

УДК 519.21

Ю. Ю. Млавець (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО РОЗПОДІЛ СУПРЕМУМІВ ПРИРОСТІВ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ З ПРОСТОРІВ $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

The conditions of sampling continuity are investigated and estimates for distributions of supremums increments of processes from spaces $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ are evaluated.

Досліджуються умови вибіркової неперервності та знаходяться оцінки для розподілів супремумів приростів процесів з просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Вступ. Простори випадкових величин $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ були введені Єрмаковим і Островським в [1]. Робота [3], присвячена детальному вивченню цих просторів. Ця робота є продовженням [3]. Тут вивчаються умови вибіркової неперервності випадкових процесів з $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ та оцінки розподілів супремумів їх приростів. Подібні оцінки для процесів з $Sub_\varphi(\Omega)$ отримані в [2].

Робота складається з вступу та трьох розділів. В першому розділі наведено необхідні відомості з теорії просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. В другому розділі знайдено оцінки для розподілів супремумів приростів випадкових процесів з $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ та отримано умови вибіркової неперервності з ймовірністю одиниця цих процесів. В третьому розділі результати другого розділу застосовуються до випадкових процесів з $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ визначених на $[0, T]$.

1. Простори $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Означення 1. [3] *Нехай $\psi(u) > 0$, $u \geq 1$ – монотонно зростаюча неперервна функція (вагова функція), така що $\psi(u) \rightarrow \infty$, якщо $u \rightarrow \infty$. Випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, якщо виконується умова*

$$\sup_{u \geq 1} \frac{(\mathbf{E} |\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)} < \infty.$$

Простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ – простір Банаха з нормою [3]

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u \geq 1} \frac{(\mathbf{E} |\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)}.$$

Теорема 1. [3] *Нехай випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, то для будь-якого $x > 0$ виконується нерівність*

$$P\{|\xi| > x\} \leq \inf_{u \geq 1} \frac{\|\xi\|_\psi^u (\psi(u))^u}{x^u}.$$

Означення 2. [3] *Додатньо монотонно неспадна послідовність $(\varkappa(n))$, $n \geq 1$ називається M - характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, якщо для будь-яких випадкових величин ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ з цього простору виконується нерівність*

$$\left\| \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i| \right\|_\psi \leq \varkappa(n) \max_{1 \leq i \leq n} \|\xi_i\|_\psi.$$

Теорема 2. [3] *Послідовність*

$$\varkappa(n) = \sup_{u \geq 1} \inf_{v > 0} n^{\frac{1}{u+v}} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)}$$

є M -характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Приклад 1. [3] *Функція $\psi(u) = u^\alpha$, де $\alpha > 0$, то*

$$P\{|\xi| > x\} \leq \exp \left\{ -\frac{\alpha}{e} \left(\frac{x}{\|\xi\|_\psi} \right)^{1/\alpha} \right\}$$

і мажоруюча характеристика $\varkappa(n) = (\ln n)^\alpha \left(\frac{e}{\alpha}\right)^\alpha$.

Приклад 2. [3] *Функція $\psi(u) = e^{au}$, де $a > 0$, то при $x > \|\xi\|_\psi$*

$$P\{|\xi| > x\} \leq \exp \left\{ -\frac{\left(\ln \frac{x}{\|\xi\|_\psi}\right)^2}{2a} \right\}$$

і мажоруюча характеристика $\varkappa(n) = e^{2\sqrt{a \ln n} - a}$.

Приклад 3. [3] *Функція $\psi(u) = e^{u^2}$, то при $x > \|\xi\|_\psi$*

$$P\{|\xi| > x\} \leq \exp \left\{ -\frac{2 \left(\ln \frac{x}{\|\xi\|_\psi}\right)^{3/2}}{3^{3/2}} \right\}$$

і мажоруюча характеристика $\varkappa(n) = \exp \left\{ \frac{3}{2^{2/3}} (\ln n)^{2/3} - 1 \right\}$.

