УДК 512.643.8

Р. Ф. Динис, О. А. Тилищак (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО ЗВІДНІСТЬ МАТРИЦЬ ДЕЯКОГО ВИГЛЯДУ НАД КОМУТАТИВНИМИ ЛОКАЛЬНИМИ КІЛЬЦЯМИ ГОЛОВНИХ ІДЕАЛІВ

There has been found the criterion of the reducibility of the product of the permutation matrix of the cycle of length n and the diagonal matrix $\mathrm{diag}[1,\ldots,1,t,\ldots,t]$ of order $n<7$ over a commutative local principle ideal ring, the Jacobson radical of which generated by the element t. It has been shown that founded criterion is not hold if $n=7$.

Знайдено критерій звідності добутку підстановочної матриці циклу довжини n та діагональної матриці $\mathrm{diag}[1,\ldots,1,t,\ldots,t]$ порядку $n<7$ над комутативним локальним кільцем головних ідеалів, радикал Джекобсона якого породжується елементом t. Показано, що знайдений критерій невірний при $n=7$.

Перенесення поняття подібності матриць з полів на довільні комутативні кільця сильно ускладнює задачу їх класифікації [1]. Вона розв'язана лише над деякими областями головних ідеалів для матриць малих порядків (напр. [1]–[3]). Розглядається задача звідності матриць вигляду

$$M(t,k,n)=\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix}0 & \ldots & 0\end{matrix}}^{k} & 0 & \ldots & 0 & t\\ \begin{matrix}1 & \ldots & 0\end{matrix} & 0 & \ldots & 0 & 0\\ \begin{matrix}\vdots & \ddots & \vdots\end{matrix} & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \begin{matrix}0 & \ldots & 1\end{matrix} & 0 & \ldots & 0 & 0\\ \begin{matrix}0 & \ldots & 0\end{matrix} & t & \ldots & 0 & 0\\ \begin{matrix}\vdots & \ddots & \vdots\end{matrix} & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \begin{matrix}0 & \ldots & 0\end{matrix} & 0 & \ldots & t & 0 \end{pmatrix}$$

довільного порядку n над комутативним кільцем K з одиницею 1, де k, n — натуральні числа ($k<n$). Далі $\mathrm{Rad}\,K$ позначає радикал Джекобсона кільця K.

Лема 1 ([4]). *Нехай K — комутативне локальне кільце,* $\mathrm{Rad}\,K=tK$, $t\neq 0$. *Матриця $M(t,1,n)$ порядку $n\geqslant 2$ незвідна над кільцем K.*

Лема 2. *Нехай K — комутативне локальне кільце,* $\mathrm{Rad}\,K=tK$, $t\neq 0$. *Матриця $M(t,n-1,n)$ порядку $n\geqslant 2$ незвідна над кільцем K.*

Доведення. Припустимо, що матриця $M(t,n-1,n)$ є звідною. Тоді її характеристичний многочлен $|\lambda E-M(t,n-1,n)|$ розкладається на множники:

$$\lambda^n\pm t=(\lambda^{n_1}+a_{n_1-1}\lambda^{n_1-1}\cdots+a_0)(\lambda^{n_2}+b_{n_2-1}\lambda^{n_2-1}+\cdots+b_0), \qquad (1)$$

де $n_i>0$ $(i=1,2)$, a_{n_1-1}, …, a_0, b_{n_2-1}, …, $b_0\in K$. Оскільки над полем K/tK многочлени λ^i $(i=0,\ \ldots,\ n)$ — всі нормовані дільники многочлена λ^n, одержаного з многочлена (1) редукцією за модулем ідеалу tK, то a_0, $b_0\in tK$. Звідси слідує $t=\pm a_0b_0\in t^2K$, що неможливо. Лема доведена.

Лема 3. *Нехай k, n — натуральні числа, $k<n$. Якщо $(k,n)>1$, то матриця $M(\lambda,k,n)$ звідна над кільцем $\mathbb{Z}[\lambda]$ многочленів від невідомої λ з цілочисловими коефіцієнтами.*

Доведення. Нехай $(n,k)=d$, $k=dr$, $n=ds$, $n-k=dt$. Тоді $r<s$, $t<n-k$.

