i} & \sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}c_{2n+1-i} & \sum\limits_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}x^{n+1-i}c_{2n+1-i}
\end{vmatrix} :
$$

$$
: \begin{vmatrix}
1 & \dots & x^{n-1} & x^{n-1}c_0 & x^n & x^n c_0 \\
0 & \dots & \binom{n-1}{1}x^{n-2} & \sum\limits_{i=0}^{1}\binom{n-1}{i}x^{n-1-i}c_{1-i} & \binom{n}{1}x^{n-1} & \sum\limits_{i=0}^{1}\binom{n}{i}x^{n-i}c_{1-i} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \sum\limits_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^{n-1-i}c_{2n+1-i} & 0 & \sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}c_{2n+1-i}
\end{vmatrix} .
$$

Так само, як і в попередньому випадку, приводимо дану формулу до простішого вигляду за рахунок дій над стовпчиками. Маємо:

$$
{}^{[2n+1]}f(x) = -\begin{vmatrix}
1 & c_0 & x & 0 & \dots & x^{n-1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & c_1 & 1 & c_0 & \dots & \binom{n-1}{1}x^{n-2} & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & c_{2n+1} & 0 & c_{2n} & \dots & 0 & c_{n+2} & c_{n+1} & c_n
\end{vmatrix} :
$$

$$
: \begin{vmatrix}
1 & c_0 & x & 0 & \dots & x^{n-1} & 0 & x^n & 0 \\
0 & c_1 & 1 & c_0 & \dots & \binom{n-1}{1}x^{n-2} & 0 & \binom{n}{1}x^{n-1} & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & c_{2n+1} & 0 & c_{2n} & \dots & 0 & c_{n+2} & 0 & c_{n+1}
\end{vmatrix} .
$$

Розвивши визначники за першим стовпцем, а далі за другим, потім за третім і т.д. та змінивши місцями перший стовпчик та останній, другий та передостанній і т.д. кінцеве отримаємо:

$$
{}^{[2n+1]}f(x) = \begin{vmatrix}
0 & c_0 & \dots & c_{n-1} & c_n \\
c_0 & c_1 & \dots & c_n & c_{n+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n} & c_{2n+1}
\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}
c_1 & c_2 & \dots & c_n & c_{n+1} \\
c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} & c_{n+2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{2n} & c_{2n+1}
\end{vmatrix} = \frac{H_{n+2}^{(-1)}}{H_{n+1}^{(1)}} .
$$

Таким чином доведено наступне твердження.

Твердження 3. *Обернені похідні 2–го типу визначаються через звичайні похідні як відношення визначників Ганкеля:*

$$
{}^{[2n]}f(x) = \frac{H_n^{(2)}}{H_{n+1}^{(0)}} , \qquad {}^{[2n+1]}f(x) = \frac{H_{n+2}^{(-1)}}{H_{n+1}^{(1)}} , \qquad n \geqslant 0 . \tag{6}
$$

4. Зв'язок обернених похідних 2–го типу із оберненими похідними Тіле. Із (2) та (6) випливає, що між оберненими похідними 2-го типу та оберненими похідними Тіле парного порядку існує очевидний взаємозв'язок ${}^{[2n]}f(x) = \dfrac{1}{{}^{(2n)}f(x)}$. Що стосується відповідних похідних непарного порядку, то із (2) та (6) легко бачити, що таке співвідношення буде мати, скоріш за все, нелінійний вигляд. Так в [3] показано, що

$$ {}^{[1]}f = -f^{2\,(1)}f, \qquad {}^{[3]}f = -({}^{(3)}f - {}^{(1)}f)({}^{(2)}f)^2 - f^2 \cdot {}^{(1)}f. $$

В загальному випадку, можна розвинути визначник Ганкеля $H_{n+2}^{(-1)}$ за правилом Лапласа в суму добутків мінорів, які знаходяться в перших двох стовпцях, на їх алгебричне доповнення:

$$ H_{n+2}^{(-1)} = \begin{vmatrix} 0 & c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{2n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & c_0 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_3 & c_4 & \dots & c_{n+2} \\ c_4 & c_5 & \dots & c_{n+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+2} & c_{n+3} & \dots & c_{2n+1} \end{vmatrix} - $$

$$ - \begin{vmatrix} 0 & c_0 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ c_4 & c_5 & \dots & c_{n+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+2} & c_{n+3} & \dots & c_{2n+1} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} c_{n-1} & c_n \\ c_n & c_{n+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix}. $$

Позначимо через

$$ G(x) = - \begin{vmatrix} 0 & c_0 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ c_4 & c_5 & \dots & c_{n+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+2} & c_{n+3} & \dots & c_{2n+1} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} c_{n-1} & c_n \\ c_n & c_{n+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix}. $$

Тоді звідси та із формул (2) та (6) отримаємо, що

$$ {}^{[2n+1]}f(x) = -c_0^2 \frac{H_n^{(3)}}{H_{n+1}^{(1)}} + \frac{G(x)}{H_{n+1}^{(1)}} = -f^2(x) \cdot {}^{(2n+1)}f(x) + \frac{G(x)}{H_{n+1}^{(1)}}. $$

Із останньої рівності випливає, що і в загальному випадку обернена похідна другого типу непарного порядку суттєво відрізняється від оберненої похідної Тіле того ж порядку.

1. *Thiele T. N.* Interpolationsprechnung. — Leipzig: Commisission von B. G. Teubner, 1909. — XII + 175 S.
2. *Пагіря М. М.* Обернений ланцюговий дріб Тіле // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. – 2008. – Вип. 17. – С. 179–192.
3. *Пагіря М. М.* Обернені похідні 2–го типу та їх властивості // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. – 2009. – Вип. 18. – С. 99–105.
4. *Кацала Р. А.* Зв'язок між оберненими похідними та похідними функції однієї дійсної змінної // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. – 2008. – Вип. 16. – С. 73–81.
5. *Nörlund N.E.* Vorlesungen über Differenzenrechnung. — Berlin: J. Springer, 1924. — 551 S.

Одержано 21.04.2011