

УДК 517.9

С.М. Чуйко, О.В. Старкова (Славянский государственный педагогический университет)

ДВУХШАГОВАЯ ИТЕРАЦИОННАЯ ТЕХНИКА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИЙ МАТЬЕ

A two-sweep iteration procedure was proposed, built according to the least-squares method scheme, which determines progressive approximations to the periodic solution of Mathieu's equation and his own function, considerably superior according to the accuracy earlier well-known results.

Предложена двухшаговая итерационная техника, построенная по схеме метода наименьших квадратов, определяющая последовательные приближения к периодическим решениям уравнения Матье и его собственным функциям, значительно превосходящие по точности ранее известные результаты.

Предложена итерационная схема, определяющая последовательные приближения к функциям Матье, которые являются 2π -периодическими решениями $y(t, \varepsilon) : y(\cdot, \varepsilon) \in C^1[0, 2\pi]$, $y(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$ уравнения Матье [3, 5, 8, 10]

$$y'' + \left(h(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right) \cdot y = 0 \quad (1)$$

и его собственным функциям $h(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0]$, $h(0) = k^2$, $k \in \mathbb{N}$. Решения 2π -периодической задачи для уравнения (1) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи

$$y_0'' + k^2 y_0 = 0, \quad y_0(0) - y_0(2\pi) = 0, \quad y_0'(0) - y_0'(2\pi) = 0. \quad (2)$$

Следуя предложенной в монографии [3] схеме построения 2π -периодического решения уравнения (1), начиная с третьей итерации приходим к появлению в приближениях к решению секулярных членов вида $t \sin \nu t$, $t \cos \nu t$, $\nu \in \mathbb{N}$. Традиционная [6, 10] схема построения функций Матье предполагает одновременное нахождение приближений к его собственным функциям. Нами предложена двухшаговая итерационная техника, построенная по схеме метода наименьших квадратов [11], при фиксированном $k \in \mathbb{N}$ определяющая последовательные приближения к функции $h(\varepsilon)$ и соответствующей функции Матье. Для нахождения начального приближения $h_0(\varepsilon)$ к неизвестной функции $h(\varepsilon)$ зафиксируем одно из решений $y_0(t, k) = \cos kt$, либо $y_0(t, k) = \sin kt$, $k \in \mathbb{N}$ порождающей задачи (2). Из условия разрешимости

$$\int_0^{2\pi} y_0(t, k) \left\{ k^2 - \left[h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] \right\} y_0(t, k) dt = 0$$

2π -периодической задачи для нулевого приближения к уравнению (1)

$$y_0''(t, k) + \left(h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right) \cdot y_0(t, k) = 0$$

находим для $y_0(t, k) = \cos kt, \quad k \in \mathbb{N}$

$$h_0(\varepsilon) = \begin{cases} 1 - \frac{\varepsilon}{2}, & k = 1, \\ k^2, & k > 1. \end{cases}$$

Аналогично при $y_0(t, k) = \sin kt, \quad k \in \mathbb{N}$

$$h_0(\varepsilon) = \begin{cases} 1 + \frac{\varepsilon}{2}, & k = 1, \\ k^2, & k > 1. \end{cases}$$

Пусть $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \dots$ – система линейно-независимых 2π – периодических дважды непрерывно-дифференцируемых скалярных функций. Обозначим $(1 \times k_1)$ – матрицы

$$\varphi_1(t) = \left[\varphi_1(t) \quad \varphi_2(t) \quad \dots \quad \varphi_{k_1}(t) \right], \quad \Phi_0(t, \varepsilon) = \left\{ \varphi_1''(t) + \left[h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] \varphi_1(t) \right\}.$$

Первое приближение $y_1(t, \varepsilon)$ к периодическому решению уравнения (1) ищем, как 2π – периодическое решение уравнения

$$\frac{d^2 y_1(t, \varepsilon)}{dt^2} + \left[h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] y_1(t, \varepsilon) = 0. \quad (3)$$

Приближенное решение уравнения (3) ищем в виде

$$y_1(t, \varepsilon) = y_0(t, k) + \xi_1(t, \varepsilon), \quad \xi_1(t, \varepsilon) = \varphi_1(t)c_1(\varepsilon);$$

потребуем

$$F(c_1(\varepsilon)) = \left\| \varphi_1''(t)c_1(\varepsilon) + \left[h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] \varphi_1(t)c_1(\varepsilon) + y_0''(t, k) + \left[h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] y_0(t, k) \right\|_{L^2[0, 2\pi]}^2 \rightarrow \min.$$

Для фиксированной матрицы $\varphi_1(t)$ максимум функции $F(c_1(\varepsilon))$ существует, поскольку непрерывная неотрицательная функция достигает минимума. Необходимое условие минимизации функции $F(c_1(\varepsilon))$ приводит к уравнению

$$\Gamma_0\left(\varphi_1(\cdot), \varepsilon\right) \cdot c_1(\varepsilon) = - \int_0^{2\pi} \Phi_0^*(t, \varepsilon) \left\{ y_0''(t, k) + \left[h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] y_0(t, k) \right\} dt,$$

однозначно разрешимому относительно вектора $c_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k_1}$ при условии невырожденности $(k_1 \times k_1)$ – матрицы Грама [2]

$$\Gamma_0\left(\varphi_1(\cdot), \varepsilon\right) = \int_0^{2\pi} \Phi_0^*(t, \varepsilon) \cdot \Phi_0(t, \varepsilon) dt.$$

