УДК 517.9

Н. М. Щобак (Ужгородський нац. ун-т)

Дослідження нелінійних крайових задач типу Коші-Ніколетті за частиною змінних

We obtain some results concerning the investigation of non-linear boundary value problems with boundary conditions of Cauchy-Nicoletti type on some of variables. We show that it is useful to reduce the given boundary value problem, using an appropriate substitution, to a parametrized two-point boundary value problem containing some unknown parameters in the boundary conditions. To study the transformed parametrized problem, we use a method which is based upon special types of successive approximations constructed in an analytic form. The parametrized problem should be investigated together with certain so-called determining equations, which have algebraic or transcendental form.

Отримані результати, які стосуються дослідження нелінійних крайових задач з умовами типу Коші-Ніколетті за частиною змінних. Обґрунтовано ефективність зведення вихідної задачі, за допомогою відповідної заміни, до параметризованої двоточкової крайової задачі з невідомими параметрами у крайових умовах. Для вивчення модифікованої задачі використовується метод, що ґрунтується на послідовних апроксимаціях спеціального вигляду, сконструйованих у аналітичній формі. Параметризована задача досліджується разом з відповідними, так званими, визначальними алгебраїчними, або трансцендентними рівняннями.

1. Вступ. Робота присвячена викладенню одного способу дослідження багатоточкових нелінійних крайових задач з умовами типу Коші-Ніколетті за частиною змінних. За допомогою певної заміни, вихідна задача зводиться до сім'ї параметризованих задач уже з двоточковими умовами, яку потрібно розглядати разом з деяким визначальним алгебраїчним або трансцендентним рівнянням.

Використовуючи модифікацію чисельно-аналітичного методу [1], будуються послідовні апроксимації розв'язку, доводиться їх рівномірна збіжність до точного розв'язку вихідної задачі.

2. Постановка задачі та її зведення до двоточкової задачі з параметром у крайових умовах. Розглядаємо систему нелінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) \tag{1}$$

з крайовими умовами типу Коші-Ніколетті за частиною змінних

$$\begin{gathered} x_s\left(t_1\right) = x_{s0}, \quad s = 1,\, 2...p, \\ \sum_{j=1}^{k-p-1} x_i\left(t_{p+j}\right) = d_{p+1}, \quad i \in \left\{1, 2...n\right\}, \\ x_{p+1+m}\left(T\right) = d_{p+1+m}, \quad m = 1, 2...n-(p+1), \end{gathered} \tag{2}$$

де функція $f : [0, T] \times D \to \mathbb{R}^n$ є неперервною, множина D — замкнена та обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $t_1 = 0 \leq t_2 \leq ... \leq t_p < t_{p+1} < ... < t_{k-1} < t_k = T$.

Припускаємо, що функція f задовольняє умову Ліпшиця, тобто знайдеться така стала матриця K з невід'ємними компонентами $\{k_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, що при довільних $\{u, v\} \subset D$ має місце нерівність

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq K\, |u - v|\,. \tag{3}$$

Тут, і всюди в подібних співвідношеннях надалі, знаки $\leq,\ \geq,\ |\cdot|,\ \max,\ \min$ розуміємо покомпонентно.

Обмежимося розглядом класу крайових задач вигляду (1), (2), для яких максимальне власне значення $r(K)$ матриці K з умови Ліпшиця (3) задовольняє нерівність

$$r(K) < \frac{10}{3T}. \tag{4}$$

Введемо наступні позначення.

Позначення 1. *Якщо функція* $\beta : D \times I \to \mathbb{R}^n_+$, *причому* $I \subset \mathbb{R}^{p+1}$ *та* $z \in \mathbb{R}^n$, *тоді через* $B_I(z, \beta(z,\lambda))$ *позначимо множину*

$$B_I(z, \beta(z,\lambda)) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - z| \leq \beta(z,\lambda) \text{ для всіх } \lambda \in I\}.$$

Позначення 2. *Якщо множина* $D \subset \mathbb{R}^n$ *та функція* $f : [0,T] \times D \to \mathbb{R}^n$ *тоді,*

$$\delta_D(f) := \frac{1}{2}\left[\max_{(t,x)\in[0,T]\times D} f(t,x) - \min_{(t,x)\in[0,T]\times D} f(t,x)\right]. \tag{5}$$

