

УДК 517.518.84

М. М. Пагіря (Мукачів. держ. ун-т)

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМИ ФУНКЦІОНАЛЬНИМИ ЛАНЦЮГОВИМИ ДРОБАМИ

The problem of functions interpolation of one real variable by a functional interpolation continued fraction is discussed in this paper. The estimates of remainder term are established. Numerical examples are considered .

В роботі розглянута задача інтерполяції функцій однієї дійсної змінної функціональним інтерполяційним ланцюговим дробом. Встановлені оцінки залишкових членів. Розглянуті числові приклади.

Вступ. Функцію однієї дійсної змінної, яка задана своїми значеннями в точках компакту $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$, можна наближати інтерполяційними багаточленами у формі Лагранжа або Ньютона [1, 2], сплайнами [1], ланцюговими дробами [3, 4], N -точковими апроксимаціями Паде [5]. Можна також шукати наближення функції у вигляді узагальненого інтерполяційного багаточлена або функціонального ланцюгового дроби. Дана робота присвячена другому із вказаних підходів [6].

1. Постановка задачі інтерполяції. Функціональні ланцюгові дроби. Нехай $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$ — компакт і $f(x) \in C(\mathcal{R})$. Припустимо, що функція $y = f(x)$ задана своїми значеннями в точках множини

$$X = \{x_i : x_i \in \mathcal{R}, x_i \neq x_j, \text{ коли } i \neq j, i, j = 0, 1, \dots, n\}. \quad (1)$$

Нехай допоміжна функція $t = g(x)$ неперервна та строго монотонна на \mathcal{R} . Функцію $g(x)$ будемо називати функцією-базисом. Умова строгої монотонності функції $g(x)$ гарантує, що множина $G = \{t_i : t_i = g(x_i), x_i \in X, i = 0, 1, 2, \dots, n\}$ буде складатися із різних точок, оскільки множина (1) містить всі різні точки.

Якщо розглянути послідовність дробово-лінійних перетворень $\{v_k(x)\}$, де $f(x) = v_0(x)$, $v_k(x) = v_k(x_{k-1}) + \frac{g(x) - g(x_k)}{v_{k+1}(x)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то можна отримати ([6]) функціональний інтерполяційний ланцюговий дріб типу Тіле (Т-ФІЛД)

$$D_n(g; x) = \frac{P_n^{(g)}(g; x)}{Q_n^{(g)}(g; x)} = b_0^{(g)} + \prod_{k=1}^n \frac{g(x) - g(x_{k-1})}{b_k^{(g)}}, \quad (2)$$

де $b_k^{(g)}$, $k = 0, 1, \dots, n$, — невідомі коефіцієнти. Має місце наступне твердження.

Теорема 1 ([6]). *Коефіцієнти Т-ФІЛД (2) визначаються через значення функції $y = f(x)$ у вузлах інтерполяції x_0, x_1, \dots, x_n за допомогою рекурентного співвідношення у вигляді ланцюгового дроби*

$$b_0^{(g)} = f_0, \quad b_m^{(g)} = \frac{g(x_m) - g(x_{m-1})}{-b_{m-1}^{(g)}} + \dots + \frac{g(x_m) - g(x_1)}{-b_1^{(g)}} + \frac{g(x_m) - g(x_0)}{f_m - b_0^{(g)}},$$

де $m = 1, 2, 3, \dots, n$.

2. Оцінка залишкового члена Т-ФІЛД

Теорема 2. Якщо частинні чисельники $a_i = g(x) - g(x_{i-1})$ і знаменники $b_i^{(g)}$ Т-ФІЛД (2) задовольняють умови: $0 < |g(x) - g(x_{i-1})| \leq \alpha$, $\alpha + 1 \leq |b_i^{(g)}|$, при $i = 1, 2, \dots, n$, то знаменник $Q_n(g; x)$ цього ланцюгового дроби буде задовольняти нерівність

$$|Q_n(g; x)| \geq \begin{cases} \frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1}, & \text{при } \alpha \neq 1, \\ n + 1, & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

Доведення. Із умови теореми випливає, що $|Q_1(g; x)| = |b_1^{(g)}| \geq \alpha + 1$. Далі

$$\begin{aligned} |Q_2(g; x)| &= |b_2^{(g)}b_1^{(g)} + g(x) - g(x_1)| \geq |Q_1(g; x)||b_2^{(g)}| - |g(x) - g(x_1)| \geq \\ &\geq |Q_1(g; x)|(1 + \alpha) - \alpha = |Q_1(g; x)| + \alpha(|Q_1(g; x)| - 1) \geq |Q_1(g; x)| + \alpha^2. \end{aligned}$$

Тоді $|Q_2(g; x)| - |Q_1(g; x)| \geq \alpha^2$. З формул Валліса [3, формули (2.1.6)] та умов теореми випливає, що $|Q_s(g; x)| \geq |Q_{s-1}(g; x)| + \alpha(|Q_{s-1}(g; x)| - |Q_{s-2}(g; x)|)$. Застосувавши метод повної математичної індукції легко отримати нерівність $|Q_s(g; x)| - |Q_{s-1}(g; x)| \geq \alpha^s$. Тоді

$$|Q_n| = \sum_{i=2}^n (|Q_i| - |Q_{i-1}|) + |Q_1| \geq \sum_{i=0}^n \alpha^i = \begin{cases} \frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1}, & \alpha \neq 1, \\ n + 1, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Теорема 3. 1) Нехай функція $y = f(x)$ визначена на компактi $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$ і задана своїми значеннями в точках множини (1). 2) Нехай за значеннями функції $f(x)$ в точках множини (1) побудований Т-ФІЛД (2), коефіцієнти якого задовольняють умову типу Слешинського-Прінґсгейма:

$$|b_k^{(g)}| \geq \alpha + 1, \quad \text{де } \alpha = \max_{t,s \in \mathcal{R}} |g(t) - g(s)| \neq 1. \tag{3}$$