Таким образом, при условии $\det \Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon) \neq 0$ находим вектор

$$c_1(\varepsilon) = - \left[\Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon) \right]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \Phi_0^*(t, \varepsilon) \left\{ y_0''(t, k) + \left[h_0(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] y_0(t, k) \right\} dt,$$

определяющий первое приближение $y_1(t, \varepsilon) = y_0(t, k) + \varphi_1(t) \cdot c_1(\varepsilon)$ к 2π - периодическому решению уравнения (1). Следующее приближение к уравнению (1) определим, как

$$\frac{d^2 y_1(t, \varepsilon)}{dt^2} + \left[h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] y_1(t, \varepsilon) = 0. \quad (4)$$

Для нахождения первого приближения $h_1(\varepsilon)$ к неизвестной функции $h(\varepsilon)$ используем условие разрешимости 2π - периодической задачи для уравнения (4)

$$\int_0^{2\pi} y_0(t, k) \left\{ k^2 - \left[h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] \right\} y_1(t, \varepsilon) dt = 0.$$

Обозначим

$$\Omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon) = \int_0^{2\pi} y_0(t, k) \cdot y_1(t, \varepsilon) dt,$$

$$\omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon) = \int_0^{2\pi} y_0(t, k) \left[k^2 - \varepsilon \cos 2t \right] y_1(t, \varepsilon) dt.$$

При условии $\Omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon) \neq 0$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ находим первое приближение

$$h_1(\varepsilon) = \frac{\omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon)}{\Omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon)}$$

к собственной функции $h(\varepsilon)$ уравнения Матье, соответствующее первому приближению $y_1(t, \varepsilon)$ к 2π - периодическому решению уравнения (1). Обозначим $(1 \times k_2)$ - матрицы

$$\varphi_2(t) = \left[\varphi_1(t) \quad \varphi_2(t) \quad \dots \quad \varphi_{k_2}(t) \right], \quad \Phi_1(t, \varepsilon) = \left\{ \varphi_2''(t) + \left[h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] \varphi_2(t) \right\}.$$

Второе приближение

$$y_2(t, \varepsilon) = y_0(t, k) + \xi_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon), \quad \xi_2(t, \varepsilon) = \varphi_2(t) \cdot c_2(\varepsilon), \quad c_2(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k_2}$$

к периодическому решению уравнения (1) ищем, как 2π - периодическое решение уравнения

$$\frac{d^2 y_2(t, \varepsilon)}{dt^2} + \left[h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] y_2(t, \varepsilon) = 0.$$

Необходимое условие минимизации функции

$$F(c_2(\varepsilon)) := \int_0^{2\pi} \left\{ \varphi_2''(t) c_2(\varepsilon) + \left[h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] \varphi_2(t) c_2(\varepsilon) + \right.$$

$$+y_1''(t, \varepsilon) + \left[h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] y_1(t, \varepsilon) \Big\}^2 dt$$

приводит к уравнению

$$\Gamma_1(\varphi_2(\cdot), \varepsilon) \cdot c_2(\varepsilon) = - \int_0^{2\pi} \Phi_1^*(t, \varepsilon) \left\{ y_1''(t, \varepsilon) + \left[h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] y_1(t, \varepsilon) \right\} dt,$$

однозначно разрешимому относительно вектора $c_2(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k_2}$ при условии невырожденности $(k_2 \times k_2)$ - матрицы Грама [2]

$$\Gamma_1(\varphi_2(\cdot), \varepsilon) = \int_0^{2\pi} \Phi_1^*(t, \varepsilon) \cdot \Phi_1(t, \varepsilon) dt.$$

Таким образом, при условии $\det \Gamma_1(\varphi_2(\cdot), \varepsilon) \neq 0$ находим вектор

$$c_2(\varepsilon) = - \left[\Gamma_1(\varphi_2(\cdot), \varepsilon) \right]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \Phi_1^*(t, \varepsilon) \left\{ y_1''(t, \varepsilon) + \left[h_1(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] y_1(t, \varepsilon) \right\} dt,$$

определяющий второе приближение $y_2(t, \varepsilon)$ к 2π - периодическому решению уравнения (1). Следующее приближение к уравнению (1) определим, как

$$\frac{d^2 y_2(t, \varepsilon)}{dt^2} + \left[h_2(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] y_2(t, \varepsilon) = 0. \tag{5}$$

Для нахождения второго приближения $h_2(\varepsilon)$ к неизвестной функции $h(\varepsilon)$ используем условие разрешимости 2π - периодической задачи для уравнения (5)

$$\int_0^{2\pi} y_0(t, k) \left\{ k^2 - \left[h_2(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] \right\} y_2(t, \varepsilon) dt = 0.$$

Обозначим

$$\Omega(y_2(t, \varepsilon), \varepsilon) = \int_0^{2\pi} y_0(t, k) \cdot y_2(t, \varepsilon) dt,$$

$$\omega(y_2(t, \varepsilon), \varepsilon) = \int_0^{2\pi} y_0(t, k) \left[k^2 - \varepsilon \cos 2t \right] y_2(t, \varepsilon) dt.$$