Нехай φ — лінійний оператор визначений матрицею $M(\lambda,k,n)$ в базисі $a_1,\ldots,$ a_n деякого лінійного простору L над полем відношень F кільця $\mathbb{Z}[\lambda]$. Тоді

$$\varphi(a_i)=\left\{\begin{array}{ll}\lambda^{\alpha(i)}a_{i+1}, & i<n,\\ \lambda^{\alpha(i)}a_1, & i=n,\end{array}\right. \quad \text{де} \quad \alpha(i)=\left\{\begin{array}{ll}0, & i\leqslant k,\\ 1, & i>k.\end{array}\right. \tag{2}$$

Очевидно, $\varphi^n(a_1)=\lambda^{n-k}a_1=\lambda^{dt}a_1$. Нехай

$$b'_1=\sum_{i=1}^{d}\lambda^{(d-i)t}\varphi^{(i-1)s}(a_1). \tag{3}$$

Звідси

$$\varphi^s(b'_1)=\sum_{i=1}^{d}\lambda^{(d-i)t}\varphi^{is}(a_1)=\sum_{i=1}^{d-1}\lambda^{(d-i)t}\varphi^{is}(a_1)+\varphi^{ds}(a_1)=$$

$$=\varphi^n(a_1)+\sum_{i=2}^{d}\lambda^{(d-i+1)t}\varphi^{(i-1)s}(a_1)=\lambda^{dt}a_1+\sum_{i=2}^{d}\lambda^{(d-i+1)t}\varphi^{(i-1)s}(a_1)=$$

$$=\sum_{i=1}^{d}\lambda^{(d-i+1)t}\varphi^{(i-1)s}(a_1)=\lambda^t\left(\sum_{i=1}^{d}\lambda^{(d-i+1)t}\varphi^{(i-1)s}(a_1)\right)=\lambda^t(b'_1).$$

Визначимо b'_j рекурентно

$$b'_j=\varphi(b'_{j-1})\ (j=2,\ldots,s). \tag{4}$$

Тоді $\varphi(b'_s)=\varphi^s(b'_1)=\lambda^t b'_1$. Враховуючи формули (2), (3) та (4), одержимо

$$b'_j=\sum_{i=1}^{d}\lambda^{\alpha_{ij}}a_{(i-1)s+j}\ (j=1,\ldots,s).$$

для деяких $\alpha_{ij}\in\mathbb{Z}$ $(i=1,\ldots,d,\ j=1,\ldots,s)$. Нехай, $m_j=\min\limits_i\{\alpha_{ij}\}$, $\beta_{ij}=$ $=\alpha_{ij}-m_j$ $(i=1,\ldots,d,\ j=1,\ldots,s)$. Тоді $\beta_{ij}\geqslant 0$ $(i=1,\ldots,d,\ j=1,\ldots,s)$. Крім того, $\beta_{\mu_j j}=0$ $(j=1,\ldots,s)$. Індекси векторів $a_{(\mu_1-1)s+1}$, $a_{(\mu_2-1)s+2}$, $\ldots$, $a_{(\mu_s-1)s+s}$ різні, бо не конгруентні за модулем s, і їх можна доповнити деякими векторами $a_{i'_{s+1}}$, $\ldots$, $a_{i'_n}$ до базису a_1, $\ldots$, a_n простору L записаному у деякому порядку. Нехай $b_j=\sum\limits_{i=1}^{d}\lambda^{\beta_{ij}}a_{(i-1)s+j}$ $(j=1,\ \ldots,\ s)$. Тоді $b_1,\ldots b_s$, $a_{i'_{s+1}}$, $\ldots$, $a_{i'_n}$ є базисом простору L. Матриця переходу від базису $a_{(\mu_1-1)s+1}$, $a_{(\mu_2-1)s+2}$, $\ldots$, $a_{(\mu_s-1)s+s}$, $a_{i'_{s+1}}$, $\ldots$, $a_{i'_n}$ до якого складається з елементів з $\mathbb{Z}[\lambda]$ і має вигляд

