УДК 519.63

В. О. Петенько (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО ЛОКАЛЬНУ ГРАНИЧНУ ТЕОРЕМУ ДЛЯ КВАЗІЙМОВІРНІСНИХ ГРАТЧАСТИХ РОЗПОДІЛІВ І ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ ДО НАБЛИЖЕНОГО ЗНАХОДЖЕННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ ТИПУ ЕЙРІ

The local limit theorem for quasyprobability's lattice distributions is proved and applicated to numerical solving of the one evolution problem of mathematical phisics.

Доведена локальна гранична теорема для квазіймовірнісних гратчастих розподілів та проілюстроване її застосування до наближеного розв'язання одної еволюційної задачі математичної фізики.

Вивчення граничної поведінки розподілів сум незалежних випадкових величин і векторів в значній мірі стимулює розвиток ймовірнісного апарату розв'язання прикладних задач і, зокрема, задач математичної фізики. В даній роботі доводиться локальна гранична теорема для одного класу однаково розподілених незалежних квазіймовірнісних випадкових величин на одновимірній гратці, аналогічна класичній [1] і її застосовність до наближеного розв'язання задачі відшукання фундаментального розв'язку рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = (-1)^{q+1} b \frac{\partial^{2q+1} u}{\partial x^{2q+1}}, \quad q = 1, 2, \ldots,$$

названого рівнянням типу Ейрі в зв'язку з очевидною аналогією з однією з функцій Ейрі [2] виду

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i(t^3 - tx)\right\} dt,$$

яка є розв'язком рівняння у випадку, коли $q = 1$ і $b = 1$.

Основи квазіймовірнісної теорії викладені в роботах Ю. П. Студнєва та його учнів (див., наприклад, [3]). Нагадаємо коротко суть цих основ. Узагальнення поняття ймовірності полягає у відмові від невід'ємності ймовірностей і можливості набувати від'ємних і комплексних значень. Наприклад, до дискретних квазіймовірнісних розподілів віднесемо не більш, як злічену множину p_k, для якої $\sum\limits_k p_k = 1$ і $\sum\limits_k |p_k| < +\infty$.

Неперервні розподіли характеризуються щільностями – функціями $v(x)$, для яких $\int\limits_{-\infty}^{\infty} v(x)dx = 1$, а квазіймовірнісні функції розподілу в цьому випадку матимуть вигляд $V(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} v(z)dz$ і повинні мати обмежену варіацію.

Перетворення Фур'є-Стільтьєса розподілу

$$w(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{itx\right\} dV(x)$$

є аналогом характеристичної функції. Аналогічно визначаються і початкові моменти:

$$\alpha_r = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^r dV(x)$$

у випадку існування "абсолютного моменту".

Квазіймовірнісний закон розподілу ставимо у відповідність гратчастій випадковій величині ξ, яка приймає значення виду $c + kh$, де $h > 0$, k – ціле у відповідності з записом $p_k = P\{\xi = c + kh\}$.

Особливістю розглянутого в роботі класу розподілів є те, що граничними щільностями є функції виду

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-itx + iat^{2q+1})\right\} dt.$$

Не обмежуючи загальності міркувань, гратку будемо вважати центрованою, тобто виду $\{kh\}$, при цьому

$$\alpha_r = \sum_k (kh)^r p_k$$

і

$$w(t) = \sum_k \exp\{itkh\} p_k.$$

Сумі n незалежних однаково розподілених випадкових гратчастих величин з розподілами $\{p_k\}$ відповідає $\{P_n(k)\}$ – n-кратна згортка. Аналог локальної граничної теореми одержуємо у вигляді.

Теорема 1. *Нехай ξ_n – послідовність взаємно незалежних однаково розподілених на гратці $\{kh\}$ квазіймовірнісних випадкових величин з розподілами $\{p_k\}$ і перетвореннями Фур'є-Стільтьєса $w(t)$. Якщо виконуються умови*

1) $\alpha_r = 0, \quad r = \overline{1, 2q}, \quad q \in N$;

2) $\mathrm{Re}\alpha_{q+1} = (2q+1)!a \neq 0, \quad \mathrm{Im}\alpha_{2q+1} = 0$;

3) *існує* α_{2q+2};

4) $|w(t)| < 1$, *якщо* $|t| \in \left(0, \frac{\pi}{h}\right]$,

то для кожного цілого k при $n \to \infty$ виконується співвідношення

$$\frac{\sqrt[2q+1]{n} P_n(k)}{h} - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{itkh}{\sqrt[2q+1]{n}} + iat^{2q+1}\right\} dt \to 0. \tag{1}$$