При условии $\Omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon) \neq 0$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ находим второе приближение

$$h_2(\varepsilon) = \frac{\omega(y_2(t, \varepsilon), \varepsilon)}{\Omega(y_2(t, \varepsilon), \varepsilon)}$$

к собственной функции $h(\varepsilon)$ уравнения Матье, соответствующее второму приближению $y_2(t, \varepsilon)$ к 2π - периодическому решению уравнения (1). Продолжая рассуждения, при условии

$$\det \Gamma_j(\varphi_{j+1}(\cdot), \varepsilon) \neq 0, \quad \Omega(y_{j+1}(t, \varepsilon), \varepsilon) \neq 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

приходим к следующей итерационной процедуре

$$y_{j+1}(t, \varepsilon) = y_0(t, k) + \xi_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon) + \dots + \xi_{j+1}(t, \varepsilon), \quad (6)$$

$$\xi_{j+1}(t, \varepsilon) = \varphi_{j+1}(t) \cdot c_{j+1}(\varepsilon), \quad h_{j+1}(\varepsilon) = \frac{\omega(y_{j+1}(t, \varepsilon), \varepsilon)}{\Omega(y_{j+1}(t, \varepsilon), \varepsilon)},$$

$$c_{j+1}(\varepsilon) = - \left[\Gamma_j \left(\varphi_{j+1}(\cdot), \varepsilon \right) \right]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \Phi_j^*(t, \varepsilon) \left\{ y_j''(t) + \left[h_j(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] y_j(t) \right\} dt, \quad \dots, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь

$$\Gamma_j \left(\varphi_{j+1}(\cdot), \varepsilon \right) = \int_0^{2\pi} \Phi_j^*(t, \varepsilon) \cdot \Phi_j(t, \varepsilon) dt$$

— $(k_j \times k_j)$ — матрица Грама,

$$\Phi_j(t, \varepsilon) = \left\{ \varphi_{j+1}''(t) + \left[h_j(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right] \varphi_{j+1}(t) \right\}$$

— $(1 \times k_j)$ — матрица,

$$\Omega(y_{j+1}(t, \varepsilon), \varepsilon) = \int_0^{2\pi} y_0(t, k) \cdot y_{j+1}(t, \varepsilon) dt,$$

$$\omega(y_{j+1}(t, \varepsilon), \varepsilon) = \int_0^{2\pi} y_0(t, k) \left[k^2 - \varepsilon \cos 2t \right] y_{j+1}(t, \varepsilon) dt.$$

Итерационная процедура (6) задает последовательность отображений

$$\left(y_j(t, \varepsilon), h_j(\varepsilon) \right) \rightarrow \left(y_{j+1}(t, \varepsilon), h_j(\varepsilon) \right), \quad \left(y_{j+1}(t, \varepsilon), h_j(\varepsilon) \right) \rightarrow \left(y_{j+1}(t, \varepsilon), h_{j+1}(\varepsilon) \right),$$

определяемую оператором

$$\Psi \left(y_j(t, \varepsilon), h_j(\varepsilon) \right) = \left(y_{j+1}(t, \varepsilon), h_{j+1}(\varepsilon) \right), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Если оператор $\Psi \left(y_j(t, \varepsilon), h_j(\varepsilon) \right)$ является сжимающим, итерационная процедура (6) сходится к искомому 2π — периодическому решению $y(t, \varepsilon)$ уравнения (1), при этом скорость сходимости определяется выбором матрицы $\varphi(t)$, значением k и величиной малого параметра.

Пример. В качестве иллюстрации эффективности итерационной процедуры (6) найдем приближения к функции Матье $se_1(t, h(\varepsilon))$ и его собственной функции $h(\varepsilon)$, которые соответствуют порождающему решению $y_0(t) = \cos t$ для $k = 1$, при этом $h_0(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Зафиксируем вектор-строку

$$\varphi_1(t) = \left[\cos 3t \quad \cos 5t \quad \cos 7t \right].$$

Матрица Грама $\Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon)$, соответствующая решению $y_0(t, 1) = \cos t$ порождающей задачи (2), при этом невырождена

$$\det \Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon) = \pi^3 \left(84\,934\,656 + 15\,925\,248 \varepsilon + 1\,198\,080 \varepsilon^2 + 30\,336 \varepsilon^3 + \right. \\ \left. + 392 \varepsilon^4 + 3,5 \varepsilon^5 + 0,125 \varepsilon^6 + \dots \right) \neq 0.$$

Первое приближение к 2π - периодическому решению уравнения (1)

$$y_1(t, \varepsilon) = \cos t + \frac{1}{16} \varepsilon \cos 3t + \frac{1}{768} \varepsilon^2 \left(-3 \cos 3t + \cos 5t \right) + \\ + \frac{1}{73\,728} \varepsilon^3 \left(6 \cos 3t - 8 \cos 5t + \cos 7t \right) + \frac{1}{2\,359\,296} \varepsilon^4 \left(44 \cos 3t + 6 \cos 5t - 3 \cos 7t \right) + \\ + \frac{1}{339\,738\,624} \varepsilon^5 \left(-1\,206 \cos 3t + 189 \cos 5t - 10 \cos 7t \right) + \\ + \frac{1}{32\,614\,907\,904} \varepsilon^6 \left(12\,690 \cos 3t - 3\,528 \cos 5t + 229 \cos 7t \right) + \\ + \frac{1}{1\,565\,515\,579\,392} \varepsilon^7 \left(-46\,728 \cos 3t + 18\,745 \cos 5t - 2\,098 \cos 7t \right).$$