3) Нехай знайдеться точка x_* , де $x_* \in \mathcal{R}$ і $x_* \notin X$, що

$$|b_{n+1}^{(g)}(x_*)| \geq \alpha + 1, \tag{4}$$

$$\text{де } b_{n+1}^{(g)}(x_*) = \frac{g(x_*) - g(x_n)}{-b_n^{(g)}} + \dots + \frac{g(x_*) - g(x_1)}{-b_1^{(g)}} + \frac{g(x_*) - g(x_0)}{y_* - b_0^{(g)}}, \tag{5}$$

$y_* = f(x_*)$. Тоді в точці x_* виконується нерівність

$$|f(x_*) - D_n(g; x_*)| \leq \frac{(\alpha - 1)^2 \prod_{i=0}^n |g(x_*) - g(x_i)|}{(\alpha^{n+2} - 1)(\alpha^{n+1} - 1)}. \tag{6}$$

Доведення. За умовою теореми точка $x_* \notin X$. Оскільки $x_* \in \mathcal{R}$, то за значеннями функції у вузлах x_0, \dots, x_n, x_{n+1} , де $x_{n+1} = x_*, y_{n+1} = y_* = f(x_*)$, можна побудувати інтерполяційний ланцюговий дріб

$$D_{n+1}(g; x) = \frac{P_{n+1}(g; x)}{Q_{n+1}(g; x)} = b_0^{(g)} + \prod_{k=1}^{n+1} \frac{g(x) - g(x_{k-1})}{b_k^{(g)}},$$

де $b_{n+1}^{(g)}(x_*)$ визначено в (5), а коефіцієнти $b_i^{(g)}$, $i = 0, 1, \dots, n$, збігаються із коефіцієнтами Т-ФІЛД (2). Із детермінантної формули [3, формула (2.1.9)] випливає, що різниця між $n + 1$ -м та n -м підхідними дробами запишеться у вигляді

$$D_{n+1}(g; x) - D_n(g; x) = (-1)^n \frac{\prod_{i=0}^n (g(x) - g(x_i))}{Q_{n+1}(g; x) Q_n(g; x)}.$$

Оцінимо цю різницю за абсолютним значенням у точці x_*

$$|f(x_*) - D_n(g; x_*)| = |D_{n+1}(g; x_*) - D_n(g; x_*)| = \frac{\prod_{i=0}^n |g(x_*) - g(x_i)|}{|Q_{n+1}(g; x_*)| \cdot |Q_n(g; x_*)|}.$$

Із теореми 2 випливає, що $\frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1} \leq |Q_n(g; x_*)|$, $\frac{\alpha^{n+2} - 1}{\alpha - 1} \leq |Q_{n+1}(g; x_*)|$. Звідки кінцеве отримуємо (6). Теорема доведена.

Таблиця 1.

Функція: $y = \sqrt[4]{x}$. Вузли Чебишова.

n	Δ_t	Δ_g	Λ	К-ть
6	$0,54289100 \cdot 10^{-06}$	$0,68880672 \cdot 10^{-08}$	$0,68814359 \cdot 10^{-05}$	10.000.000
7	$0,62146255 \cdot 10^{-07}$	$0,38002537 \cdot 10^{-09}$	$0,15508439 \cdot 10^{-05}$	10.000.000
8	$0,65376420 \cdot 10^{-08}$	$0,20966576 \cdot 10^{-10}$	$0,35875440 \cdot 10^{-06}$	10.000.000
9	$0,74030568 \cdot 10^{-09}$	$0,11567570 \cdot 10^{-11}$	$0,84703611 \cdot 10^{-07}$	10.000.000
10	$0,78369735 \cdot 10^{-10}$	$0,63819950 \cdot 10^{-13}$	$0,20328353 \cdot 10^{-07}$	10.000.000
11	$0,88134529 \cdot 10^{-11}$	$0,35210363 \cdot 10^{-14}$	$0,49439202 \cdot 10^{-08}$	10.000.000
12	$0,93715633 \cdot 10^{-12}$	$0,19426039 \cdot 10^{-15}$	$0,12156137 \cdot 10^{-08}$	10.000.000
13	$0,10489178 \cdot 10^{-12}$	$0,10717605 \cdot 10^{-16}$	$0,30163579 \cdot 10^{-09}$	10.000.000
14	$0,11190206 \cdot 10^{-13}$	$0,59130411 \cdot 10^{-18}$	$0,75423094 \cdot 10^{-10}$	10.000.000
15	$0,12481094 \cdot 10^{-14}$	$0,32622992 \cdot 10^{-19}$	$0,18982475 \cdot 10^{-10}$	10.000.000
16	$0,13349084 \cdot 10^{-15}$	$0,17998503 \cdot 10^{-20}$	$0,48041245 \cdot 10^{-11}$	10.000.000
17	$0,14849398 \cdot 10^{-16}$	$0,99299873 \cdot 10^{-22}$	$0,12216500 \cdot 10^{-11}$	10.000.000
18	$0,15914108 \cdot 10^{-17}$	$0,54784879 \cdot 10^{-23}$	$0,31193615 \cdot 10^{-12}$	9.999.997
19	$0,17665541 \cdot 10^{-18}$	$0,30225431 \cdot 10^{-24}$	$0,79934045 \cdot 10^{-13}$	9.999.900
20	$0,18963174 \cdot 10^{-19}$	$0,16675495 \cdot 10^{-25}$	$0,20546730 \cdot 10^{-13}$	9.995.916

