УДК 519.622

Л. І. Фундак, Г. Г. Цегелик (Львівський нац. ун-т імені Івана Франка)

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ТИПУ ТРАПЕЦІЙ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

The constructing of numerical method of trapezium type of solving the Cauchy problem for one class of ordinary differential equation of the second order is considered. Iterative process convergence for searching approximate values of solution is proved.

Побудовано інтерполяційний чисельний метод типу трапецій розв'язування задачі Коші для одного класу звичайних диференціальних рівнянь другого порядку та ітераційний процес для відшукання наближених значень розв'язку. Доведено збіжність ітераційного процесу.

1. Вступ. У статті розглядається побудова чисельного методу типу трапецій розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, права частина яких не залежить від похідної шуканої функції. Перші спроби побудови спеціальних методів для таких рівнянь належать Штермеру (1907), Кауеллу і Кроммеліну (1910), Нумерову (1924).

Для побудови інтерполяційного чисельного методу типу трапецій використано апроксимацію функції інтерполяційним многочленом Лагранжа першого степеня. Побудований ітераційний процес для відшукання наближених значень розв'язку і доведено його збіжність.

2. Формулювання задачі. Розглянемо задачу Коші

$$y'' = f(x, y), \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \tag{2}$$

Нехай в області G, яка містить прямокутник $R = \{x_0 \le x \le x_0 + a,\ |y - y_0| \le b\}$, функція $f(x,\, y)$ є неперервною і задовольняє умову Ліпшиця по y, тобто існує така стала L, що для довільних точок $(x,\, y_1)$, $(x,\, y_2)$ області G виконується нерівність

$$|\, f(x,\, y_1) - f(x,\, y_2)\,| \le L\,|\, y_1 - y_2\,|\,.$$

Припустимо, що розв'язок задачі (1), (2) треба знайти на проміжку $[x_0,\, x_0 + a]$, де $a > 0$. У цьому випадку задача (1), (2) має єдиний розв'язок на проміжку $[x_0,\, x_0 + a]$. Шукатимемо розв'язок задачі $y = y(x)$ наближено в точках $x_1,\, x_2, ...,\, x_n$ проміжка $[x_0,\, x_0 + a]$, де $x_k = x_0 + kh$ $(k = 0,\, 1, ..., n)$; $h = a/n$.

3. Побудова методу. Представимо розв'язок $y = y(x)$ в околі точки $x = x_k$ у вигляді формули Тейлора із залишковим членом в інтегральній формі. Одержимо

$$y(x) = y(x_k) + y'(x_k)(x - x_k) + \int_{x_k}^{x} y''(u)\,(x - u)\,\mathrm{d}u.$$

При $x = x_{k-1}$ та $x = x_{k+1}$, відповідно, матимемо

$$y(x_{k-1}) = y(x_k) - h\,y'(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k-1}} y''(x)\,(x_{k-1} - x)\,\mathrm{d}x,$$

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h\, y'(x_k) + \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} y''(x)\,(x_{k+1} - x)\,\mathrm{d}x.$$

Якщо додати обидві рівності, то

$$y(x_{k+1}) = 2y(x_k) - y(x_{k-1}) +$$
$$+ \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f\,(x,\, y(x))\,(x_{k+1} - x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f\,(x,\, y(x))\,(x - x_{k-1})\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Замінимо у першому інтегралі функцію $f(x,\, y(x))$ інтерполяційним многочленом Лагранжа першого степеня $L_1(x)$, побудованим за значеннями функції $f(x,\, y(x))$ у точках x_k та x_{k+1},
де

$$L_1(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} f\,(x_k, y(x_k)) + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} f\,(x_{k+1}, y(x_{k+1}))\,.$$

Одержимо

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f\,(x,\, y(x))\,(x_{k+1} - x)\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} L_1(x)\,(x_{k+1} - x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{h} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - x)^2 f\,(x_k,\, y(x_k))\,\mathrm{d}x + \frac{1}{h} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)\,(x_{k+1} - x)\, f\,(x_{k+1},\, y(x_{k+1}))\,\mathrm{d}x.$$

Виконавши обчислення, матимемо

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f\,(x,\, y(x))\,(x_{k+1} - x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h^2}{3} f\,(x_k,\, y(x_k)) + \frac{h^2}{6} f\,(x_{k+1},\, y(x_{k+1}))\,. \tag{4}$$

Замінимо у другому інтегралі формули (3) функцію $f(x,\, y(x))$ інтерполяційним многочленом Лагранжа першого степеня $\tilde{L}_1(x)$, побудованим за значеннями функції $f(x,\, y(x))$ у точках x_{k-1} та x_k,
де

$$\tilde{L}_1(x) = \frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k} f\,(x_{k-1}, y(x_{k-1})) + \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} f\,(x_k, y(x_k))\,.$$

Одержимо

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f\,(x,\, y(x))\,(x - x_{k-1})\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \tilde{L}_1(x)\,(x - x_{k-1})\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{h} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - x)\,(x - x_{k-1}) f\,(x_{k-1},\, y(x_{k-1}))\,\mathrm{d}x + \frac{1}{h} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1})^2\, f\,(x_k,\, y(x_k))\,\mathrm{d}x.$$