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0\\ \lambda^{\delta_{s+1\,1}} & \lambda^{\delta_{s+1\,2}} & \ldots & \lambda^{\delta_{s+1\,s}} & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda^{\delta_{n1}} & \lambda^{\delta_{n2}} & \ldots & \lambda^{\delta_{ns}} & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Для деяких $\delta_{ij}\geqslant 0$ $(i=s+1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,s)$. Очевидно, $C\in GL(n,\mathbb{Z}[\lambda])$.

Матриця переходу P від базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ до базису $a_{(\mu_1-1)s+1}, a_{(\mu_2-1)s+2}, \ldots, a_{(\mu_s-1)s+s}, a_{i'_{s+1}}, \ldots, a_{i'_n}$ є підстановочною і, отже, $P \in GL(n, \mathbb{Z}[\lambda])$. Тому $S = PC \in GL(n, \mathbb{Z}[\lambda])$ є матрицею переходу від базису $a_1, \ldots, a_n$ до базису $b_1, \ldots, b_s, a_{i'_{s+1}}, \ldots, a_{i'_n}$. Так як $b'_j = \lambda^{m_j} b_j$, $(j = 1, \ldots, s)$, то $\langle b_1, b_2, \ldots, b_s\rangle_F = \langle b'_1, b'_2, \ldots, b'_s\rangle_F$ φ-інваріантний підпростір простору L. Звідси

$$S^{-1}M(\lambda, k, n)S = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де A і B — квадратні матриці відповідно порядків s, $n-s$. Тому матриця $M(\lambda, k, n)$ звідна над кільцем $\mathbb{Z}[\lambda]$. Лема доведена.

Теорема 1. *Нехай K — комутативне кільце з одиницею 1, $t \in K$, k, n — натуральні числа, $k < n$. Якщо $(k, n) > 1$, то матриця*

$$M(t,k,n) = \begin{pmatrix} \overbrace{0 & \ldots & 0}^{k} & 0 & \ldots & 0 & t \\ 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & t & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & t & 0 \end{pmatrix}$$

порядку n звідна над кільцем K.

Доведення. Доведення випливає з леми 3 та існування гомоморфізму $f : \mathbb{Z}[\lambda] \to K$ такого, що $f(1) = 1$, $f(\lambda) = t$. Теорема доведена.

Лема 4. *Нехай k, n — натуральні числа, $k < n$, K — комутативне локальне кільце, $\operatorname{Rad} K = tK$, $t \neq 0$. Матриця $M(t,k,n)$ не є подібна над кільцем K жодній з матриць вигляду*

$$M_1 = \begin{pmatrix} tA & D \\ 0 & B \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & tB \end{pmatrix},$$

де A і B — квадратні матриці відповідно порядків s і $n-s$ над кільцем K $(0 < s < n)$.

Доведення. Припустимо, що існує матриця $C \in GL(n, K)$, що $C^{-1}M(t,k,n) \times C = M_1$. Тобто

$$M(t,k,n)C = C \begin{pmatrix} tA & D \\ 0 & B \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Позначимо: $C = \|c_{ij}\|$ $(c_{ij} \in K)$, $C_i = (c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{is})$ $(i = 1, \ldots, n)$. З (5) дістаємо, що $tc_n = tc_1A$, $c_1 = tc_2A$, $\ldots$ $c_k = tc_{k+1}A$, $tc_{k+1} = tc_{k+2}A$, $\ldots$ $tc_{n-1} = tc_nA$. Оскільки $t \neq 0$, то $\overline{c}_n = \overline{c}_1\overline{A}$, $\overline{c}_1 = 0$, $\ldots$ $\overline{c}_k = 0$, $\overline{c}_{k+1} = \overline{c}_{k+2}\overline{A}$, $\ldots$ $\overline{c}_{n-1} = \overline{c}_n\overline{A}$ і $\overline{c}_1 = \cdots = \overline{c}_k = \overline{c}_{k+1} = \cdots = \overline{c}_n = 0$. Через це $\det \overline{C} = 0$, що неможливо.