Приклад 4. *Розглянемо простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = (\ln(u+1))^\lambda$, $\lambda > 0$. Знайдемо оцінку для $P\{|\xi| > x\}$, $x > 0$ і $\xi \in \mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Оскільки*

$$P\{|\xi| > x\} \leq \frac{\|\xi\|_\psi^u (\ln(u+1))^{\lambda u}}{x^u}, u \geq 1, \quad (1)$$

то покладемо $u+1 = \exp \left\{ \left(\frac{x}{\|\xi\|_\psi} \right)^{1/\lambda} \frac{1}{z} \right\}$, $z > 0$. Тоді, підставляючи цей вираз в нерівність (1), отримаємо

$$\begin{aligned} \left(\frac{\|\xi\|_\psi (\ln(u+1))^\lambda}{x} \right)^u &= \frac{1}{z^{\lambda u}} = \exp \{-\lambda u \ln z\} = \\ &= \exp \left\{ -\lambda (\ln z) \left(\exp \left\{ \left(\frac{x}{\|\xi\|_\psi} \right)^{1/\lambda} \frac{1}{z} \right\} - 1 \right) \right\} = \\ &= z^\lambda \exp \left\{ -\lambda (\ln z) \exp \left\{ \left(\frac{x}{\|\xi\|_\psi} \right)^{1/\lambda} \frac{1}{z} \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Далі покладемо в останній нерівності $z = e$, то

$$P\{|\xi| > x\} \leq e^\lambda \exp \left\{ -\lambda \exp \left\{ \left(\frac{x}{\|\xi\|_\psi} \right)^{1/\lambda} \frac{1}{e} \right\} \right\}.$$

Знайдемо мажоруючу характеристику цього простору. Оскільки

$$\varkappa(n) = \sup_{u \geq 1} \inf_{v > 0} n^{\frac{1}{u+v}} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)} \leq \inf_{v > 0} z(v) n^{\frac{1}{v+1}},$$

де $z(v) = \sup_{u \geq 1} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)}$, а $\left(\frac{\ln(u+v+1)}{\ln(u+1)} \right)' \leq 0$, то $z(v) = \left(\frac{\ln(v+2)}{\ln 2} \right)^\lambda$, тоді $\varkappa(n) = \inf_{v > 0} \left(\frac{\ln(v+2)}{\ln 2} \right)^\lambda n^{\frac{1}{v+1}}$. Коли $n = 1$, то $\varkappa(n) = 1$, а при $n > 1$ покладемо $v = \ln n$, тоді

$$\varkappa(n) = \left(\frac{\ln(\ln n + 2)}{\ln 2} \right)^\lambda n^{\frac{1}{\ln n + 1}} \leq \left(\frac{\ln(\ln n + 2)}{\ln 2} \right)^\lambda e.$$

2. Оцінки розподілів супремумів приростів випадкових процесів з $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Нехай $X = \{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ – випадковий процес, $\mathbf{T} = (\mathbf{T}, \rho)$ – компактний метричний простір, ρ – метрика. Розглянемо $N(u)$ – метрична масивність (число замкнених куль радіуса u , що покривають множину \mathbf{T}) простору (\mathbf{T}, ρ) і $b = \sup_{t, s \in \mathbf{T}} \rho(t, s)$, $\beta = \sigma \left(\inf_{s \in \mathbf{T}} \sup_{t \in \mathbf{T}} \rho(t, s) \right)$, покладемо $\varepsilon_k = \sigma^{(-1)}(bp^k)$, де $k = 0, 1, 2, \dots$, а $p \in (0, 1)$. $\mathbf{V}_{\varepsilon_k}$ – множина центрів замкнених куль радіуса не більше ε_k , що покривають (\mathbf{T}, ρ) причому число цих куль мінімальне (мінімальна ε_k сітка) і $N(\varepsilon_k)$ – число точок $\mathbf{V}_{\varepsilon_k}$. Позначимо $\mathbf{V} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathbf{V}_{\varepsilon_k}$.

Означення 3. Випадковий процес $X \in \mathbf{F}_\psi(\Omega)$, якщо для всіх t випадкова величина $X(t) \in \mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Означення 4. [3] Відображенням $\alpha_k(t)$, де $t \in \mathbf{V}$ називається таке відображення $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}_{\varepsilon_k}$, що $\alpha_k(t) \in \mathbf{V}_{\varepsilon_k}$ та $\rho(t, \alpha_k(t)) \leq \varepsilon_k$ (якщо $t \in \mathbf{V}_{\varepsilon_k}$, то $\alpha_k(t) = t$).