Доведення. Позначимо

$$R_n = \frac{\sqrt[2q+1]{n} P_n(k)}{h} - \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{itkh}{\sqrt[2q+1]{n}} + iat^{2q+1}\right\} dt.$$

З формули обернення

$$P_n(k) = \frac{h}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \exp\{-itkh\} w^n(t) dt, \tag{2}$$

одержаної з

$$w^n(t) = \sum_k \exp\{itkh\} P_n(k),$$

після заміни в (2) змінної інтегрування t на $\frac{t}{\sqrt[2q+1]{n}}$, одержуємо

$$R_n = \frac{1}{2\pi} \int_{D_n} \exp\left\{-\frac{itkh}{\sqrt[2q+1]{n}}\right\} w^n\left(\frac{t}{\sqrt[2q+1]{n}}\right) dt - \frac{1}{2\pi} \int_R \exp\left\{-\frac{itkh}{\sqrt[2q+1]{n}} + iat^{2q+1}\right\} dt,$$

де

$$D_n = \left[-\frac{\sqrt[2q+1]{n}\pi}{h}, \ \frac{\sqrt[2q+1]{n}\pi}{h}\right].$$

Подамо $2\pi R_n$ у вигляді алгебраїчної суми інтегралів

$$2\pi R_n = I_1 - I_2 + I_3 + I_4, \tag{3}$$

де

$$I_1 = \int_\Delta \exp\left\{-\frac{itkh}{\sqrt[2q+1]{n}}\right\} \left[w^n\left(\frac{t}{\sqrt[2q+1]{n}}\right) - e^{iat^{2q+1}}\right] dt,$$

$$I_2 = \int_{R\setminus\Delta} \exp\left\{-\frac{itkh}{\sqrt[2q+1]{n}} + iat^{2q+1}\right\} dt,$$

$$I_3 = \int_{d_n\setminus\Delta} \exp\left\{-\frac{itkh}{\sqrt[2q+1]{n}}\right\} w^n\left(\frac{t}{\sqrt[2q+1]{n}}\right),$$

$$I_4 = \int_{\Delta_n\setminus d_n\varepsilon} \exp\left\{-\frac{itkh}{\sqrt[2q+1]{n}}\right\} w^n\left(\frac{t}{\sqrt[2q+1]{n}}\right),$$

а області Δ і $d_n\varepsilon$ визначені так:

$\Delta = \left\{t : |t| \leq n^\lambda, \ 0 < \lambda < \frac{1}{(2q+1)(2q+3)}\right\}$,

$d_n\varepsilon = \left\{t : \ n^\lambda \leq |t| \leq \varepsilon \sqrt[2q+1]{n}\right\}, \ \varepsilon > 0.$

В роботі [3] одержаний результат:

$$\lim_{n\to\infty} w^n\left(\frac{t}{\sqrt[2q+1]{n}}\right) = e^{iat^{2q+1}},$$

і, як випливає з доведення, має місце оцінка такої збіжності

$$\left| w^n\left(\frac{t}{\sqrt[2q+1]{n}}\right) - e^{iat^{2q+1}} \right| \leq \frac{At^{2q+2}}{n^{\frac{1}{2q+1}}}, \ A > 0.$$

Оцінюючи інтеграл I_1, одержуємо

$$|I_1| \le \int_{\Delta} \left| w^n \left(\frac{t}{\sqrt[2q+1]{n}} \right) - e^{iat^{2q+1}} \right| \le 2An^{-\frac{1}{2q+1}} \int_0^{n^\lambda} t^{2q+2} dt =$$

$$= \frac{2A}{2q+3} n^{-(2q+3)\left[\frac{1}{(2q+1)(2q+3)} - \lambda\right]}.$$

Внаслідок вибору λ $\lim\limits_{n\to\infty} I_1 = 0$.

Інтеграл I_2 оцінимо, використовуючи інтегрування по контуру, ідея якого реалізована при обчисленні інтегралів Френеля у [4]. Вважаючи $a > 0$, розглянемо на площині $z = t + i\tau$ замкнений контур Γ, складений з частин Γ_1, Γ_2, Γ_3 і Γ_4, де

$\Gamma_1 : n^\lambda \le |z| \le R,\ \arg z = 0;$

$\Gamma_2 : |z| = R,\ 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2(2q+1)};$

$\Gamma_3 : R \ge |z| \ge n^\lambda,\ \arg z = \frac{\pi}{\lambda(2q+1)};$

$\Gamma_4 : |z| = n^\lambda,\ \frac{\pi}{2(2q+1)} \ge \arg z \ge 0;\ (R > n^\lambda).$

Визначення частин контура Γ відповідає напрямку руху при інтегруванні.