3. Приклади інтерполяції Т-ФІЛД. Розглянемо декілька прикладів інтерполяції функцій однієї дійсної змінної Т-ФІЛД (2). На цих прикладах також проілюструємо теорему 3. Нехай на проміжку $[1, 0; 1, 5]$ інтерполюється функція $y = \sqrt[4]{x}$. В якості функції-базису вибрано $g(x) = \sqrt{x}$. Обчислення проводилися на множині тестових точок

$$X_* = \{x_j^* : x_j^* \in \mathcal{R}, j = 1, 2, \dots, 10.000.000\}, \quad (7)$$

де точки x_j^* вибираються за допомогою генератора псевдовипадкових чисел.

Таблиця 2.

Функція: $y = \sqrt[4]{x}$. Рівномірне розбиття.

n	Δ_t	Δ_g	Λ	К-ть
6	$0,90829149 \cdot 10^{-05}$	$0,11505169 \cdot 10^{-06}$	$0,12498285 \cdot 10^{-03}$	10.000.000
7	$0,15944004 \cdot 10^{-05}$	$0,97324355 \cdot 10^{-08}$	$0,43554951 \cdot 10^{-04}$	10.000.000
8	$0,25593293 \cdot 10^{-06}$	$0,81854031 \cdot 10^{-09}$	$0,15488528 \cdot 10^{-04}$	10.000.000
9	$0,43976225 \cdot 10^{-07}$	$0,68519282 \cdot 10^{-10}$	$0,55947411 \cdot 10^{-05}$	10.000.000
10	$0,70412063 \cdot 10^{-08}$	$0,57132877 \cdot 10^{-11}$	$0,20460752 \cdot 10^{-05}$	10.000.000
11	$0,11929369 \cdot 10^{-08}$	$0,47481573 \cdot 10^{-12}$	$0,75575190 \cdot 10^{-06}$	10.000.000
12	$0,19066310 \cdot 10^{-09}$	$0,39349348 \cdot 10^{-13}$	$0,28141712 \cdot 10^{-06}$	10.000.000
13	$0,31980753 \cdot 10^{-10}$	$0,32530368 \cdot 10^{-14}$	$0,10549023 \cdot 10^{-06}$	10.000.000
14	$0,51044694 \cdot 10^{-11}$	$0,26835740 \cdot 10^{-15}$	$0,39762334 \cdot 10^{-07}$	10.000.000
15	$0,84980988 \cdot 10^{-12}$	$0,22096404 \cdot 10^{-16}$	$0,15056853 \cdot 10^{-07}$	10.000.000
16	$0,13549520 \cdot 10^{-12}$	$0,18163716 \cdot 10^{-17}$	$0,57237167 \cdot 10^{-08}$	10.000.000
17	$0,22427032 \cdot 10^{-13}$	$0,14908705 \cdot 10^{-18}$	$0,21829308 \cdot 10^{-08}$	9.999.997
18	$0,35727573 \cdot 10^{-14}$	$0,12220608 \cdot 10^{-19}$	$0,83483604 \cdot 10^{-09}$	9.999.804
19	$0,58862064 \cdot 10^{-15}$	$0,10005192 \cdot 10^{-20}$	$0,32002157 \cdot 10^{-09}$	9.992.002

Визначалися наступні величини

$$\Delta_t = \max_{x^* \in X_*} |f(x^*) - D_n(x^*)|, \quad \text{де} \quad D_n(x) = b_0 + \prod_{k=1}^n \frac{x - x_{k-1}}{b_k}$$

— інтерполяційний ланцюговий дріб Тіле [4,8], який побудований за значеннями функції на множині інтерполяційних вузлів (1),

$$\Delta_g = \max_{x^* \in X_*} |f(x^*) - D_n(g; x^*)|, \quad \Lambda = \frac{(\alpha - 1)^2 \max_{x^* \in X_*} \prod_{i=0}^n |g(x^*) - g(x_i)|}{(\alpha^{n+2} - 1)(\alpha^{n+1} - 1)}.$$

В таблицях 1–2 містяться результати обчислювальних експериментів. В першій колонці наведена кількість інтерполяційних вузлів n за значеннями функції в яких побудований Т-ФІЛД (2), в наступних колонках величини Δ_t , Δ_g , Λ , в останній колонці вказана кількість тестових точок з множини X_* , для яких виконується умова (4) теореми 3. Обчислення проводились за допомогою програми, яка була написана на алгоритмічній мові Fortran-2003 і реалізована в операційній системі Scientific Linux 5.6. В таблиці 1 наведено результати інтерполяції функції для випадку, коли в якості вузлів вибрано корені ортогонального багаточлена Чебишова 1-го роду [1], а у таблиці 2 — містяться результати інтерполяції за внутрішніми точками рівномірного розбиття проміжку.

В таблицях 3–4 містяться результати інтерполяції функції $y = \sqrt{\ln x}$ на проміжку $[1, 7; 2, 4]$, де в якості функції-базису вибрано $g(x) = \ln x$.