Теорема 3. Нехай $X(t)$ – сепарабельний випадковий процес на (\mathbf{T}, ρ) з простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і виконується умова

$$\sup_{\rho(t,s) \leq h} \|X(t) - X(s)\|_\psi \leq \sigma(h), \quad (2)$$

де $\sigma(h)$ неперервна монотонно зростаюча функція, така що $\sigma(0) = 0$. Виконується умова

$$\int_0^\alpha \varkappa(N(\sigma^{(-1)}(u))) du < \infty, \quad (3)$$

де $\varkappa(n)$ – мажоруюча характеристика, а $\sigma^{(-1)}(u)$ – обернена функції до $\sigma(u)$; $0 < \varepsilon \leq \alpha$ – деяке число, а k – таке ціле число, що $\varepsilon_k < \varepsilon \leq \varepsilon_{k-1}$. Тоді

справджується нерівність

$$\left\| \sup_{\rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| \right\|_{\psi} \leq \varkappa(D_k(\varepsilon, p)) \sigma(\varepsilon) \frac{3-p}{1-p} + 2 \frac{1}{p(1-p)} \int_0^{\sigma(\varepsilon)p} \varkappa(N(\sigma^{(-1)}(u))) du = S_k(\varepsilon, p),$$

де $D_k(\varepsilon, p)$ – число точок u, v з V_{ε_k} , таких що $\|X(u) - X(v)\| \leq \sigma(\varepsilon) \frac{3-p}{1-p}$ та при будь-якому $\delta > 0$ справджується нерівність

$$P \left\{ \sup_{\rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| > \delta \right\} \leq \inf_{u \geq 1} \frac{(S_k(\varepsilon, p))^u (\psi(u))^u}{\delta^u}. \tag{4}$$

Доведення. Зауважимо, що справджуються нерівності

$$\sigma(\varepsilon_k) < \sigma(\varepsilon) \leq \sigma(\varepsilon_{k-1}), \quad bp^k < \sigma(\varepsilon) \leq bp^{k-1}.$$

Позначимо $V_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} V_{\varepsilon_j}$. Оскільки за умови (2) процес неперервний за ймовірністю (див. доведення теореми 4.1 з [3]), то V_k – сепаранта, тому

$$\sup_{\substack{\rho(t,s) \leq \varepsilon \\ t,s \in \mathbf{T}}} |X(t) - X(s)| = \sup_{\substack{\rho(t,s) \leq \varepsilon \\ t,s \in V_k}} |X(t) - X(s)|.$$

Нехай тепер t та s такі точки, що $t, s \in V_k$ та $\rho(t, s) \leq \varepsilon$. Оскільки t та s належать V_k то існують такі $m \geq k$ та $r \geq k$, що $t \in V_{\varepsilon_m}$, а $s \in V_{\varepsilon_r}$. Позначимо $t_m = t$, $t_{m-1} = \alpha_{m-1}(t_m)$, $t_{m-2} = \alpha_{m-2}(t_{m-1})$, ..., $t_k = \alpha_k(t_{k+1})$ і $s_r = s$, $s_{r-1} = \alpha_{r-1}(s_r)$, $s_{r-2} = \alpha_{r-2}(s_{r-1})$, ..., $s_k = \alpha_k(s_{k+1})$. Очевидно, що виконується рівність

$$X(t) - X(s) = \sum_{l=k}^{m-1} (X(t_{l+1}) - X(t_l)) + (X(t_k) - X(s_k)) - \sum_{l=k}^{r-1} (X(s_{l+1}) - X(s_l)). \tag{5}$$