Функція комплексної змінної z

$$f(z) = \exp\left\{ iaz^{2q+1} - iz\frac{kh}{\sqrt[2q+1]{n}} \right\}$$

при всіх значеннях параметрів аналітична внутрі і вздовж контура Γ, тому, застосовуючи інтегральну теорему Коші про рівність нулю інтеграла від аналітичної функції, одержуємо

$$I_R = \int_{n^\lambda}^{R} \exp\left\{ -\frac{itkh}{\sqrt[2q+1]{n}} + iat^{2q+1} \right\} = \int_{\Gamma_1} f(z)dz - \int_{\Gamma_2} f(z)dz - \int_{\Gamma_3} f(z)dz - \int_{\Gamma_4} f(z)dz. \quad (4)$$

Контур Γ_1 – дуга кола радіуса R вздовж неї

$$z = Re^{i\varphi},\ \text{і}\ \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2(2q+1)}\right].$$

Тому

$$\int_{\Gamma_2} f(z)dz = R \int_0^{\frac{\pi}{2(2q+1)}} \exp\left\{ -iRe^{i\varphi}\frac{kh}{\sqrt[2q+1]{n}} + iaR^{2q+1}e^{(2q+1)\varphi} + i\varphi \right\} d\varphi.$$

Використовуючи модульну оцінку цього інтеграла, а також нерівності виду $\sin\varphi \le \varphi$, $\sin\varphi \ge \frac{2\varphi}{\pi}$, одержимо

$$\left| \int_{\Gamma_2} f(z)dz \right| \le R \int_0^{\frac{\pi}{2(2q+1)}} \exp\left\{ \varphi \left[\frac{|k|hR}{\sqrt[2q+1]{n}} - \frac{2a}{\pi} R^{2q+1} \right] \right\} d\varphi =$$

$$= \frac{\exp\left\{\frac{\pi}{2(2q+1)}\left[\frac{|k|h}{\sqrt[2q+1]{n}}R - \frac{2a}{\pi}R^{2q+1}\right]-1\right\}}{\frac{2aR^{2q}}{\pi} - \frac{|k|h}{\sqrt[2q+1]{n}}} = 0(R^{-2q}),\ \ R\to\infty.$$

Інтеграл по контуру Γ_4 матиме аналогічну оцінку

$$\left|\int\limits_{\Gamma_4} f(z)dz\right| = 0\left(n^{-2\lambda q}\right),\ \ n\to\infty.$$

Вздовж контура Γ_3 $z=\rho e^{\frac{i\pi}{2(2q+1)}}$, тому

$$\left|\int\limits_{\Gamma_3} f(z)dz\right| = \left|\int\limits_{n^\lambda}^{R}\left\{-a\rho^{2q+1} - i\rho\frac{e^{i\frac{\pi}{2(2q+1)}}kh}{\sqrt[2q+1]{n}} + \frac{i\pi}{2(2q+1)}\right\}d\rho\right| \le$$

$$\le \int\limits_{n^\lambda}^{R}\left\{-a\rho^{2q+1} + \rho\frac{|k|h\sin\frac{\pi}{2(2q+1)}}{\sqrt[2q+1]{n}}\right\}d\rho.$$

Відповідний останньому невласний інтеграл збіжний, його залишок

$$\int\limits_{A}^{\infty}\exp\left\{-a\rho^{2q+1} + \frac{|k|h\sin\frac{\pi}{2(2q+1)}}{\sqrt[2q+1]{n}}\rho\right\}d\rho$$

має високу швидкість збіжності, а саме є величина порядку $0\left(\frac{e^{-aA^{2q+1}}}{A2q}\right)$ малості при $A\to\infty$. Внаслідок цього, після спрямування R до нескінченності величина $\lim\limits_{R\to\infty} I_R$ стає нескінченно малою при $n\to\infty$. Так само для випадку $a<0$ можна розглянути контур Γ^*, симетричний контуру Γ по відношенню до дійсної осі. Тому і в цьому випадку $\lim\limits_{R\to\infty} I_R$ – нескінченно мала, а також величина $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{-n^\lambda} f(t)dt$ – нескінченно мала. Тому $\lim\limits_{n\to\infty} I_2 = 0$.