определяет первое приближение к неизвестной функции $h(\varepsilon)$ вида

$$h_1(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32} + \frac{\varepsilon^3}{512} + \frac{\varepsilon^4}{24\,576} - \frac{11 \varepsilon^5}{1\,179\,648} + \frac{67 \varepsilon^6}{37\,748\,736};$$

здесь $\Omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon) = \pi$. Зафиксируем матрицу

$$\varphi_2(t) = \left[\cos 3t \quad \cos 5t \quad \cos 7t \quad \cos 9t \quad \cos 11t \quad \cos 13t \quad \cos 15t \quad \cos 17t \quad \cos 19t \quad \cos 21t \right].$$

Второе приближение $y_2(t, \varepsilon) = y_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon)$ к 2π - периодическому решению уравнения (1) определяет функция

$$y_2(t, \varepsilon) = \cos t + \frac{1}{16} \varepsilon \cos 3t + \frac{1}{768} \varepsilon^2 \left(-3 \cos 3t + \cos 5t \right) + \\ + \frac{1}{73\,728} \varepsilon^3 \left(6 \cos 3t - 8 \cos 5t + \cos 7t \right) + \frac{1}{11\,796\,480} \varepsilon^4 \left(220 \cos 3t + \right. \\ \left. + 30 \cos 5t - 15 \cos 7t + \cos 9t \right) + \frac{1}{2\,831\,155\,200} \varepsilon^5 \left(-7\,350 \cos 3t + 1\,575 \cos 5t + \right. \\ \left. + 90 \cos 7t - 24 \cos 9t + \cos 11t \right) + \frac{1}{951\,268\,147\,200} \varepsilon^6 \left(86\,625 \cos 3t - 75\,495 \cos 5t + \right. \\ \left. + 6\,426 \cos 7t + 210 \cos 9t - 35 \cos 11t + \cos 13t \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{426\,168\,129\,945\,600} \varepsilon^7 \left(7\,808\,640 \cos 3t + 1\,215\,396 \cos 5t - 417\,088 \cos 7t + \right. \\
& \quad \left. + 19\,600 \cos 9t + 420 \cos 11t - 48 \cos 13t + \cos 15t \right) + \\
& + \frac{1}{17\,674\,044\,685\,1039\,236\,401} \varepsilon^9 \left(23\,909\,044\,320 \cos 3t - 17\,084\,975\,040 \cos 5t + \right. \\
& \quad + 1\,215\,539\,640 \cos 7t + 43\,912\,800 \cos 9t - 5\,278\,500 \cos 11t + 110\,565 \cos 13t + \\
& \quad + 1\,260 \cos 15t - 80 \cos 17t + \cos 19t \left. \right) + \varepsilon^{11} \left(-\frac{\cos 3t}{221\,494\,310\,486} + \frac{\cos 5t}{1\,386\,042\,922\,077} + \right. \\
& \quad + \frac{\cos 7t}{18\,897\,813\,770\,212} - \frac{\cos 9t}{120\,864\,620\,611\,896} + \frac{\cos 11t}{4\,778\,357\,920\,324\,647} + \\
& \quad + \frac{\cos 13t}{287\,806\,335\,927\,056\,754} - \frac{\cos 15t}{4\,670\,267\,794\,577\,419\,066} + \\
& \quad \left. + \frac{\cos 17t}{392\,756\,548\,557\,864\,934\,965} \right) + \varepsilon^{12} \left(\frac{\cos 3t}{4\,163\,185\,355\,710} - \frac{\cos 5t}{7\,168\,129\,136\,407} + \right. \\
& \quad + \frac{\cos 7t}{112\,255\,716\,704\,568} + \frac{\cos 9t}{2\,719\,118\,682\,885\,733} - \frac{\cos 11t}{27\,185\,810\,469\,627\,548} + \\
& \quad + \frac{\cos 13t}{1\,538\,356\,519\,807\,981\,673} + \frac{\cos 15t}{124\,221\,344\,542\,507\,662\,191} \left. \right) + \\
& + \varepsilon^{13} \left(\frac{\cos 3t}{34\,826\,074\,411\,875} + \frac{\cos 5t}{133\,719\,435\,564\,370} - \frac{\cos 7t}{577\,455\,475\,386\,849} + \right. \\
& \quad + \frac{\cos 9t}{16\,303\,946\,419\,048\,722} + \frac{\cos 11t}{608\,660\,631\,734\,911\,763} - \frac{\cos 13t}{8\,726\,756\,537\,037\,151\,087} + \\
& \quad + \frac{\cos 15t}{667\,757\,870\,754\,864\,675\,146} \left. \right) + \varepsilon^{14} \left(-\frac{\cos 3t}{153\,644\,022\,587\,330} + \right. \\
& \quad + \frac{\cos 5t}{1\,133\,441\,404\,469\,142} + \frac{\cos 7t}{10\,716\,858\,169\,308\,095} - \\
& \quad - \frac{\cos 9t}{83\,548\,123\,492\,477\,362} + \frac{\cos 11t}{367\,523\,086\,865\,9653\,039} + \\
& \quad + \frac{\cos 13t}{194\,656\,335\,464\,434\,256\,497} \left. \right) + \varepsilon^{15} \left(\frac{\cos 3t}{2\,402\,102\,230\,796\,824} - \right. \\
& \quad - \frac{\cos 5t}{4\,968\,397\,697\,113\,046} + \frac{\cos 7t}{91\,677\,206\,898\,593\,050} + \\
& \quad + \frac{\cos 9t}{1\,544\,771\,237\,150\,623\,087} + \frac{\cos 11t}{18\,779\,091\,722\,693\,218\,628} \left. \right).
\end{aligned}$$