Із наведених таблиць можна зробити наступні висновки: а) знайдуться такі функції $y = f(x)$ та базис-функції $t = g(x)$ для яких на певних проміжках можна побудувати Т-ФІЛД, коефіцієнти якого будуть задовольняти умову типу Слешинського-Прінґсгейма (3); б) на вибраному проміжку інтерполяції знайдуться точки, загальна кількість яких вказана в останній колонці кожної таблиці, в яких буде виконуватися умова (4); в) інтерполяція вказаних функцій за

Таблиця 3.

Функція: $y = \sqrt{\ln x}$. Вузли Чебишова.

n	Δ_t	Δ_g	Λ	К-ть
6	$0,18721214 \cdot 10^{-08}$	$0,35021461 \cdot 10^{-09}$	$0,55314970 \cdot 10^{-07}$	10.000.000
7	$0,10849229 \cdot 10^{-09}$	$0,13402103 \cdot 10^{-10}$	$0,51916140 \cdot 10^{-08}$	10.000.000
8	$0,50805771 \cdot 10^{-11}$	$0,51287484 \cdot 10^{-12}$	$0,48742439 \cdot 10^{-09}$	10.000.000
9	$0,28555274 \cdot 10^{-12}$	$0,19626801 \cdot 10^{-13}$	$0,45768003 \cdot 10^{-10}$	10.000.000
10	$0,13028713 \cdot 10^{-13}$	$0,75108201 \cdot 10^{-15}$	$0,42976760 \cdot 10^{-11}$	10.000.000
11	$0,72262226 \cdot 10^{-15}$	$0,28742524 \cdot 10^{-16}$	$0,40356273 \cdot 10^{-12}$	10.000.000
12	$0,34781370 \cdot 10^{-16}$	$0,10999227 \cdot 10^{-17}$	$0,37895722 \cdot 10^{-13}$	10.000.000
13	$0,19031437 \cdot 10^{-17}$	$0,42091959 \cdot 10^{-19}$	$0,35585228 \cdot 10^{-14}$	10.000.000
14	$0,89792991 \cdot 10^{-19}$	$0,16107784 \cdot 10^{-20}$	$0,33415601 \cdot 10^{-15}$	10.000.000
15	$0,48742808 \cdot 10^{-20}$	$0,61641360 \cdot 10^{-22}$	$0,31378240 \cdot 10^{-16}$	10.000.000
16	$0,23800849 \cdot 10^{-21}$	$0,23588934 \cdot 10^{-23}$	$0,29465081 \cdot 10^{-17}$	10.000.000
17	$0,12830616 \cdot 10^{-22}$	$0,90270141 \cdot 10^{-25}$	$0,27668550 \cdot 10^{-18}$	10.000.000
18	$0,61665493 \cdot 10^{-24}$	$0,34544565 \cdot 10^{-26}$	$0,25981540 \cdot 10^{-19}$	9.999.950

допомогою Т-ФІЛД (2) є більш ефективною ніж наближення інтерполяційним ланцюговим дробом Тіле, оскільки максимальна абсолютна похибка Δ_g на множині тестових точок X_* значно менша Δ_t ; г) максимальна оцінка Λ на множині тестових точок X_* добре оцінює максимальну абсолютну похибку Δ_g .

4. Функціональний інтерполяційний ланцюговий дріб типу С-дробу.

Розглянемо послідовність дробово-лінійних перетворень виду

$$f(x) = v_0(x), \quad v_0(x) = v_0(x_0) + v_1(x)(g(x) - g(x_0)),$$

$$v_k(x) = \frac{v_k(x_k)}{1 + v_{k+1}(x)(g(x) - g(x_k))}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Якщо послідовно вкласти елементи послідовності $\{v_k(x)\}$ один в другий $n + 1$ раз, підставити $v_{n+1}(x)(g(x) - g(x_n)) = 0$ та позначити через $a_k^{(g)} = v_k(x_k)$, для $k = 0, 1, \dots, n$, то отримаємо функціональний ланцюговий дріб (ФЛД) виду

$$F_n(g; x) = \frac{P_n(g; x)}{Q_n(g; x)} = a_0^{(g)} + \prod_{k=1}^n \frac{a_k^{(g)}(g(x) - g(x_{k-1}))}{1}. \quad (8)$$

Якщо коефіцієнти ФЛД (8) визначаються із інтерполяційної умови

$$F_n(g; x_i) = y_i, \quad \text{де } y_i = f(x_i), \quad x_i \in X, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

то ФЛД (8) буде інтерполяційним. Назвемо цей дріб функціональним інтерполяційним ланцюговим дробом типу С-дробу (С-ФІЛД).

Теорема 4. Коефіцієнти С-ФІЛД (8) визначаються через значення функції $y = f(x)$ у вузлах (1) за допомогою рекурентного співвідношення у вигляді скінченного ланцюгового дробу

Таблиця 4.