З (5) випливає нерівність

$$|X(t_k) - X(s_k)| \leq |X(t) - X(s)| + \sum_{l=k}^{m-1} |X(t_{l+1}) - X(t_l)| + \sum_{l=k}^{r-1} |X(s_{l+1}) - X(s_l)|.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \|X(t_k) - X(s_k)\|_{\psi} &\leq \|X(t) - X(s)\|_{\psi} + \sum_{l=k}^{m-1} \|X(t_{l+1}) - X(t_l)\|_{\psi} + \\ &\sum_{l=k}^{r-1} \|X(s_{l+1}) - X(s_l)\|_{\psi} \leq \sigma(\varepsilon) + \sum_{l=k}^{m-1} \sigma(\varepsilon_l) + \sum_{l=k}^{r-1} \sigma(\varepsilon_l) \leq \sigma(\varepsilon) + 2 \sum_{l=k}^{\infty} \sigma(\varepsilon_l) = \\ &\sigma(\varepsilon) + 2 \sum_{l=k}^{\infty} bp^l = \sigma(\varepsilon) + 2b \frac{p^k}{1-p} \leq \sigma(\varepsilon) + 2\sigma(\varepsilon) \frac{1}{1-p} = \sigma(\varepsilon) \frac{3-p}{1-p}. \end{aligned} \tag{6}$$

Із (5) тепер отримуємо нерівність

$$\begin{aligned}
 |X(t) - X(s)| &\leq \sum_{l=k}^{m-1} |X(t_{l+1}) - X(t_l)| + \sum_{l=k}^{r-1} |X(s_{l+1}) - X(s_l)| + \\
 |X(t_k) - X(s_k)| &\leq \sum_{l=k}^{m-1} \max_{u \in \mathbf{V}_{\varepsilon_{l+1}}} |X(u) - X(\alpha_l(u))| + \sum_{l=k}^{r-1} \max_{u \in \mathbf{V}_{\varepsilon_{l+1}}} |X(u) - X(\alpha_l(u))| + \\
 &\quad \max_{\substack{u, v \in \mathbf{V}_{\varepsilon_k} \\ \|X(u) - X(v)\| \leq \sigma(\varepsilon)^{\frac{3-p}{1-p}}} } |X(u) - X(v)| \leq \max_{\substack{u, v \in \mathbf{V}_{\varepsilon_k} \\ \|X(u) - X(v)\| \leq \sigma(\varepsilon)^{\frac{3-p}{1-p}}} } |X(u) - X(v)| + \\
 &\quad 2 \sum_{l=k}^{\infty} \max_{u \in \mathbf{V}_{\varepsilon_{l+1}}} |X(u) - X(\alpha_l(u))|. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Оскільки останній вираз в нерівності (7) не залежить від $t, s \in \mathbf{V}_k$, таких що $\rho(t, s) \leq \varepsilon$, то враховуючи сепарабельність процесу X з ймовірністю одиниця маємо нерівність

$$\begin{aligned}
 \sup_{\substack{\rho(t, s) \leq \varepsilon \\ t, s \in \mathbf{T}}} |X(t) - X(s)| &= \sup_{\substack{\rho(t, s) \leq \varepsilon \\ t, s \in \mathbf{V}_k}} |X(t) - X(s)| \leq \\
 &\quad \max_{\substack{u, v \in \mathbf{V}_{\varepsilon_k} \\ \|X(u) - X(v)\| \leq \sigma(\varepsilon)^{\frac{3-p}{1-p}}} } |X(u) - X(v)| + 2 \sum_{l=k}^{\infty} \max_{u \in \mathbf{V}_{\varepsilon_{l+1}}} |X(u) - X(\alpha_l(u))| \leq N^2(\varepsilon_k). \quad (8)
 \end{aligned}$$

Тоді з (8) та означення $\varkappa(n)$ отримаємо нерівність

$$\begin{aligned}
 \left\| \sup_{\rho(t, s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| \right\|_{\psi} &\leq \left\| \max_{\substack{u, v \in \mathbf{V}_{\varepsilon_k} \\ \|X(u) - X(v)\| \leq \sigma(\varepsilon)^{\frac{3-p}{1-p}}} } |X(u) - X(v)| \right\|_{\psi} + \\
 2 \sum_{l=k}^{\infty} \left\| \max_{u \in \mathbf{V}_{\varepsilon_{l+1}}} |X(u) - X(\alpha_l(u))| \right\|_{\psi} &\leq \varkappa(D_k(\varepsilon, p)) \sigma(\varepsilon)^{\frac{3-p}{1-p}} + 2 \sum_{l=k}^{\infty} \varkappa(N(\varepsilon_{l+1})) \sigma(\varepsilon_l).
 \end{aligned}$$