При этом $\Omega(y_2(t, \varepsilon), \varepsilon) = \pi \neq 0$,

$$\begin{aligned}
h_2(\varepsilon) = & 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32} + \frac{\varepsilon^3}{512} - \frac{\varepsilon^4}{24\,576} - \frac{11\,\varepsilon^5}{1\,179\,648} + \frac{49\,\varepsilon^6}{37\,748\,736} - \\
& - \frac{55\,\varepsilon^7}{1\,207\,959\,552} - \frac{83\,\varepsilon^8}{9\,059\,696\,640} + \frac{128\,288\,664\,\varepsilon^9}{81\,824\,280\,949\,555\,195} -
\end{aligned}$$

$$-\frac{442\ 760\ 080\ \varepsilon^{10}}{6\ 545\ 942\ 475\ 964\ 416\ 163} + \frac{\varepsilon^{12}}{442\ 988\ 620\ 972}.$$

Для проверки точности найденного второго приближения к периодическому решению уравнения Матъе и его собственной функции найдем невязки этого приближения в самом уравнении Матъе

$$\Delta_2(\varepsilon) = \left\| y_2''(t, \varepsilon) + \left(h_2(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right) \cdot y_2''(t, \varepsilon) \right\|_{C[0;2\pi]}$$

и сравним эти невязки с отклонениями

$$\Delta_r(\varepsilon) = \left\| y_r''(t, \varepsilon) + \left(h_r(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right) \cdot y_r''(t, \varepsilon) \right\|_{C[0;2\pi]},$$

$$\Delta_h(\varepsilon) = \left\| y_h''(t, \varepsilon) + \left(h_h(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right) \cdot y_h''(t, \varepsilon) \right\|_{C[0;2\pi]},$$

соответствующими функциям [5, с. 235], [10, с. 17]

$$h_h(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32} + \frac{\varepsilon^3}{512} - \frac{\varepsilon^4}{24\ 576},$$

$$h_r(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32} + \frac{\varepsilon^3}{512} - \frac{\varepsilon^4}{24\ 576} - \frac{11\ \varepsilon^4}{1\ 179\ 648}$$

и приближениям к решению уравнения Матъе

$$\begin{aligned} y_r(t, \varepsilon) = & \cos t + \frac{1}{16} \varepsilon \cos 3t + \frac{1}{768} \varepsilon^2 \left(-3 \cos 3t + \cos 5t \right) + \\ & + \frac{1}{73\ 728} \varepsilon^3 \left(6 \cos 3t - 8 \cos 5t + \cos 7t \right) + \\ & + \frac{1}{11\ 796\ 480} \varepsilon^4 \left(220 \cos 3t + 30 \cos 5t - 15 \cos 7t + \cos 9t \right), \end{aligned}$$

полученными в монографиях [5, 9, 10]. Второе приближение $y_2(t, \varepsilon)$ к периодическому решению уравнения Матъе $se_1(t, h(\varepsilon))$ и его собственной функции значительно превосходят по точности ранее известные приближения

$$\Delta_2(0, 1) \approx 2,59\ 341 \cdot 10^{-16}, \quad \Delta_h(0, 1) \approx 3,53\ 263 \cdot 10^{-10}, \quad \Delta_r(0, 1) \approx 3,14\ 899 \cdot 10^{-10};$$

$$\Delta_2(0, 5) \approx 2,78\ 286 \cdot 10^{-13}, \quad \Delta_h(0, 5) \approx 1,10\ 346 \cdot 10^{-6}, \quad \Delta_r(0, 5) \approx 9,89\ 857 \cdot 10^{-7};$$

$$\Delta_2(1, 0) \approx 2,78\ 034 \cdot 10^{-10}, \quad \Delta_h(1, 0) \approx 3,52\ 821 \cdot 10^{-5}, \quad \Delta_r(1, 0) \approx 3,18\ 803 \cdot 10^{-5}.$$

Далее найдем приближение к функции Матъе $se_1(t, h(\varepsilon))$ и его собственной функции $h(\varepsilon)$, которые соответствуют порождающему решению $y_0(t) = \sin t$ для $k = 1$, при этом $h_0(\varepsilon) = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$. Зафиксируем вектор-строку

$$\varphi_1(t) = \left[\sin 3t \quad \sin 5t \quad \sin 7t \right].$$

Матрица Грама $\Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon)$, соответствующая решению $y_0(t, k) = \sin t$ порождающей задачи (2), при этом невырождена

$$\det \Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon) = \pi^3 \left(84\,934\,656 - 15\,925\,248 \varepsilon + 1\,198\,080 \varepsilon^2 - 30\,336 \varepsilon^3 + \right. \\ \left. + 392 \varepsilon^4 - 3,5 \varepsilon^5 + 0,125 \varepsilon^6 + \dots \right) \neq 0.$$