Крайові умови (2) можемо представити в матрично-векторному вигляді

$$Ax(0) + \sum_{j=1}^{k-p-1} Bx_i(t_{p+j}) + C_1 x(T) = d,\ \ i \in \{1,...,n\}, \tag{6}$$

де $A = \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \{b_{il}\}$, $i,l \in \{1,...,n\}$, $b_{il} = \begin{cases} 0, & i \neq l \\ 1, & i = l \end{cases}$, $C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-(p+1)} \end{pmatrix}$, E_p, $E_{n-(p+1)}$ – це p- та $n-(p+1)$-вимірні одиничні матриці, та вектор $d = col\,(x_{10},...,x_{p0}, d_{p+1}, d_{p+2},...,d_n)$.

Тут необхідно зауважити, що матриці в крайових умовах (6) є виродженими. Цей факт суттєво ускладнює застосування відомих чисельно-аналітичних алгоритмів до дослідження даної задачі (1), (6) [1–3].

Очевидно, від багатоточкових крайових умов (6) можемо перейти двоточкових

$$Ax(0) + C_1 x(T) = col\,(x_{10},...,x_{p0}, 0, d_{p+2},...,d_n). \tag{7}$$

Для того, щоб обійти виродженість матриці C_1, введемо наступну параметризацію. Замінимо значення $p+1$ компоненти розв'язку задачі (1), (6) у точці T параметрами $\lambda_1,\ \lambda_2,...,\lambda_{p+1}$:

$$\lambda_1 = x_1(T),\ \ \lambda_2 = x_2(T),...,\ \ \lambda_{p+1} = x_{p+1}(T). \tag{8}$$

Будь яка функція x, для якої справедливі співвідношення (7), (8), очевидно, задовольнятиме рівність

$$Ax(0) + Cx(T) = d(\lambda), \tag{9}$$

де $\lambda = col\,(\lambda_1,\ \lambda_2,...,\lambda_{p+1})$, $C = E_n$– $n-$вимірна одинична матриця, причому $\det C \neq 0$,

$$d(\lambda) = col\,(x_{10} + \lambda_1,...,x_{p0} + \lambda_p, \lambda_{p+1}, d_{p+2},...,d_n).$$

Таким чином, розглядатимемо задачу (1), (9), в якій двоточкова крайова умова (9) містить невідомий $(p+1)$-вимірний вектор-параметр λ.

Зауваження 1. *Множина розв'язків вихідної нелінійної багатоточкової крайової задачі типу Коші-Ніколетті за частиною змінних* (1), (2) *співпадає з множиною тих розв'язків двоточкової крайової задачі* (1), (9), *які задовольняють додаткову умову* (8).

Покажемо, що параметризована крайова задача (1), (9) може бути досліджена, використовуючи відповідну модифікацію чисельно-аналітичного методу, який ґрунтується на послідовних наближеннях [1].

3. Рівномірна збіжність послідовних апроксимацій. Припустимо, що множина $D_\beta := \{z \in D : B_I(z, \beta(z, \lambda)) \subset D\}$, де функція $\beta : D \times I \to \mathbb{R}^n_+$ задана рівністю

$$\beta(z, \lambda) := \frac{T}{2}\delta_D(f) + |d(\lambda) - (A + E)\, z| \tag{10}$$

та множина $I \subset R^{p+1}$,

$$I := \left\{ \lambda = col(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{p+1}) \in R^{p+1},\ col\,(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p, \lambda_{p+1}, d_{p+2}, ..., d_n) \in D \right\},$$

є непорожньою:

$$D_\beta \neq \emptyset. \tag{11}$$

Визначимо множину $U \subset \mathbb{R}^{n-p}$ наступним чином:

$$U = \left\{col\,(u_1, u_2, ..., u_{n-p}) \in R^{n-p} : col\,(x_{10}, x_{20}, ..., x_{p0}, u_1, u_2, ..., u_{n-p}) \in D_\beta\right\}.$$