Виконавши обчислення, матимемо

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f\left(x,\, y(x)\right)(x - x_{k-1})\,\mathrm{d}x \approx \frac{h^2}{6}\, f\left(x_{k-1},\, y(x_{k-1})\right) + \frac{h^2}{3}\, f\left(x_k,\, y(x_k)\right). \qquad (5)$$

Якщо підставити (4) і (5) у формулу (3), то дістанемо

$$y(x_{k+1}) = 2y(x_k) - y(x_{k-1}) +$$

$$+\frac{h^2}{6}\left(f\left(x_{k-1},\, y(x_{k-1})\right) + 4\, f\left(x_k,\, y(x_k)\right) + f\left(x_{k+1},\, y(x_{k+1})\right)\right).$$

Тоді для обчислення наближеного значення y_{k+1} розв'язку $y = y(x)$ задачі (1), (2) в точці $x = x_{k+1}$ дістаємо таку формулу

$$y_{k+1} = 2y_k - y_{k-1} + \frac{h^2}{6}\left(f\left(x_{k-1},\, y_{k-1}\right) + 4\, f\left(x_k,\, y_k\right) + f\left(x_{k+1},\, y_{k+1}\right)\right), \qquad (6)$$

де $k = 1,\, 2, ...,\, n - 1$.

Слід зазначити, що для роботи методу треба мати наближене значення y_1 розв'язку $y = y(x)$ в точці x_1. Його можна знайти, використовуючи інший метод.

4. Побудова ітераційного процесу та його збіжність. Формула (6) є фактично рівнянням для знаходження y_{k+1}. Тому для обчислення y_{k+1} утворимо ітераційний процес

$$y_{k+1}^{(i+1)} = 2y_k - y_{k-1} + \frac{h^2}{6}\left(f\left(x_{k-1},\, y_{k-1}\right) + 4\, f\left(x_k,\, y_k\right) + f\left(x_{k+1},\, y_{k+1}^{(i)}\right)\right), \qquad (7)$$

де $k = 1,\, 2, ...,\, n - 1$; $i = 0,\, 1, ...$; $y_{k+1}^{(0)}$ – вибране нульове наближення.

Знайдемо, за якої умови цей ітераційний процес збігається.

Розглянемо

$$\left|y_{k+1}^{(i+1)} - y_{k+1}\right| = \frac{h^2}{6}\,\left|\, f\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{(i)}\right) - f\left(x_{k+1}, y_{k+1}\right)\right|.$$

Використавши умову Ліпшиця, одержимо

$$\left|y_{k+1}^{(i+1)} - y_{k+1}\right| \le L\,\frac{h^2}{6}\,\left|\, y_{k+1}^{(i)} - y_{k+1}\right|.$$

Звідси

$$\left|y_{k+1}^{(i+1)} - y_{k+1}\right| \le L\,\frac{h^2}{6}\,\left|\, y_{k+1}^{(i)} - y_{k+1}\right| \le ... \le \left(\frac{Lh^2}{6}\right)^{i+1}\left|\, y_{k+1}^{(0)} - y_{k+1}\right|.$$

Це означає, що $\left|\, y_{k+1}^{(i+1)} - y_{k+1}\right| \to 0$ при зростанні i, якщо $\dfrac{Lh^2}{6} < 1$. Тобто, при виконанні умови $h < \sqrt{\dfrac{6}{L}}$ ітераційний процес (7) збігається.

5. Приклад. Знайти чисельний розв'язок задачі Коші

$$y'' = \frac{1}{y^3}; \quad y(-1) = 1; \quad y'(-1) = 0$$

на проміжку $[-1;\, 0]$ з кроком $h = 0,1$. Точний розв'язок задачі $y^* = \sqrt{x^2 + 2\,x + 2}$. Для знаходження наближеного значення y_1 використаємо метод Рунге-Кутта четвертого порядку [1].

Результати розв'язування задачі порівняємо з методом Нумерова [2] четвертого порядоку точності:

$$y_{k+1} = 2y_k - y_{k-1} + \frac{h^2}{12}\left(f\left(x_{k-1},\, y_{k-1}\right) + 10\, f\left(x_k,\, y_k\right) + f\left(x_{k+1},\, y_{k+1}\right)\right),$$

де k=1, 2,..., n-1.

Результати чисельного розв'язування задачі побудованим вище методом, методом Нумерова, а також значення точного розв'язку наведені в таблиці 1.

Таблиця 1.

Порівняльна характеристика методів

x_i	Метод типу трапецій (6)	Метод Нумерова	Точний розв'язок y_i^*
-1	1	1	1
-0,9	1,0049876	1,0049876	1,0049876
-0,8	1,0197812	1,0198041	1,0198039
-0,7	1,0439679	1,0440310	1,0440307
-0,6	1,0769199	1,0770336	1,077033
-0,5	1,1178676	1,1180347	1,118034
-0,4	1,1659736	1,1661912	1,1661904
-0,3	1,2203953	1,2206563	1,2206556
-0,2	1,2803304	1,2806255	1,2806248
-0,1	1,3450439	1,3453629	1,3453624
0	1,4138808	1,4142139	1,4142136

6. Висновки. Розглянуто чисельний метод типу трапецій розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, права частина яких не залежить від похідної шуканої функції. Побудований ітераційний процес для відшукання наближених значень розв'язку і доведено його збіжність.

1. *Цегелик Г. Г.* Чисельні методи: підручник. – Львів, 2004. – 408 с.
2. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 512 с.

Одержано 19.04.2011