Аналогічно розглядається випадок $C^{-1}MC = M_2$ або $C^{-1}M = M_2C^{-1}$. Лема доведена.

Позначимо через $\overline{M}$ матрицю, одержану з матриці M над локальним кільцем K редукцією за модулем ідеалу $\operatorname{Rad} K$.

Лема 5. *Нехай k, n — натуральні числа, $k < n$, K — комутативне локальне кільце,* $\operatorname{Rad} K = tK$, $t \neq 0$. *Матриця $M(t,k,n)$ не є подібна над кільцем K матриці вигляду*

$$M = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де A і B — квадратні матриці відповідно порядків s і $n-s$ над кільцем K $(0 < s < n)$, A або B оборотня.

Доведення. Дійсно матриця $\overline{M(t,k,n)}$ нільпотентна, тому матриці $\overline{A}$ та $\overline{B}$ нільпотентні. А, отже, матриці $\overline{A}$ та $\overline{B}$, як і матриці A та B, не можуть бути оборотними. Лема доведена.

Лема 6. *Нехай K — комутативне локальне кільце,* $\operatorname{Rad} K = tK$, $t \neq 0$. *Матриця $M(t,3,5)$ є незвідною над кільцем K.*

Доведення. Припустимо, що матриця $M(t,3,5)$ є звідною. Тоді існує така матриця $C \in GL(5,K)$, що

$$M(t,3,5)C = C\begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}. \tag{6}$$

де A і B — квадратні матриці над кільцем K відповідно порядків s та $n-s$ $(0 < s < 5)$.

Розглянемо випадок, коли $s = 1$. Тоді $A \in K$. Оскільки $A \in tK$ або $A \in K^*$, то одержуємо протиріччя з лемами 4 або 5.

Нехай тепер $s = 2$. Позначимо: $C = \|c_{ij}\|$ $(c_{ij} \in K)$, $C_i = (c_{i1}, c_{i2})$ $(i = 1, \dots, 5)$. Тоді з рівності (6) отримаємо

$$\begin{cases} tc_5 = c_1 A, \\ c_1 = c_2 A, \\ c_2 = c_3 A, \\ c_3 = c_4 A, \\ tc_4 = c_5 A. \end{cases} \tag{7}$$

За лемами 4 та 5 $\operatorname{rank}\overline{A} \neq 0$ та $\operatorname{rank}\overline{A} \neq 2$. Тому $\operatorname{rank}\overline{A} = 1$. Оскільки матриця $\overline{A}$ нільпотентна, то, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що

$$A = \begin{pmatrix} t\alpha & 1+t\beta \\ t\gamma & t\delta \end{pmatrix},$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$. Підставивши A у рівності (7), матимемо:

$$\begin{cases} (tc_{51}, tc_{52}) &=& (c_{11}t\alpha + c_{12}t\gamma, c_{11} + c_{11}t\beta + c_{12}t\delta), \\ (c_{11}, c_{12}) &=& (c_{21}t\alpha + c_{22}t\gamma, c_{21} + c_{21}t\beta + c_{22}t\delta), \\ (c_{21}, c_{22}) &=& (c_{31}t\alpha + c_{32}t\gamma, c_{31} + c_{31}t\beta + c_{32}t\delta), \\ (c_{31}, c_{32}) &=& (c_{41}t\alpha + c_{42}t\gamma, c_{41} + c_{41}t\beta + c_{42}t\delta), \\ (tc_{41}, tc_{42}) &=& (c_{51}t\alpha + c_{52}t\gamma, c_{51} + c_{51}t\beta + c_{52}t\delta). \end{cases} \tag{8}$$