Функція: $y = \sqrt{\ln x}$. Рівномірне розбиття.

n	Δ_t	Δ_g	Λ	К-ть
6	$0,35324105 \cdot 10^{-07}$	$0,65392821 \cdot 10^{-08}$	$0,10769258 \cdot 10^{-05}$	10.000.000
7	$0,31711659 \cdot 10^{-08}$	$0,38805607 \cdot 10^{-09}$	$0,15739797 \cdot 10^{-06}$	10.000.000
8	$0,22921753 \cdot 10^{-09}$	$0,22892169 \cdot 10^{-10}$	$0,22875249 \cdot 10^{-07}$	10.000.000
9	$0,19804390 \cdot 10^{-10}$	$0,13439663 \cdot 10^{-11}$	$0,33088496 \cdot 10^{-08}$	10.000.000
10	$0,13825186 \cdot 10^{-11}$	$0,78588010 \cdot 10^{-13}$	$0,47671741 \cdot 10^{-09}$	10.000.000
11	$0,11670476 \cdot 10^{-12}$	$0,45799814 \cdot 10^{-14}$	$0,68451352 \cdot 10^{-10}$	10.000.000
12	$0,85392330 \cdot 10^{-14}$	$0,26614841 \cdot 10^{-15}$	$0,98005670 \cdot 10^{-11}$	10.000.000
13	$0,70911944 \cdot 10^{-15}$	$0,15427888 \cdot 10^{-16}$	$0,13997104 \cdot 10^{-11}$	10.000.000
14	$0,50632507 \cdot 10^{-16}$	$0,89237784 \cdot 10^{-18}$	$0,19947148 \cdot 10^{-12}$	10.000.000
15	$0,41448106 \cdot 10^{-17}$	$0,51518520 \cdot 10^{-19}$	$0,28372152 \cdot 10^{-13}$	10.000.000
16	$0,30510631 \cdot 10^{-18}$	$0,29692296 \cdot 10^{-20}$	$0,40287157 \cdot 10^{-14}$	9.999.998
17	$0,24779664 \cdot 10^{-19}$	$0,17087105 \cdot 10^{-21}$	$0,57119291 \cdot 10^{-15}$	9.999.900
18	$0,17906755 \cdot 10^{-20}$	$0,98195488 \cdot 10^{-23}$	$0,80873784 \cdot 10^{-16}$	9.994.430
19	$0,14391804 \cdot 10^{-21}$	$0,56424620 \cdot 10^{-24}$	$0,11436646 \cdot 10^{-16}$	9.779.493

$$a_0^{(g)} = 0, \quad a_k^{(g)} = \frac{1}{g(x_k) - g(x_{k-1})} \left(-1 + \frac{a_{k-1}^{(g)}(g(x_k) - g(x_{k-2}))}{-1} + \right. \\ \left. + \dots + \frac{a_2^{(g)}(g(x_k) - g(x_1))}{-1} + \frac{a_1^{(g)}(g(x_k) - g(x_0))}{y_k - a_0^{(g)}} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Таблиця 5.

Функція: $y = \ln(\sqrt{x} + 1)$. Вузли Чебишова.

n	t	Δ_c	Δ_g	Λ	К-ть
6	0,4645	$0,128296 \cdot 10^{-04}$	$0,130603 \cdot 10^{-08}$	$0,801522 \cdot 10^{-07}$	10.000.000
7	0,4636	$0,260947 \cdot 10^{-05}$	$0,556654 \cdot 10^{-10}$	$0,915146 \cdot 10^{-08}$	10.000.000
8	0,4630	$0,475653 \cdot 10^{-06}$	$0,190265 \cdot 10^{-11}$	$0,857327 \cdot 10^{-09}$	10.000.000
9	0,4625	$0,957425 \cdot 10^{-07}$	$0,790863 \cdot 10^{-13}$	$0,997531 \cdot 10^{-10}$	10.000.000
10	0,4622	$0,176166 \cdot 10^{-07}$	$0,275595 \cdot 10^{-14}$	$0,986747 \cdot 10^{-11}$	10.000.000
11	0,4619	$0,352072 \cdot 10^{-08}$	$0,112702 \cdot 10^{-15}$	$0,116037 \cdot 10^{-11}$	10.000.000
12	0,4617	$0,652076 \cdot 10^{-09}$	$0,397956 \cdot 10^{-17}$	$0,118893 \cdot 10^{-12}$	10.000.000
13	0,4616	$0,129641 \cdot 10^{-09}$	$0,160888 \cdot 10^{-18}$	$0,140654 \cdot 10^{-13}$	10.000.000
14	0,4615	$0,241276 \cdot 10^{-10}$	$0,573571 \cdot 10^{-20}$	$0,147624 \cdot 10^{-14}$	10.000.000
15	0,4614	$0,477786 \cdot 10^{-11}$	$0,229928 \cdot 10^{-21}$	$0,175212 \cdot 10^{-15}$	10.000.000
16	0,4613	$0,892528 \cdot 10^{-12}$	$0,825685 \cdot 10^{-23}$	$0,187066 \cdot 10^{-16}$	10.000.000

Доведення. Використаємо метод повної математичної індукції. Твердження має місце при $k = 1, 2$. Припустимо, що (9) виконується при $k = j - 1$. Тоді

при $m = j$ із (8) маємо

$$y_j = a_0^{(g)} + \prod_{k=1}^j \frac{a_k^{(g)} (g(x_j) - g(x_{k-1}))}{1} = a_0^{(g)} + \frac{a_1^{(g)} (g(x_j) - g(x_0))}{1 + \prod_{k=2}^j \frac{a_k^{(g)} (g(x_j) - g(x_{k-1}))}{1}}.$$