Розглянемо другий доданок в правій частині останньої нерівності

$$\sum_{l=k}^{\infty} \varkappa(N(\varepsilon_{l+1})) \sigma(\varepsilon_l) = \sum_{l=k}^{\infty} \varkappa(N(\sigma^{(-1)}(bp^{l+1}))) bp^l,$$

то

$$\int_{bp^{l+2}}^{bp^{l+1}} \varkappa(N(\sigma^{(-1)}(u))) du \geq \varkappa(N(\sigma^{(-1)}(bp^{l+1}))) (bp^{l+1} - bp^{l+2}),$$

$$bp^l \varkappa(N(\sigma^{(-1)}(bp^{l+1}))) \leq \frac{1}{p(1-p)} \int_{bp^{l+2}}^{bp^{l+1}} \varkappa(N(\sigma^{(-1)}(u))) du.$$

Тоді

$$\sum_{l=k}^{\infty} \varkappa(N(\varepsilon_{l+1})) \sigma(\varepsilon_l) \leq \frac{1}{p(1-p)} \int_0^{bp^{k+1}} \varkappa(N(\sigma^{(-1)}(u))) du \leq \frac{1}{p(1-p)} \int_0^{p\sigma(\varepsilon)} \varkappa(N(\sigma^{(-1)}(u))) du.$$

Теорему доведено.

Зауваження 1. *Всі результати, які мають місце для метричного простору справедливі і в псевдометричному просторі.*

Наслідок 1. *Нехай виконуються умови теореми 3 і крім того справеджується умова $\sigma(\varepsilon)\varkappa(D_k(\varepsilon, p)) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тоді*

$$\left\| \sup_{\rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| \right\|_{\psi} \rightarrow 0 \tag{9}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Крім того, випадковий процес $X(t)$ рівномірно неперервний на (T, ρ) з ймовірністю одиниця.

Доведення. Оскільки за умов наслідку при $\varepsilon \rightarrow 0 S_k(\varepsilon, p) \rightarrow 0$, то твердження (9) очевидне. З нерівності (4) випливає, що для будь-якого $u > 1$ справедливо

$$P \left\{ \sup_{\rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| > \delta \right\} \leq \frac{(S_k(\varepsilon, p))^u (\psi(u))^u}{\delta^u},$$

то при $\varepsilon \rightarrow 0 \sup_{\rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| \rightarrow 0$. Отже існує послідовність $\check{\varepsilon}_n$, така що $\check{\varepsilon}_{n+1} < \check{\varepsilon}_n$, $\check{\varepsilon}_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, що $\sup_{\rho(t,s) \leq \check{\varepsilon}_n} |X(t) - X(s)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ з ймовірністю одиниця. Оскільки $\sup_{\rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)|$ монотонно спадає по ε , то і $\sup_{\rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ з ймовірністю одиниця.

Теорема 4. *Нехай $X(t)$ – сепарабельний випадковий процес на (T, ρ) з простору $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$, де $\psi(u)$ – така вагова функція, що для мажоруючої характеристики простору $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$ виконується умова*

$$\varkappa(n^2) \leq C\varkappa(n), \tag{10}$$

де $C > 0$ – деяка константа.

Якщо виконується умова (3), тоді має місце нерівність

$$\left\| \sup_{\rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| \right\|_{\psi} \leq A(C) \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \varkappa(N(\sigma^{(-1)}(u))) du = \check{S}_k(\varepsilon), \tag{11}$$

де $A(C) = \frac{4(3C^2-12C+4)}{3C+2} \cdot \left(\frac{C+2}{C-2}\right)^2$.