Перетворення Фур'є-Стільтьєса $w(t)$ внаслідок виконання умов теореми 1), 2) і 3) має вигляд

$$w(t) = 1 + iat^{2q+1} + 0(t^{2q+2}),\ t\to 0.$$

При великих n

$$w^n\left(\frac{t}{\sqrt[2q+1]{n}}\right) = 1 + iat^{2q+1} + 0\left(n^{-\frac{1}{2q+1}}\right) = e^{iat^{2q+1}+0\left(n^{-\frac{1}{2q+1}}\right)},\ n\to\infty.$$

Тому інтеграл I_4 можна оцінювати аналогічно інтегралу I_R (4) із застосуванням контурного інтегрування, тільки R потрібно замінити на $\varepsilon\sqrt[2q+1]{n}$.

Тепер можемо зробити висновок, що і $\lim\limits_{n\to\infty} I_4 = 0$.

Якщо в інтегралі I_3 зробити заміну із t на $n^{\frac{1}{2q+1}}t$, то

$$I_3 = n^{\frac{1}{2q+1}}\int\limits_{\varepsilon\le|t|\le\frac{\pi}{h}}\exp\{-itkh\}\,w^n(t)dt.$$

Враховуючи, що за умовою 4) теореми в області інтегрування $|w(t)| < 1$, то існує $c_0 > 0$, що в цій області

$$|w(t)| \leq e^{-c_0} < 1,$$

а

$$|I_3| \leq 2n^{\frac{1}{2q+1}} \cdot e^{-nc_0} \left[\frac{\pi}{h} - \varepsilon\right].$$

На цьому оцінки інтегралів у формулі (3) закінчені, тому робимо висновок, що $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

Теорема доведена.

В наступному нам потрібний буде такий варіант співвідношення (2)

$$\frac{P_n(k)}{h} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{itkh - nait^{2q+1}\right\} dt = 0\left(n^{-\frac{1}{2q+1}}\right),\ n \to \infty. \tag{5}$$

Проілюструємо одне застосування одержаної локальної граничної теореми до задачі наближеного відшукання фундаментального розв'язку рівняння виду

$$\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau} = (-1)^{q+1} b \frac{\partial^{2q+1} u(x,\tau)}{\partial x^{2q+1}},\ x \in R,\ \tau \geq 0,\ b > 0, \tag{6}$$

тобто коректного по Г. І. Петровському [5] рівняння.

Початковою умовою при цьому є

$$u(x,0) = \delta(x), \tag{7}$$

де $\delta(x)$ – δ-функція Дірака.

Розв'язком задачі (6), (7) є функція

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-isx + ias^{2q+\frac{1}{\tau}}\right\} ds,$$

яка може бути знайдена методом перетворень Фур'є.

Різницева схема виду

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} \to \frac{u_\Delta(x,\tau+\Delta\tau) - u_\Delta(x,t)}{\Delta\tau};$$

$$\frac{\partial^{2q+1} u}{\partial x^{2q+1}} \to \frac{\sum\limits_{k=q-1}^{q} (-1)^{q+k+1} C_{2q+1}^{q+k+1} u_\Delta(x - k\Delta x, \tau)}{\Delta x^{2q+1}};$$

з встановленням зв'язку між кроками вздовж просторової та часової осей координат

$$\Delta\tau = \gamma \Delta x^{2p+1} \tag{8}$$

зводить задачу (6), (7) до свого різницевого аналогу

$$u_\Delta(x,\tau+\Delta\tau) = \sum_k p_k u_\Delta(x - k\Delta x, \tau),\ k \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

$$u_\Delta(0,0)\Delta x = 1;\ u_\Delta(k\Delta x, 0) = 0,\ k \neq 0, \tag{10}$$

де

$$p_k = \begin{cases} (-1)^{q+k+1}\gamma b C_{2q+1}^{q+k+1}, & k \neq 0, \\ 1 + (-1)^{q+1}\gamma b C_{2q+1}^{q}, & k = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Множина $\{p_k\}$ гідно з властивостями біномних коефіцієнтів є квазіймовірнісним законом розподілу деякої гратчастої випадкової величини з граткою $\{k\Delta x\}$.