Розглянемо послідовність функцій

$$x_m(t, u, \lambda) := z + \int\limits_0^t f(s, x_{m-1}(s, u, \lambda))ds -$$

$$-\frac{t}{T}\int\limits_0^T f(s, x_{m-1}(s, u, \lambda))ds + \frac{t}{T}\left[d(\lambda) - (A + E)z\right], \tag{12}$$

де $m = 1, 2, 3...,\quad x_0(t, u, \lambda) = col(x_{10}, x_{20}, ..., x_{p0}, u_1, u_2, ..., u_{n-p}) =: z \in D_\beta,\ u \in U,\ \lambda \in I,\ t \in [0, T]$. Легко переконатися, що при всіх $m \geq 1$ та всіх значеннях параметрів $u \in U,\quad \lambda \in I$ справедлива рівність $x_m(0, u, \lambda) = z$, а також $x_m(T, u, \lambda) = d(\lambda) - Az$, тобто, всі функції, задані формулою (12), задовольняють двоточкову умову (9).

Наступні твердження вказують умови, достатні для рівномірної збіжності рекурентної послідовності функцій (12), та встановлюють зв'язок її границі з множиною розв'язків задач (1), (2) та (1), (9).

Теорема 1. *Припустимо, що для неперервної функції* $f : [0, T] \times D \to \mathbb{R}^n$ *виконується умова Ліпшиця* (3) *з матрицею* K, *для якої справедлива нерівність* (4), *а також має місце умова* (11). *Тоді:*

1) послідовність (12) *при* $m \to +\infty$ *збігається рівномірно за* $t \in [0, T]$ *в області* $(t, u, \lambda) \in [0, T] \times U \times I$;

2) гранична функція

$$x^*(t, u, \lambda) := \lim_{m \to +\infty} x_m(t, u, \lambda) \tag{13}$$

послідовності (12) *при всіх* $u \in U, \quad \lambda \in I$ *є единим розв'язком інтегрального рівняння*

$$x(t) = z + \int\limits_0^t f(s, x(s))ds - \frac{t}{T}\int\limits_0^T f(s, x(s))ds + \frac{t}{T}\left[d(\lambda) - (A+E)z\right], \quad t \in [0, T], \tag{14}$$

або, що те саме, є единим розв'язком інтегро-диференціального рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) + \Delta(u, \lambda), \tag{15}$$

де

$$\Delta(u, \lambda) := -\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(s, x^*(s, u, \lambda))ds + \frac{1}{T}\left[d(\lambda) - (A+E)z\right], \tag{16}$$

який задовольняє крайові умови (9) *та початкову умову* $x^*(0, u, \lambda) = z = col(x_{10}, x_{20}, ..., x_{p0}, u_1, ..., u_{n-p})$ *для* $u \in U, \quad \lambda \in I$;

3) для всіх $(t, u, \lambda) \in [0, T] \times U \times I$ *справедлива оцінка*

$$|x^*(t, u, \lambda) - x_m(t, u, \lambda)| \leq$$

$$\leq \frac{20}{9}t\left(1 - \frac{1}{T}\right)Q^{m-1}(E - Q^{-1})\left[\delta_D(f)Q + K\left|d(\lambda) - (A+E)z\right|\right], \tag{17}$$

де матриця $Q := \frac{3T}{10}K$.

Доведення. Доведемо, що при зроблених припущеннях послідовність (12) є фундаментальною і, як наслідок, рівномірно збіжною послідовністю у Банаховому просторі $C([0, T], \mathbb{R}^n)$ із заданою стандартною нормою. Спочатку покажемо, що при $(u, \lambda) \in U \times I$ значення всіх функцій (12) містяться в D. Для кожної неперервної функції $f : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ має місце оцінка (див., напр. лема 3.13 [3])

$$\left|\int\limits_0^t \left[f(\tau) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(s)ds\right]d\tau\right| \leq \frac{1}{2}\alpha_1(t)\left[\max_{t\in[0.T]} f(t) - \min_{t\in[0,T]} f(t)\right],$$

де $\alpha_1(t) := 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right), \quad |\alpha_1(t)| \leq \frac{T}{2}, \quad t \in [0, T]$.