З рівностей (8) отримаємо: $\bar{c}_{11} = \bar{c}_{21} = \bar{c}_{31} = \bar{c}_{51} = 0$. Крім того,

$$c_{12} = c_{21} + c_{21}t\beta + c_{22}t\delta, \text{ тому } \bar{c}_{12} = 0;$$

$$c_{22} = c_{31} + c_{31}t\beta + c_{32}t\delta, \text{ тому } \bar{c}_{22} = 0;$$

$$tc_{52} = c_{11} + c_{11}t\beta + c_{12}t\delta = c_{21}t\alpha + c_{22}t\gamma + c_{11}t\beta + c_{12}t\delta \text{ , тому}$$

$$\bar{c}_{52} = \bar{c}_{21}\overline{\alpha} + \bar{c}_{22}\overline{\gamma} + \bar{c}_{11}\overline{\beta} + \bar{c}_{12}\overline{\delta} = 0, \ \bar{c}_{52} = 0;$$

$$tc_{41} = c_{51}t\alpha + c_{52}t\gamma \text{ , тому } \bar{c}_{41} = \bar{c}_{51}\overline{\alpha} + \bar{c}_{52}\overline{\gamma} = 0, \ \bar{c}_{41} = 0.$$

Отже, $\det \overline{C} = 0$. Протиріччя.

Випадки $s = 3$ або $s = 4$ означають, що порядок $n - s$ матриці B рівний 2 або 1 і розглядаються аналогічно розглянутим. Лема доведена.

Лема 7. *Нехай K — комутативне локальне кільце, $RadK = tK$, $t \neq 0$. Матриця $M(t, 2, 5)$ є незвідною над кільцем K.*

Доведення. Припустимо, що матриця $M(t, 2, 5)$ є звідною. Тоді існує така матриця $C \in GL(5, K)$, що

$$M(t, 2, 5)C = C \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}, \tag{9}$$

де A, B — квадратні матриці над кільцем K відповідно порядків s та $n - s$.

Аналогічно, як і при доведенні леми 6, досить розглянути випадок $s = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} t\alpha & 1 + t\beta \\ t\gamma & t\delta \end{pmatrix},$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$. Позначимо: $C = \|c_{ij}\|$ $(c_{ij} \in K)$, $C_i = (c_{i1}, c_{i2})$ $(i = 1, \ldots, 5)$. Тоді з рівності (9) отримаємо

$$\begin{cases} tc_5 = c_1 A, \\ c_1 = c_2 A, \\ c_2 = c_3 A, \\ tc_3 = c_4 A, \\ tc_4 = c_5 A. \end{cases} \tag{10}$$

Підставивши A у рівності (10), матимемо:

$$\begin{cases} (tc_{51}, tc_{52}) = (c_{11}t\alpha + c_{12}t\gamma, c_{11} + c_{11}t\beta + c_{12}t\delta) \\ (c_{11}, c_{12}) = (c_{21}t\alpha + c_{22}t\gamma, c_{21} + c_{21}t\beta + c_{22}t\delta) \\ (c_{21}, c_{22}) = (c_{31}t\alpha + c_{32}t\gamma, c_{31} + c_{31}t\beta + c_{32}t\delta) \\ (tc_{31}, tc_{32}) = (c_{41}t\alpha + c_{42}t\gamma, c_{41} + c_{41}t\beta + c_{42}t\delta) \\ (tc_{41}, tc_{42}) = (c_{51}t\alpha + c_{52}t\gamma, c_{51} + c_{51}t\beta + c_{52}t\delta). \end{cases} \tag{11}$$

З рівностей (11) отримаємо: $\overline{c}_{11} = \overline{c}_{21} = \overline{c}_{41} = \overline{c}_{51} = 0$. Крім того,