Рівняння (9) як аналог формули повної ймовірності описує деякий процес типу блукання частинки по точках з координатами на прямій, які кратні Δx. Скачки на величину $\{k\Delta x\}$ відбуваються в моменти часу, кратні $\Delta\tau$ з "імовірностями"p_k. При цьому зміст мають тільки значення x і τ, відповідно кратні Δx і $\Delta\tau$, але в границі, коли Δx і $\Delta\tau \to 0$, стають можливими всі зміщення і всі моменти часу.

Нехай у формулах (9) $x = k\Delta x$, $\tau = n\Delta\tau$. Розв'язуючи задачу (9), (10) послідовно, покладаючи $n = 0, 1, 2, \ldots$, одержуємо

$$\begin{array}{rcl} u_\Delta(k\Delta x, \Delta\tau) & = & \frac{P_k}{\Delta x}, \\ u_\Delta(k\Delta x, 2\Delta\tau) & = & \frac{P_2(k)}{\Delta x}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ u_\Delta(k\Delta x, n\Delta\tau) & = & \frac{P_n(k)}{\Delta x}. \end{array} \tag{12}$$

Отже, задача (8), (9) генерує випадкову величину, задану на гратці $\{k\Delta x\}$ і яка має квазіймовірнісний розподіл $\{p_k\}$.

Перетворення Фур'є-Стільтьєса цього розподілу –

$$w(t) = \sum_k \exp\{itk\Delta x\} p_k = 1 - \gamma b 2^{2q+1}\left[\left(\sin\frac{t\Delta x}{2}\right)^{2q+2} + i\cos\frac{t\Delta x}{2}\left(\sin\frac{t\Delta x}{2}\right)^{2q+1}\right]. \tag{13}$$

Використовуючи маклоренівські розклади $\sin\frac{t\Delta x}{2}$ і $\cos\frac{t\Delta x}{2}$, одержимо виконання умов

$$\alpha_r = 0,\ r = \overline{1, 2q};\ \alpha_{2q+1} = \gamma b \Delta x^{2q+1}(2q+1)!;\ \alpha_{2q+2} = \frac{(2q+2)!}{2}\gamma b x^{2q+2},$$

тобто умов 1), 2) і 3) теореми.

Використовуючи саме представлення (13), одержимо

$$|w(t)|^2 = 1 - \gamma b 2^{2q+2}\left(\sin\frac{t\Delta x}{2}\right)^{2q+2} + \gamma^2 b^2 2^{4q+8}\sin\left(\frac{t\Delta x}{2}\right)^{4q+2}.$$

Далі, враховуючи рівносильність співвідношень

$$w(t)| < 1,\ |w(t)|^2 < 1,$$

для $|t| \in \left(0, \frac{\pi}{h}\right]$, необхідною і достатньою умовою виконання 4) є нерівність

$$0 < \gamma < \frac{1}{b 2^{2q}}. \tag{14}$$

Тоді, за локальною теоремою (формула (5))

$$\frac{P_n(k)}{\Delta x} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{isk\Delta x + ibs^{2q+1}n\Delta\tau\right\} dt == 0\left(n^{-\frac{1}{2q+1}}\right),\ n\to\infty;$$

або

$$u_\Delta(k\Delta x, n\Delta\tau) - u(k\Delta x, n\Delta\tau) = 0\left(n^{-\frac{1}{2q+1}}\right),\ n\to\infty,$$

що доводить збіжність запропонованої різницевої схеми при умові (14). Одним з позитивів наближення розв'язку згортками є відносно легка реалізація алгоритму (12) на ЕОМ. Зауважимо, що використовуючи дану теорему та деякі інші міркування, описані в [6], для рівняння типу Ейрі (4) можна наближено розв'язати і задачу Коші з фінітною неперервною початковою функцією, а також крайові задачі на відрізку та півосі.

1. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988. – 447 с.
2. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. – М.: ИИЛ, 1957. – 243 с.
3. *Орбан Ю. М., Студнев Ю. П.* Функции типа Эйри и Френеля в качестве предельных законов для свёрток функций ограниченной вариации // УМЖ. – 1973. – Вып. 3. – С. 323–331.
4. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций: В 2-х томах. – М.: Наука, 1968. – Том 2. – 628 с.
5. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. Обобщённые функции. – М.: ГИТТЛ, 1958. – Вып. 3. – 274 с.
6. *Петенько В. О.* Про один різницевий розв'язок задачі теплопровідності на відрізку та півосі // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1994. – Вип. 1. – С. 101–105.

Одержано 23.04.2012