Позначимо через

$$S = 1 + \prod_{k=2}^j \frac{a_k^{(g)} (g(x_j) - g(x_{k-1}))}{1}. \quad (10)$$

Тоді $y_j = a_0^{(g)} + \frac{a_1^{(g)} (g(x_j) - g(x_0))}{S}$ і $S = \frac{a_1^{(g)} (g(x_j) - g(x_0))}{y_j - a_0^{(g)}}$. З іншого боку для ланцюгового дробу (10) виконується припущення індукції, а отже коефіцієнт $a_j^{(g)}$ визначається через значення S наступним чином

$$a_j^{(g)} = \frac{1}{g(x_j) - g(x_{j-1})} \left(-1 + \frac{a_{j-1}^{(g)} (g(x_j) - g(x_{j-2}))}{-1} + \frac{a_{j-2}^{(g)} (g(x_j) - g(x_{j-3}))}{-1} + \right. \\ \left. + \dots + \frac{a_3^{(g)} (g(x_j) - g(x_2))}{-1} + \frac{a_2^{(g)} (g(x_j) - g(x_1))}{S - 1} \right).$$

Підставивши значення S отримаємо, що (9) виконується і в цьому випадку. Отже, (9) має місце при всіх значеннях $m = 1, 2, \dots, n$. Теорема доведена.

Легко переконалися, що С-ФІЛД (8) буде еквівалентним Т-ФІЛД (2), оскільки $a_0^{(g)} = b_0^{(g)}$, $a_1^{(g)} = 1/b_1^{(g)}$, $a_i^{(g)} = 1/(b_{i-1}^{(g)} b_i^{(g)})$, але формули (9) дозволяють знаходити коефіцієнти С-ФІЛД безпосередньо за значеннями функції в інтерполяційних вузлах.

Таблиця 6.

Функція: $y = \ln(\sqrt{x} + 1)$. Рівномірне розбиття.

n	t	Δ_c	Δ_g	Λ	К-ть
6	0,4512	$0,169525 \cdot 10^{-03}$	$0,198426 \cdot 10^{-07}$	$0,111090 \cdot 10^{-05}$	10.000.000
7	0,4522	$0,515388 \cdot 10^{-04}$	$0,128309 \cdot 10^{-08}$	$0,189916 \cdot 10^{-06}$	10.000.000
8	0,4531	$0,139981 \cdot 10^{-04}$	$0,662641 \cdot 10^{-10}$	$0,264594 \cdot 10^{-07}$	10.000.000
9	0,4538	$0,417169 \cdot 10^{-05}$	$0,413705 \cdot 10^{-11}$	$0,456491 \cdot 10^{-08}$	10.000.000
10	0,4544	$0,113426 \cdot 10^{-05}$	$0,215958 \cdot 10^{-12}$	$0,666413 \cdot 10^{-09}$	10.000.000
11	0,4549	$0,333386 \cdot 10^{-06}$	$0,131730 \cdot 10^{-13}$	$0,115440 \cdot 10^{-09}$	10.000.000
12	0,4553	$0,906983 \cdot 10^{-07}$	$0,692531 \cdot 10^{-15}$	$0,173648 \cdot 10^{-10}$	10.000.000
13	0,4556	$0,263894 \cdot 10^{-07}$	$0,415502 \cdot 10^{-16}$	$0,301204 \cdot 10^{-11}$	10.000.000
14	0,4559	$0,718180 \cdot 10^{-08}$	$0,219534 \cdot 10^{-17}$	$0,462349 \cdot 10^{-12}$	10.000.000
15	0,4562	$0,207347 \cdot 10^{-08}$	$0,130095 \cdot 10^{-18}$	$0,801808 \cdot 10^{-13}$	10.000.000

Теорема 5 (наслідок із теореми 5 [9]). *Нехай коефіцієнти $a_i^{(g)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, С-ФІЛД (8) відмінні від нуля і виконується умова типу Пейдона-Уолла*

$$\max_{x \in \mathcal{R}} |a_i^{(g)} (g(x) - g(x_{i-1}))| \leq t(1-t), \quad 0 < t \leq \frac{1}{2}, \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n,$$

тоді для знаменника $Q_n(g; x)$ має місце нерівність

$$|Q_n(x)| \geq \Omega_n = \begin{cases} \frac{(1-t)^{n+1} - t^{n+1}}{1-2t}, & \text{якщо } 0 < t < \frac{1}{2}, \\ \frac{n+1}{2^n}, & \text{якщо } t = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Таблиця 7.

Функція: $y = e^{\sin x}$. Корені Чебишова.

n	t	Δ_c	Δ_g	Λ	К-ТЬ
6	0,4472	$0,716329 \cdot 10^{-09}$	$0,220678 \cdot 10^{-11}$	$0,268586 \cdot 10^{-09}$	10.000.000
7	0,4510	$0,273845 \cdot 10^{-09}$	$0,152719 \cdot 10^{-13}$	$0,581772 \cdot 10^{-11}$	10.000.000
8	0,4536	$0,719109 \cdot 10^{-11}$	$0,864629 \cdot 10^{-16}$	$0,102039 \cdot 10^{-12}$	10.000.000
9	0,4555	$0,226541 \cdot 10^{-13}$	$0,467824 \cdot 10^{-18}$	$0,179467 \cdot 10^{-14}$	10.000.000
10	0,4569	$0,636604 \cdot 10^{-16}$	$0,215595 \cdot 10^{-20}$	$0,265417 \cdot 10^{-16}$	10.000.000
11	0,4580	$0,258248 \cdot 10^{-17}$	$0,957695 \cdot 10^{-23}$	$0,392180 \cdot 10^{-18}$	10.000.000
12	0,4589	$0,593780 \cdot 10^{-18}$	$0,372189 \cdot 10^{-25}$	$0,500651 \cdot 10^{-20}$	10.000.000
13	0,4595	$0,575723 \cdot 10^{-19}$	$0,140233 \cdot 10^{-27}$	$0,637164 \cdot 10^{-22}$	10.000.000

Очевидно, що коефіцієнти С-ФІЛД не будуть задовольняти умови типу Слешинського-Прінгсгейма (3) теореми 3. Доведемо теорему, яка буде встановлювати оцінку залишкового члена С-ФІЛД в деякій точці.