$$c_{12} = c_{21} + c_{21}t\beta + c_{22}t\delta, \text{ тому } \overline{c}_{12} = 0;$$
$$c_{22} = c_{31} + c_{31}t\beta + c_{32}t\delta, \text{ тому } \overline{c}_{22} = \overline{c}_{31};$$
$$tc_{31} = c_{41}t\alpha + c_{42}t\gamma, \text{ тому } \overline{c}_{31} = \overline{c}_{42}\overline{\gamma};$$
$$tc_{41} = c_{51}t\alpha + c_{52}t\gamma, \text{ тому } \overline{c}_{52}\overline{\gamma} = 0;$$
$$tc_{52} = c_{11} + c_{11}t\beta + c_{12}t\delta = c_{21}t\alpha + c_{22}t\gamma + c_{11}t\beta + c_{12}t\delta \text{ тому}$$
$$\overline{c}_{52} = \overline{c}_{21}\overline{\alpha} + \overline{c}_{22}\overline{\gamma} + \overline{c}_{11}\overline{\beta} + \overline{c}_{12}\overline{\delta} = \overline{c}_{31}\overline{\gamma};$$

Якщо $\overline{\gamma} = 0$, то $\overline{c}_{31} = 0$. Якщо $\overline{\gamma} \neq 0$, то $\gamma \in K^*$, $\overline{c}_{52} = 0$, $\overline{c}_{31} = 0$. Звідси $\det \overline{C} = 0$, що неможливо. Лема доведена.

Теорема 2. *Нехай K — комутативне локальне кільце, $RadK = tK$, $t \neq 0$, k, n — натуральні числа, $k < n < 7$. Матриця*

$$M(t,k,n) = \begin{pmatrix} \overbrace{0 & \dots & 0}^{k} & 0 & \dots & 0 & t \\ 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & t & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & t & 0 \end{pmatrix}$$

порядку n звідна над кільцем K тоді і тільки тоді, коли $(k,n) > 1$.

Доведення. Достатність випливає з теореми 1. Нехай $(k,n) = 1$. Тоді пара (k,n) є одною з пар $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(1,4)$, $(3,4)$, $(1,5)$, $(2,5)$, $(3,5)$, $(4,5)$, $(1,6)$, $(5,6)$. Покажемо, що $M(t,k,n)$ незвідна. Якщо пара (k,n) є одною з пар $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(1,4)$, $(3,4)$, $(1,5)$, $(4,5)$, $(1,6)$, $(5,6)$, то за лемами 1 та 2 матриця $M(t,k,n)$ незвідна. Якщо пара (k,n) є одною з пар $(2,5)$, $(3,5)$, то за лемами 7 та 6 матриця $M(t,k,n)$ незвідна. Теорема доведена.

Зауваження 1. *Нехай K — комутативне локальне кільце,* $\operatorname{Rad} K = tK$, $t \neq 0$, $t^2 = 0$. *Матриця $M(t,3,7)$ звідна над кільцем K.*

Доведення. Ясно, що

$$C = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&t&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&1&0 \\ 0&t&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \in GL(7,K),\ C^{-1} = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&-t&0&0 \\ 0&0&-1&0&0&1&0 \\ 0&0&0&-t&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

Крім того, $C^{-1}M(t,3,7)C =$

$$= C^{-1} \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&t \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&t&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&t&0&0&0&0&0 \\ 0&0&t&0&0&0&0 \\ t&0&0&0&0&t&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&t&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&t&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&t \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&t&0 \end{pmatrix}.$$

Зауваження доведене.

1. Шевченко В. Н. Сидоров С. В. О подобии матриц второго порядка над кольцом целых чисел // Известия вузов. Сер. матем. – 2006. – № 4. – С. 57–64.
2. Pizarro A. Similarity Classes of 3×3 Matrices over a Discrete Valuation Ring // Linear Algebra and Its Applications. – 1983. – Vol. 54. – P. 29–51.
3. Сидоров С. В. О подобии матриц третьего порядка над кольцом целых чисел, имеющих приводимый характеристический многочлен // Вест. Нижегородского ун-та им. Н. И. Лобачевского. Сер. Мате мат. моделирование. Опт. управление. – 2009. – № 1. – С. 119–127.
4. Гудивок П. М., Тилищак О. А. Про незвідні модулярні зображення скінченних p-груп над комутативними локальними кільцями // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1998. – Вип. 3. – С. 78–83.

Одержано 05.05.2012