І при будь-якому $\delta > 0$ справджується нерівність

$$P \left\{ \sup_{\rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| > \delta \right\} \leq \inf_{u \geq 1} \frac{(\check{S}_k(\varepsilon))^u (\psi(u))^u}{\delta^u}. \quad (12)$$

Доведення. Теорема 4 випливає з теореми 3. Дійсно, $D_k(\varepsilon, p) \leq (N(\varepsilon_k))^2 \leq (N(\sigma^{(-1)}(bp^k)))^2$, тому

$$\sigma(\varepsilon) \varkappa(D_k(\varepsilon, p)) \leq \varkappa(N^2(\sigma^{(-1)}(bp^k))) \sigma(\varepsilon).$$

Оскільки виконується нерівність (10) то

$$\varkappa(N^2(\sigma^{(-1)}(bp^k))) \sigma(\varepsilon) \leq C \varkappa(N(\sigma^{(-1)}(bp^k))) \sigma(\varepsilon). \quad (13)$$

Легко бачити, що

$$\int_{bp^{k+1}}^{bp^k} \varkappa(N(\sigma^{(-1)}(u))) du \geq \varkappa(N(\sigma^{(-1)}(bp^k))) bp^k(1-p),$$

тому

$$\begin{aligned} \varkappa(N(\sigma^{(-1)}(bp^k))) &\leq \frac{1}{bp^{k-1}p(1-p)} \int_{bp^{k+1}}^{bp^k} \varkappa(N(\sigma^{(-1)}(u))) du \leq \\ &\frac{1}{\sigma(\varepsilon)p(1-p)} \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \varkappa(N(\sigma^{(-1)}(u))) du. \end{aligned}$$

Отже, з (13) випливає

$$\begin{aligned} \varkappa(D_k(\varepsilon, p)) \sigma(\varepsilon) \frac{3-p}{1-p} + \frac{2}{p(1-p)} \int_0^{\sigma(\varepsilon)p} \varkappa(N(\sigma^{(-1)}(u))) du &\leq \\ \varkappa(N^2(\sigma^{(-1)}(bp^k))) \sigma(\varepsilon) \frac{3-p}{1-p} + \frac{2}{p(1-p)} \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \varkappa(N(\sigma^{(-1)}(u))) du &\leq \\ C \varkappa(N(\sigma^{(-1)}(bp^k))) \sigma(\varepsilon) \frac{3-p}{1-p} + \frac{2}{p(1-p)} \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \varkappa(N(\sigma^{(-1)}(u))) du &\leq \\ \frac{1}{p(1-p)} \left(C \cdot \frac{3-p}{1-p} + 2 \right) \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \varkappa(N(\sigma^{(-1)}(u))) du. \end{aligned}$$

Мінімум виразу $\frac{1}{p(1-p)} \left(C \cdot \frac{3-p}{1-p} + 2 \right)$ набувається в точці $p = \frac{3C+2}{2C+4}$. Підставляючи це значення в останню нерівність, отримуємо потрібне.

Теорему доведено.

Зауваження 2. Умови теореми виконуються для функцій $\psi(u) = u^\alpha$, $\psi(u) = (\ln(u+1))^\lambda$. Якщо $\psi(u) = u^\alpha$, то $\varkappa(n^2) = 2^\alpha \varkappa(n)$ тобто $C = 2^\alpha$, а коли $\psi(u) = (\ln(u+1))^\lambda$, то $\varkappa(n^2) = \left(\frac{\ln(2(\ln n+1))}{\ln 2}\right)^\lambda e \leq 2^\lambda \varkappa(n)$ тобто $C = 2^\lambda$.

Зауваження 3. Нехай $W(h)$, $h > 0$ неперервна монотонно спадна функція, що $N(h) \leq W(h)$. Тоді умова (3) виконується коли

$$\int_0^z \varkappa(W(\sigma^{(-1)}(u))) du < \infty \quad (14)$$

Наслідок 2. Нехай в теоремі 4

$$\sigma(h) = \frac{R}{(\varkappa(W(h)))^{1/\gamma}},$$

де γ – деяке число, таке що $0 < \gamma < 1$. Тоді

$$\left\| \sup_{\rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| \right\|_\psi \leq A(C) \frac{R}{1-\gamma} (\varkappa(W(\varepsilon)))^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = Q(\varepsilon, \gamma)$$

та для будь-якого $\delta > 0$ має місце нерівність

$$P \left\{ \sup_{\rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| > \delta \right\} \leq \inf_{u \geq 1} \frac{(Q(\varepsilon, \gamma))^u (\psi(u))^u}{\delta^u}. \quad (15)$$