Тому, при $m = 0$ із (12), випливає, що для довільних $(t, u, \lambda) \in [0, T] \times U \times I$

$$|x_1(t, u, \lambda) - z| \leq \alpha_1(t)\delta_D(f) + \beta_1(z, \lambda) \leq \beta(z, \lambda), \tag{18}$$

де $\beta_1(z, \lambda) := |d(\lambda) - (A+E)z|$. Як наслідок, виходячи з (18), маємо, що $x_1(t, u, \lambda) \in D$, для довільних $(t, u, \lambda) \in [0, T] \times U \times I$. Використовуючи метод математичної індукції, неважко показати, що всі функції (12) належать множині D, при $m = 1, 2, ..., t \in [0, T], u \in U, \lambda \in I$.

Міркуючи по аналогії з доведенням теореми 1 із [4], можна показати, що при всіх $m \geq 1, j > 0$ и $(t, u, \lambda) \in [0, T] \times U \times I$

$$|x_{m+j}(t, u, \lambda) - x_m(t, u, \lambda)| \leq \frac{10t}{9}\alpha_1(t)Q^{m-1}\left[Q\sum_{i=0}^{j-1} Q^i\delta_D(f) + K\sum_{i=0}^{j-1} Q^i\beta_1(z, \lambda)\right]. \tag{19}$$

Оскільки, в силу нерівності (4), $\lim\limits_{m\to+\infty} Q^m = 0$ і $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} Q^i \leq (E-Q)^{-1}$, із (19) очевидно, що послідовність (12) фундаментальна в рівномірній метриці. Спрямовуючи в (19) $j \to +\infty$, отримуємо, що рівномірна границя (13) послідовності (12) задовольняє нерівність (17). Переходячи до границі при $m \to +\infty$ в (12), отримуємо, що функція (13) задовольняє рівняння (14) або (15).

Враховуючи те, що функції $x_m(t,u,\lambda)$ послідовності (12) задовольняють двоточкові крайові умови (9) при довільних значеннях параметрів, гранична функція $x^*(t,u,\lambda)$ також буде задовольняти ці умови, а також $x^*(0,u,\lambda) = z = col(x_{10}, x_{20}, ..., x_{p0}, u_1, ..., u_{n-p})$.

4. Існування розв'язків. Параметризовану крайову задачу (1), (9) можна інтерпретувати як сім'ю початкових задач зі збуреною правою частиною. Розглянемо задачу Коші

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) + \mu, \quad t \in [0,T], \tag{20}$$

$$x(0) = z, \tag{21}$$

де вектор параметрів μ приймає значення у відповідній множині. Справедливе наступне твердження.

Теорема 2. *Припустимо, що виконуються всі умови теореми 1. Крім того,* $(t,u,\lambda) \in [0,T] \times U \times I$ *та* $\mu \in \mathbb{R}^n$. *Тоді для того, щоб деякий розв'язок задачі Коші* (20), (21) *задовольняв також двоточкові умови* (9), *необхідно та достатньо, щоб параметр* μ *в* (20) *був заданий рівністю*

$$\mu = \Delta(u, \lambda), \tag{22}$$

де відображення $\Delta : U \times I \to \mathbb{R}^n$ *— функція, визначена формулою* (16).

Зауваження 2. *Із теореми 1 випливає, що при вказаних вище умовах для всіх значень параметрів* $(u,\lambda) \in U \times I$ *існує гранична функція* (13) *рекурентної послідовності* (12), *і, як наслідок, відображення* (16) *визначається однозначно.*

Доведення. *Достатність.* Нехай в (20) $\mu = \Delta(u,\lambda)$, де u і λ — деякі задані вектори з U і I відповідно, а Δ — функція, визначена формулою (16). Згідно із зауваженням 2, вираз $\Delta(u,\lambda)$ має зміст при всіх $(u,\lambda) \in U \times I$. З теореми 1 випливає, що при заданих u і λ рівномірна границя (13) відповідної послідовності (12) є єдиним розв'язком двоточкової задачі (1), (9). Ця функція задовольняє і початкову умову $x^*(0,u,\lambda) = z$, тобто вона є розв'язком задачі Коші (20), (21) при заданому формулою (22) значенні параметра μ.