Первое приближение к 2π - периодическому решению уравнения (1)

$$y_1(t, \varepsilon) = \sin t + \frac{1}{16} \varepsilon \sin 3t + \frac{1}{768} \varepsilon^2 \left(3 \sin 3t + \sin 5t \right) + \\ + \frac{1}{73\,728} \varepsilon^3 \left(6 \sin 3t + 8 \sin 5t + \sin 7t \right) + \frac{1}{2\,359\,296} \varepsilon^4 \left(-44 \sin 3t + 6 \sin 5t + 3 \sin 7t \right) + \\ + \frac{1}{339\,738\,624} \varepsilon^5 \left(-1\,206 \sin 3t - 189 \sin 5t + 10 \sin 7t \right) + \\ + \frac{1}{32\,614\,907\,904} \varepsilon^6 \left(-12\,690 \sin 3t - 3\,528 \sin 5t - 229 \sin 7t \right) + \\ + \frac{1}{1\,565\,515\,579\,392} \varepsilon^7 \left(-46\,728 \sin 3t - 18\,745 \sin 5t - 2\,098 \sin 7t \right).$$

определяет первое приближение к неизвестной функции $h(\varepsilon)$ вида

$$h_1(\varepsilon) = 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32} - \frac{\varepsilon^3}{512} - \frac{\varepsilon^4}{24\,576} + \frac{11 \varepsilon^5}{1\,179\,648} + \frac{67 \varepsilon^6}{37\,748\,736} + \frac{235 \varepsilon^7}{1\,207\,959\,552};$$

здесь $\Omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon) = \pi$. Зафиксируем матрицу

$$\varphi_2(t) = \left[\sin 3t \quad \sin 5t \quad \sin 7t \quad \sin 9t \quad \sin 11t \quad \sin 13t \quad \sin 15t \quad \sin 17t \quad \sin 19t \quad \sin 21t \right].$$

Второе приближение $y_2(t, \varepsilon) = y_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon)$ к 2π - периодическому решению уравнения (1) определяет функция

$$y_2(t, \varepsilon) = \sin t + \frac{1}{16} \varepsilon \sin 3t + \frac{1}{768} \varepsilon^2 \left(3 \sin 3t + \sin 5t \right) + \\ + \frac{1}{73\,728} \varepsilon^3 \left(6 \sin 3t + 8 \sin 5t + \sin 7t \right) + \frac{1}{11\,796\,480} \varepsilon^4 \left(-220 \sin 3t + \right. \\ \left. + 30 \sin 5t + 15 \sin 7t + \sin 9t \right) + \frac{1}{2\,831\,155\,200} \varepsilon^5 \left(-7\,350 \sin 3t - 1\,575 \sin 5t + \right. \\ \left. + 90 \sin 7t + 24 \sin 9t + \sin 11t \right) + \frac{1}{951\,268\,147\,200} \varepsilon^6 \left(-86\,625 \sin 3t - 75\,495 \sin 5t - \right. \\ \left. - 6\,426 \sin 7t + 210 \sin 9t + 35 \sin 11t + \sin 13t \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{426\,168\,129\,945\,599} \varepsilon^7 \left(7\,808\,640 \sin 3t - 1\,215\,396 \sin 5t - 417\,088 \sin 7t - \right. \\
 & \quad \left. - 19\,600 \sin 9t + 420 \sin 11t + 48 \sin 13t + \sin 15t \right) + \\
 & + \frac{1}{81\,824\,280\,949\,555\,195} \varepsilon^8 \left(256\,577\,328 \sin 3t + 45\,723\,664 \sin 5t - 2\,922\,752 \sin 7t - \right. \\
 & \quad \left. - 551\,040 \sin 9t - 16\,560 \sin 11t + 252 \sin 13t + 21 \sin 15t \right) + \\
 & + \frac{1}{192\,450\,708\,793\,353\,820\,407} \varepsilon^9 \left(26\,345\,462\,304 \sin 3t + 18\,603\,639\,488 \sin 5t + \right. \\
 & \quad + 1\,323\,587\,608 \sin 7t - 47\,816\,160 \sin 9t - 5\,747\,700 \sin 11t - 120\,393 \sin 13t + \\
 & \quad \left. + 1\,368 \sin 15t \right) + \varepsilon^{11} \left(-\frac{\sin 3t}{214\,989\,035\,628} - \frac{\sin 5t}{1\,361\,614\,710\,949} + \frac{\sin 7t}{18\,687\,840\,891\,109} + \right. \\
 & \quad + \frac{\sin 9t}{120\,864\,620\,611\,896} + \frac{\sin 11t}{4\,778\,357\,936\,802\,680} - \frac{\sin 13t}{287\,805\,286\,716\,556\,383} + \\
 & \quad \left. + \frac{\sin 15t}{4\,668\,789\,321\,617\,042\,696} \right) + \varepsilon^{12} \left(-\frac{\sin 3t}{4\,257\,026\,768\,778} - \frac{\sin 5t}{6\,958\,775\,948\,805} - \right. \\
 & \quad - \frac{\sin 7t}{11\,0318\,181\,324\,043} + \frac{\sin 9t}{2\,689\,378\,806\,293\,442} + \frac{\sin 11t}{27\,185\,810\,534\,608\,284} + \\
 & \quad \left. + \frac{\sin 13t}{1\,538\,357\,407\,774\,944\,487} - \frac{\sin 15t}{124\,428\,038\,411\,659\,803\,874} \right) + \\
 & + \varepsilon^{13} \left(\frac{\sin 3t}{29\,341\,783\,122\,818} - \frac{\sin 5t}{136\,370\,563\,430\,900} - \frac{\sin 7t}{560\,650\,728\,450\,561} - \right. \\
 & \quad - \frac{\sin 9t}{16\,026\,343\,102\,716\,968} + \frac{\sin 11t}{602\,078\,785\,284\,169\,998} + \frac{\sin 13t}{8\,726\,751\,035\,739\,910\,022} \\
 & \quad \left. - \frac{\sin 15t}{666\,860\,317\,684\,142\,057\,790} \right) + \varepsilon^{14} \left(\frac{\sin 3t}{138\,003\,850\,482\,347} - \right. \\
 & \quad - \frac{\sin 5t}{955\,466\,147\,098\,902} - \frac{\sin 7t}{10\,912\,296\,234\,493\,995} - \frac{\sin 9t}{81\,122\,800\,588\,097\,448} \\
 & \quad \left. - \frac{\sin 11t}{3\,613\,247\,413\,839\,029\,442} + \frac{\sin 13t}{192\,568\,995\,246\,041\,079\,400} \right).
 \end{aligned}$$