Доведення. Дійсно, в цьому випадку $\sigma^{(-1)}(u) = W^{(-1)}(\varkappa^{(-1)}(\frac{R^\gamma}{u^\gamma}))$. Тоді

$$\int_0^{\sigma(\varepsilon)} \varkappa(W(\sigma^{(-1)}(u))) du = \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \frac{R^\gamma}{u^\gamma} du = \frac{R^\gamma}{1-\gamma} \sigma(\varepsilon)^{1-\gamma} < \infty. \quad (16)$$

Приклад 5. Якщо вагова функція $\psi(u) = u^\alpha$, де $\alpha > 0$, то

$$P \{|\xi| > \delta\} \leq \exp \left\{ -\frac{\alpha}{e} \left(\frac{\delta}{Q(\varepsilon, \gamma)} \right)^{1/\alpha} \right\}$$

і використовуючи значення мажоруючої характеристики з прикладу 1 отримаємо

$$\sigma(h) = R \left(\frac{e}{\alpha} \ln W(h) \right)^{-\alpha/\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

Приклад 6. Якщо $\psi(u) = e^{au}$, де $a \neq 0$, то при $\delta > Q(\varepsilon, \gamma)$

$$P \{|\xi| > \delta\} \leq \exp \left\{ -\frac{\left(\ln \frac{\delta}{Q(\varepsilon, \gamma)} \right)^2}{2a} \right\}$$

і використовуючи значення мажоруючої характеристики з прикладу 2 отримаємо

$$\sigma(h) = R \cdot \exp \left\{ -\frac{2}{\gamma} \sqrt{a \ln W(h)} + \frac{a}{\gamma} \right\}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

Приклад 7. Якщо $\psi(u) = e^{u^2}$, то при $\delta > Q(\varepsilon, \gamma)$

$$P\{|\xi| > \delta\} \leq \exp\left\{-\frac{2\left(\ln\frac{\delta}{Q(\varepsilon, \gamma)}\right)^{3/2}}{3^{3/2}}\right\}$$

і використовуючи значення мажоруючої характеристики з прикладу 3 отримуємо

$$\sigma(h) = R \cdot \exp\left\{-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{3}{2^{2/3}}(\ln W(h))^{2/3} - 1\right)\right\}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

Приклад 8. Якщо $\psi(u) = (\ln(u+1))^\lambda$, де $\lambda > 0$, то

$$P\{|\xi| > \delta\} \leq z^\lambda \exp\left\{-\lambda(\ln z) \exp\left\{\left(\frac{\delta}{Q(\varepsilon, \gamma)}\right)^{1/\lambda} \frac{1}{z}\right\}\right\}$$

і використовуючи значення мажоруючої характеристики з прикладу 4 отримуємо

$$\sigma(h) = Re^{-1/\gamma} \left(\frac{\ln 2}{\ln(\ln W(h) + 2)}\right)^{\lambda/\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

3. Випадкові процеси визначені на $[0, T]$.

Теорема 5. Нехай $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$, де $T > 0$ – сепарабельний процес з простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Нехай виконується умова

$$\sup_{|t-s| \leq h} \|X(t) - X(s)\|_\psi \leq \sigma(h),$$

де $\sigma = \{\sigma(h), h > 0\}$ – неперервна монотонно зростаюча функція, така що $\sigma(0) = 0$. Для будь-якого $\alpha > 0$ виконується умова

$$\int_0^z \varkappa\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right) du < \infty,$$

тоді справджується нерівність

$$\left\| \sup_{t \in [0, T]} |X(t) - X(s)| \right\|_\psi \leq A(C) \frac{R}{1-\gamma} \left(\varkappa\left(\frac{T}{2\varepsilon} + 1\right)\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \tilde{Q}(\varepsilon, \gamma).$$

Крім того? для будь-якого $\delta > 0$ має місце нерівність

$$P\left\{\sup_{t \in [0, T]} |X(t) - X(s)| > \delta\right\} \leq \inf_{u \geq 1} \frac{\left(\tilde{Q}(\varepsilon, \gamma)\right)^u (\psi(u))^u}{\delta^u}. \quad (17)$$