Теорема 6. 1) Нехай функція $f(x)$ неперервна в \mathcal{R} і визначена своїми значеннями в кожній внутрішній точці \mathcal{R} ; 2) нехай за значеннями функції $y = f(x)$ в інтерполяційних вузлах (1) побудований С-ФІЛД (8), всі коефіцієнти якого задовольняють умови

$$a_k^{(g)} \neq 0, \quad \max_{x \in \mathcal{R}} |a_k^{(g)}(g(x) - g(x_{k-1}))| \leq t(1-t), \quad \text{де } 0 < t \leq \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

3) нехай в \mathcal{R} знайдеться точка x_* така, що $x_* \notin X$ і виконуються нерівності

$$a_{n+1}^{(g)}(g; x_*) \neq 0, \quad \max_{x \in \mathcal{R}} |a_{n+1}^{(g)}(g; x_*)(g(x) - g(x_n))| \leq t(1-t),$$

$$\begin{aligned} \text{де } a_{n+1}^{(g)}(g; x_*) = & \frac{1}{g(x_*) - g(x_n)} \left(-1 + \frac{a_n^{(g)}(g(x_*) - g(x_{n-1}))}{-1} + \right. \\ & \left. + \dots + \frac{a_2^{(g)}(g(x_*) - g(x_1))}{-1} + \frac{a_1^{(g)}(g(x_*) - g(x_0))}{y_* - a_0^{(g)}} \right), \quad y_* = f(x_*). \end{aligned}$$

Тоді в точці x_* має місце оцінка

$$|f(x_*) - F_n(g; x_*)| < \frac{\Delta}{\Omega_n \cdot \Omega_{n+1}}, \quad \text{де } \Delta = \prod_{i=1}^{n+1} |a_i^{(g)}(g(x_*) - g(x_{i-1}))|. \quad (11)$$

Доведення. Оскільки за умовою теореми точка $x_* \in \mathcal{R}$ не належить до інтерполяційних вузлів, то за значеннями функції в точках $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$, де $x_{n+1} = x_*$, можна побудувати ще один С-ФІЛД

$$F_{n+1}(g; x) = \frac{P_{n+1}(g; x)}{Q_{n+1}(g; x)} = a_0^{(g)} + \prod_{k=1}^{n+1} \frac{a_k^{(g)}(g(x) - g(x_{k-1}))}{1},$$

де коефіцієнти $a_0^{(g)}, a_1^{(g)}, \dots, a_n^{(g)}$ збігаються із коефіцієнтами С-ФІЛД (8), а коефіцієнт $a_{n+1}^{(g)} = a_{n+1}^{(g)}(g; x_*)$. Різниця між двома сусідніми підхідними дробами рівна

$$F_{n+1}(g; x) - F_n(g; x) = \frac{(-1)^n \prod_{i=0}^n a_{i+1}^{(g)}(g(x) - g(x_i))}{Q_n(g; x) Q_{n+1}(g; x)}.$$

Оцінимо цю різницю за абсолютним значенням в точці $x = x_*$, маємо

$$|F_{n+1}(g; x_*) - F_n(g; x_*)| = |f(x_*) - F_n(g; x_*)| = \frac{\prod_{i=1}^{n+1} |a_i^{(g)}(g(x_*) - g(x_{i-1}))|}{|Q_{n+1}(g; x_*)| |Q_n(g; x_*)|}.$$

Спираючись на теорему 5 отримуємо (11).

5. Приклади інтерполяції С-ФІЛД. Розглянемо деякі числові приклади інтерполяції функцій однієї дійсної змінної С-ФІЛД (8) на проміжку. На цих прикладах проілюструємо ефективність оцінок теореми 6 та порівняємо запропонований спосіб інтерполяції із наближенням функції правильним інтерполяційним ланцюговим С-дробом.

Таблиця 8.

Функція: $y = e^{\sin x}$. Рівномірне розбиття.

n	t	Δ_c	Δ_g	Λ	К-ть
6	0,3771	$0,140814 \cdot 10^{-07}$	$0,439753 \cdot 10^{-10}$	$0,304540 \cdot 10^{-08}$	10.000.000
7	0,3862	$0,852189 \cdot 10^{-08}$	$0,474952 \cdot 10^{-12}$	$0,934259 \cdot 10^{-10}$	10.000.000
8	0,3936	$0,355708 \cdot 10^{-09}$	$0,417191 \cdot 10^{-14}$	$0,239845 \cdot 10^{-11}$	10.000.000
9	0,3997	$0,166375 \cdot 10^{-11}$	$0,348496 \cdot 10^{-16}$	$0,599381 \cdot 10^{-13}$	10.000.000
10	0,4049	$0,741540 \cdot 10^{-14}$	$0,246969 \cdot 10^{-18}$	$0,129399 \cdot 10^{-14}$	10.000.000
11	0,4093	$0,447768 \cdot 10^{-15}$	$0,168123 \cdot 10^{-20}$	$0,272488 \cdot 10^{-16}$	10.000.000
12	0,4130	$0,155000 \cdot 10^{-15}$	$0,998441 \cdot 10^{-23}$	$0,506808 \cdot 10^{-18}$	10.000.000