При этом $\Omega(y_2(t, \varepsilon), \varepsilon) = \pi \neq 0$,

$$\begin{aligned}
 h_2(\varepsilon) = & 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{32} - \frac{\varepsilon^3}{512} - \frac{\varepsilon^4}{24\,576} + \frac{11\,\varepsilon^5}{1\,179\,648} + \frac{49\,\varepsilon^6}{37\,748\,736} + \\
 & + \frac{55\,\varepsilon^7}{1\,207\,959\,552} - \frac{83\,\varepsilon^8}{9\,059\,696\,640} - \frac{76\,\varepsilon^9}{48\,473\,849\,195} - \frac{\varepsilon^{10}}{14\,609\,780\,354} + \\
 & + \frac{\varepsilon^{12}}{429\,978\,071\,256} + \frac{\varepsilon^{13}}{8\,514\,053\,537\,556} - \frac{\varepsilon^{14}}{58\,683\,566\,245\,636}.
 \end{aligned}$$

Точность второго приближения $y_2(t, \varepsilon)$ к периодическому решению уравнения Матье $se_1(t, h(\varepsilon))$ и его собственной функции характеризуют невязки

$$\Delta_2(0, 1) \approx 1, 50\,704 \cdot 10^{-16}, \quad \Delta_2(0, 5) \approx 4, 04\,218 \cdot 10^{-16}, \quad \Delta_2(1, 0) \approx 2, 57\,572 \cdot 10^{-14}.$$

Найдем приближения к функции Матье $se_3(t, h(\varepsilon))$ и его собственной функции $h(\varepsilon)$, которые соответствуют порождающему решению $y_0(t, 3) = \cos 3t$ для $k = 3$, при этом $h_0(\varepsilon) = 9$. Зафиксируем вектор-строку

$$\varphi_1(t) = \left[\cos t \quad \cos 5t \quad \cos 7t \right].$$

Матрица Грама $\Gamma_0(\varphi_1(\cdot), \varepsilon)$, соответствующая решению $y_0(t, k) = \cos 3t$ порождающей задачи (2), при этом невырождена. Первое приближение к 2π -периодическому решению уравнения (1)

$$\begin{aligned} y_1(t, \varepsilon) = & \cos 3t + \frac{1}{32} \varepsilon \left(-2 \cos t + \cos 5t \right) + \frac{1}{2\,560} \varepsilon^2 \left(10 \cos t + \cos 7t \right) + \\ & + \varepsilon^3 \left(-\frac{1}{8\,192} \cos t + \frac{7}{163\,840} \cos 5t \right) + \frac{1}{65\,535\,999} \varepsilon^4 \left(-1\,000 \cos t - 250 \cos 5t + \right. \\ & \left. + 41 \cos 7t \right) + \frac{1}{4\,194\,303\,999} \varepsilon^5 \left(11\,300 \cos t + 437 \cos 5t - 280 \cos 7t \right) + \\ & + \frac{1}{1\,677\,721\,599\,999} \varepsilon^6 \left(-340\,000 \cos t + 25\,250 \cos 5t + 2\,731 \cos 7t \right) + \\ & + \frac{1}{107\,374\,182\,399\,999} \varepsilon^7 \left(416\,300 \cos t - 285\,233 \cos 5t + 30\,520 \cos 7t \right). \end{aligned}$$

определяет первое приближение к неизвестной функции $h(\varepsilon)$ вида

$$h_1(\varepsilon) = 9 + \frac{\varepsilon^2}{64} - \frac{\varepsilon^3}{512} + \frac{13 \varepsilon^4}{327\,680} + \frac{625 \varepsilon^5}{65\,535\,999} - \frac{11\,737 \varepsilon^6}{8\,388\,607\,998} + \frac{157\,375 \varepsilon^7}{1\,677\,721\,599\,999};$$