Доведення. Теорема 5 впливає з наслідку 2, оскільки метрична масивність інтервалу $[0, T]$ оцінюється так

$$N(u) \leq \frac{T}{2u} + 1 = W(u).$$

Приклад 9. Якщо функція $\psi(u) = u^\alpha$, де $\alpha > 0$, то

$$P\{|\xi| > \delta\} \leq \exp \left\{ -\frac{\alpha}{e} \left(\frac{\delta}{A(C) \frac{R}{1-\gamma} \left(\frac{e}{\alpha} \ln \left(\frac{T}{2\varepsilon} + 1 \right) \right)^{\frac{\alpha(\gamma-1)}{\gamma}}} \right)^{1/\alpha} \right\}$$

Аналогічно можна розглянути всі інші приклади, які були наведені. В багатьох випадках легко отримати таку оцінку

$$\|X(t) - X(s)\|_\psi \leq g \cdot |t - s|^\tau, \quad (18)$$

де $0 < \tau \leq 1$. Покажемо, як з такої оцінки можна отримати оцінку вигляду

$$\sup_{|t-s| \leq h} \|X(t) - X(s)\|_\psi \leq R \left(\frac{e}{\alpha} \ln \left(\frac{T}{2h} + 1 \right) \right)^{-\alpha/\gamma} \quad (19)$$

Нехай $0 < j < 1$ і $u > 0$, то $j \ln \left(1 + \frac{1}{u} \right) \leq \ln \left(1 + \frac{1}{u^j} \right) \leq \frac{1}{u^j}$, тобто $u^j \leq \frac{1}{j \ln \left(1 + \frac{1}{u} \right)}$. Тепер, якщо будь-яке $r > 0$, то $u^{rj} \leq \frac{1}{j^r \left(\ln \left(1 + \frac{1}{u} \right) \right)^r}$. І якщо взяти r , таке що $rj = \tau$, то маємо $u^\tau \leq \frac{1}{\left(\frac{\tau}{r} \right)^r \left(\ln \left(1 + \frac{1}{u} \right) \right)^r}$. Перепишемо нерівність (18) так

$$\|X(t) - X(s)\|_\psi \leq g \left| \frac{2h}{T} \right|^\tau \cdot \frac{T^\tau}{2^\tau} \leq g \frac{T^\tau}{2^\tau} \frac{1}{\left(\frac{\tau}{r} \right)^r \left(\ln \left(1 + \frac{T}{2h} \right) \right)^r}. \quad (20)$$

Якщо в останній нерівності покладемо, що $r = -\frac{\alpha}{\gamma}$, то має місце нерівність (19), де $R = g \frac{T^\tau}{2^\tau} \left(\frac{e}{\tau\gamma} \right)^{\alpha/\gamma}$.

Мінімум у правій частині нерівності (20) набувається в точці

$$r = \tau \ln \left(1 + \frac{T}{2h} \right) e^{-\tau \ln \left(1 + \frac{T}{2h} \right)},$$

тоді отримаємо

$$\|X(t) - X(s)\|_\psi \leq g \frac{T^\tau}{2^\tau} \exp \left\{ -\tau^2 \ln^2 \left(1 + \frac{T}{2h} \right) e^{-\tau \ln \left(1 + \frac{T}{2h} \right)} \right\}$$

Висновки. В роботі знайдено оцінки розподілів супремумів приростів випадкових процесів з просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ та умови їх вибіркової неперервності з ймовірністю одиниця. Ці оцінки, зокрема, можуть застосовуватись до точності апроксимації цих процесів різними класами функцій.

1. Ермаков С. В., Островский Е. И. Условия непрерывности, экспоненциальные оценки и центральная предельная теорема для случайных полей // Деп. в ВИНТИ. – 1986. – 42, №3752-В.86.0.
2. О. І. Василюк, Ю. В. Козаченко, Р. Є. Ямненко φ -Субгауссові випадкові процеси: монографія, – К.: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2008.– 231 с.
3. Козаченко Ю. В., Млавець Ю. Ю. Простори Банаха випадкових величин $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ // Теорія ймовір. та матем. статист. – 2012. – 86.

Одержано 12.04.2012