Як і в попередньому випадку, обчислення проводились на множині тестових псевдовипадкових точок (7). Визначалися наступні величини

$$\Delta_c = \max_{x \in X_*} |f(x) - F_n(x)|, \quad \text{де} \quad F_n(x) = a_0 + \prod_{k=1}^n \frac{a_k(x - x_{k-1})}{1}$$

— правильний інтерполяційний ланцюговий С-дріб [10], який побудований за значеннями функції на множині інтерполяційних вузлів (1),

$$\Delta_g = \max_{x \in X_*} |f(x) - F_n(g; x)|, \quad \Lambda = \frac{\max_{x \in X_*} \prod_{i=0}^n |a_i^{(g)}(g(x) - g(x_i))|}{\Omega_n \Omega_{n+1}}.$$

Коефіцієнти $a_i^{(g)}, i = 1, 2, \dots, n$, С-ФІЛД (6) та $a_{n+1}^{(g)}(g; x)$ згідно із припущенням теореми 6 мають задовольняти умови типу Пейдона-Уолла. Значення $t_1, 0 < t_1 \leq \frac{1}{2}$, при яких коефіцієнти С-ФІЛД задовольняють вказану умову і значення $t_2, 0 < t_2 \leq \frac{1}{2}$, при якому $a_{n+1}^{(g)}(g; x_*)$ задовольняє ту ж умову для всіх значень $x_* \in X^*$, можуть бути, взагалі кажучи, різними. А тому при проведенні обчислень визначається ще одна величина $t = \max\{t_1, t_2\}$.

Колонки в наведених таблицях містять такі значення: в першій колонці вказано кількість інтерполяційних вузлів n за значеннями функції в яких будується С-ФІЛД (8), в другій колонці — значення максимального із двох значень t_1, t_2 , в наступних колонках — $\Delta_c, \Delta_g, \Lambda$, в останній колонці вказана загальна кількість точок множини (7) в яких виконуються умови теореми 6.

Нехай на проміжку $[0, 2; 1, 5]$ інтерполюється функція $y = \ln(\sqrt{x} + 1)$. В якості функції-базису $t = g(x)$ виберемо функцію \sqrt{x} .

В таблиці 5 містяться дані числових експериментів інтерполяції функції, коли в якості вузлів інтерполяції вибрано корені багаточлену Чебишова 1-го роду. Аналогічно, в таблиці 6 — результати числових експериментів для випадку рівномірного розбиття проміжку.

В таблицях 7–8 наведено результати інтерполяції функції $y = e^{\sin x}$ на проміжку $[-0, 25; 0, 15]$. В якості функції-базису вибрано $g(x) = \sin x$. В таблиці 7 вміщено результати інтерполяції за коренями Чебишова, а в таблиці 8 — за точками рівномірного розбиття проміжку.

Із наведених прикладів випливають наступні висновки: а) інтерполяція розглянутих функцій є більш ефективною, значення максимальної похибки наближення є більш кращим, коли в якості функції-базису вибрано не $g(x) = x$, а відповідно, $g(x) = \sqrt{x}$ та $g(x) = \sin x$; б) множина функцій, для яких виконуються умови теореми 6, не порожня; в) кількість тестових точок, в яких $a_{n+1}^{(g)}(g; x_*)$ задовольняє умови теореми також не порожня — у наведених прикладах в усіх 10.000.000 псевдовипадкових точок умови типу Пейдона-Уолла виконуються; г) максимальне значення оцінки Λ з теореми на множині пробних точок досить ефективно.

6. Висновки. В роботі досліджувалася задача інтерполяції функцій однієї дійсної змінної на компактній функціональній інтерполяційній ланцюговій дробом. Отримано формули для знаходження коефіцієнтів ланцюгових дробів за значеннями функції в інтерполяційних вузлах, встановлені точкові оцінки залишкових членів, наведені результати числових експериментів. Розглянуті приклади ілюструють ефективність запропонованого підходу.

1. Гаврилюк І. П., Макаров В. Л. Методи обчислень. У 2 ч. — К.: Вища школа, 1995. — Ч. 1. — 367 с.
2. Привалов А. А. Теория интерполирования функций. В 2-х кн. — Саратов: Из-во Саратов. ун-та, 1990. — 424 с.
3. Дžoунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. Пер. с англ. — М.: Мир, 1985. — 414 с.
4. Микеладзе Ш. Е. Численные методы математического анализа. — М.: ГИТТЛ, 1953. — 527 с.
5. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. — М. Мир, 1986. — 502 с.
6. Пагіря М. М. Функціональні ланцюгові дроби типу Тіле // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. — 2010. — Вип. 20. — С. 98–110.

7. *Пагіря М. М.* Інтерполяція функцій ланцюговим дробом та гіллястим ланцюговим дробом спеціального виду // *Наук. Вісник Ужгород. ун-ту. Сер. мат.* – 1994. Вип. I. – С. 72–79.
8. *Thiele T. N.* *Interpolationsrechnung.* — Leipzig: Commisission von B. G. Teubner, 1909. — XII + 175 S.
9. *Пагіря М. М., Свида Т. С.* Задача інтерполяції функцій двовимірними ланцюговими дробами // *Український математичний журнал.* – 2006. – **58**, № 6. – С. 842–851.
10. *Pahiry M.* *Interpolation Function of Non-Tiele Continued Fractions* // *Communication in the Analytic Theory of Continued Fractions.* – 2002. – Vol. X, Summer 2002. – P. 59–62.

Одержано 21.02.2012