здесь $\Omega(y_1(t, \varepsilon), \varepsilon) = \pi$. Зафиксируем матрицу

$$\varphi_2(t) = \left[\cos t \quad \cos 5t \quad \cos 7t \quad \cos 9t \quad \cos 11t \quad \cos 13t \quad \cos 15t \quad \cos 17t \quad \cos 19t \quad \cos 21t \right].$$

Второе приближение $y_2(t, \varepsilon) = y_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon)$ к 2π -периодическому решению уравнения (1) определяет функция

$$\begin{aligned} y_2(t, \varepsilon) = & \cos 3t + \frac{1}{32} \varepsilon \left(-2 \cos t + \cos 5t \right) + \frac{1}{2\,560} \varepsilon^2 \left(10 \cos t + \cos 7t \right) + \\ & + \frac{1}{1\,474\,560} \varepsilon^3 \left(-180 \cos t + 63 \cos 5t + 4 \cos 9t \right) + \\ & + \frac{1}{165\,150\,720} \varepsilon^4 \left(-2\,520 \cos t - 630 \cos 5t + 119 \cos 7t + 2 \cos 11t \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{26\,424\,115\,200} \varepsilon^5 \left(64\,890 \cos t + 3\,745 \cos 5t - 1\,764 \cos 7t + 150 \cos 9t + \cos 13t \right) + \\
 & + \frac{1}{114\,152\,177\,664\,000} \varepsilon^6 \left(-11\,226\,600 \cos t + 867\,510 \cos 5t + 286\,686 \cos 7t - \right. \\
 & \quad \left. -61\,320 \cos 9t + 3\,105 \cos 11t + 10 \cos 15t \right) + \varepsilon^{11} \left(\frac{\cos t}{217\,250\,831\,925} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\cos 5t}{7\,926\,267\,486\,314} - \frac{\cos 7t}{27\,475\,728\,297\,925} + \frac{\cos 9t}{906\,670\,078\,875\,865} \right) + \\
 & + \varepsilon^{12} \left(-\frac{\cos t}{3\,479\,074\,425\,161} + \frac{\cos 5t}{67\,993\,663\,370\,104} + \frac{\cos 7t}{462\,632\,235\,720\,062} \right) + \\
 & + \varepsilon^{13} \left(-\frac{\cos t}{41\,231\,698\,007\,087} - \frac{\cos 5t}{275\,876\,679\,795\,012} \right) + \varepsilon^{14} \frac{\cos t}{147\,622\,725\,974\,376}.
 \end{aligned}$$

При этом $\Omega(y_2(t, \varepsilon), \varepsilon) = \pi \neq 0$,

$$\begin{aligned}
 h_2(\varepsilon) = & 9 + \frac{\varepsilon^2}{64} - \frac{\varepsilon^3}{512} + \frac{13 \varepsilon^4}{327\,680} + \frac{5 \varepsilon^5}{524\,288} - \frac{31 \varepsilon^6}{23\,869\,675} + \frac{\varepsilon^7}{22\,039\,036} \\
 & - \frac{\varepsilon^{12}}{422\,910\,132\,492} + \frac{\varepsilon^{13}}{7\,333\,380\,532\,140} + \frac{\varepsilon^{14}}{71\,741\,175\,855\,054} - \frac{\varepsilon^{15}}{295\,245\,451\,948\,752}.
 \end{aligned}$$

Точность второго приближения $y_2(t, \varepsilon)$ к периодическому решению уравнения Матье $se_3(t, h(\varepsilon))$ и его собственной функции характеризуют невязки

$$\Delta_2(0, 1) \approx 1,35\,563 \cdot 10^{-14}, \quad \Delta_2(0, 5) \approx 1,00\,277 \cdot 10^{-9}, \quad \Delta_2(1, 0) \approx 1,21\,392 \cdot 10^{-7}.$$

Следует отметить актуальность изучения различных краевых задач для уравнения Матье, свидетельством чего служат публикации [1, 4, 7], в том числе и приведенные в этих статьях обзоры литературы.

1. *Абрамов А.А., Курочкин С.В.* Вычисление решений уравнения Матье и связанных с ними величин // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2007. — Т. 47. — № 7. С. 414 — 423.
2. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. — М. Наука, 1965. — 408 с.
3. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 318 с.
4. *Гребеников Е.А., Митропольский Ю.А., Рябов Ю.А.* Введение в резонансную аналитическую механику. — М.: Янус, 1999. — 302 с.
5. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. М. Наука. 1979. 432 с.
6. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. — М.: Изд-во иностр. лит., 1961. — 778 с.
7. *Курин А.Ф.* Задача Коши для уравнения Матье при параметрическом резонансе // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2008. — Т. 48. — № 4. С. 633 — 650.
8. *Лыкова О.Б., Бойчук А.А.* Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях // Укр. мат. журнал. — 1988. — 40, № 1. — С. 62 — 69.
9. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Часть 2. Трансцендентные функции. М. ГИФМЛ, 1963. — 515 с.
10. *Хаяси Т.* Вынужденные колебания в нелинейных системах. — М.: Иностран. лит., 1957. — 204 с.
11. *Чуйко С.М.* О приближенном решении краевых задач методом наименьших квадратов // Нелінійні коливання. — 2008. — Т. 11. — № 4. — С. 554 — 573.
12. *Чуйко С.М., Бойчук И.А.* Нелинейные нетеровы краевые задачи в критическом случае // Нелінійні коливання. — 2009. — Т. 12. — № 4.

Получено 20.03.2011