Необхідність. Нехай $u \in U$, $\lambda \in I$ і $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^n$ — довільним чином задані вектори, і $\bar{x} : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ — розв'язок задачі Коші (21) для рівняння

$$x'(t) = f(t, x(t)) + \bar{\mu}, \qquad t \in [0,T], \tag{23}$$

при заданому значенні λ, який задовольняє двоточкову крайову умову (9). Припустимо, що знайдеться деяке інше значення $\bar{\bar{\mu}}$, при якому деякий розв'язок $\bar{\bar{x}}$ задачі (21) для рівняння

$$x'(t) = f(t, x(t)) + \bar{\bar{\mu}}, \qquad t \in [0,T], \tag{24}$$

задовольняє двоточкову умову (9). З (21), (23) і (24) очевидно, що функції $\bar{x}$ і $\bar{\bar{x}}$ задовольняють інтегральні рівняння

$$\bar{x}(t) = z + \int_0^t f(s, \bar{x}(s))ds + \bar{\mu}t, \qquad t \in [0, T], \tag{25}$$

і

$$\bar{\bar{x}}(t) = z + \int_0^t f(s, \bar{\bar{x}}(s))ds + \bar{\bar{\mu}}t, \qquad t \in [0, T], \tag{26}$$

відповідно. При $t = T$ з (25), (26) випливає, що

$$T\bar{\mu} = \bar{x}(T) - z - \int_0^T f(s, \bar{x}(s))ds \tag{27}$$

і

$$T\bar{\bar{\mu}} = \bar{\bar{x}}(T) - z - \int_0^T f(s, \bar{\bar{x}}(s))ds. \tag{28}$$

Функція $\bar{x}$, за припущенням, задовольняє двоточкову умову (9),

$$A\bar{x}(0) + C\bar{x}(T) = d(\lambda),$$

і умову Коші $\bar{x}(0) = z$, звідки випливає рівність

$$\bar{x}(T) = d(\lambda) - Az.$$

Аналогічно можна перевірити, що

$$\bar{\bar{x}}(T) = d(\lambda) - Az.$$

Як наслідок, з (27) і (28) випливає, що

$$\bar{\mu} = \frac{1}{T}\left[d(\lambda) - Az - z - \int_0^T f(s, \bar{x}(s))ds\right] \tag{29}$$

і

$$\bar{\bar{\mu}} = \frac{1}{T}\left[d(\lambda) - Az - z - \int_0^T f(s, \bar{\bar{x}}(s))ds\right]. \tag{30}$$

Вносячи (29) і (30) відповідно в (25) і (26), отримаємо, що для кожного $t \in [0, T]$

$$\bar{x}(t) = z + \int_0^t f(s, \bar{x}(s))ds + \frac{t}{T}\left[d(\lambda) - Az - z - \int_0^T f(s, \bar{x}(s))ds\right] \tag{31}$$

і

$$\bar{\bar{x}}(t) = z + \int_0^t f(s, \bar{x}(s))ds + \frac{t}{T}\left[d(\lambda) - Az - z - \int_0^T f(s, \bar{\bar{x}}(s))ds\right]. \tag{32}$$

Нагадаємо, що тут $u \in U$, а $\lambda \in I$. Отже, аналогічно до доведення теореми 1, виходячи з вигляду рівнянь (31), (32) і означення множини D_β, можна показати, що всі значення функцій $\bar{\bar{x}}$ і $\bar{x}$ містяться в множині D:

$$\bar{x}([0, T]) \cup \bar{\bar{x}}([0, T]) \subset D. \tag{33}$$

З (31) і (32) очевидно, що

$$\bar{\bar{x}}(t) - \bar{x}(t) = \int_0^t \left[f(s, \bar{\bar{x}}(s)) - f(s, \bar{x}(s))\right] ds -$$

$$-\frac{t}{T}\int_0^T \left[f(s, \bar{\bar{x}}(s)) - f(s, \bar{x}(s))\right] ds, \qquad t \in [0, T],$$

і тому, відповідно до співвідношення (33) і умови Ліпшиця (3), функція

$$r(t) := |\bar{\bar{x}}(t) - \bar{x}(t)|, \qquad t \in [0, T],$$

задовольняє інтегральну нерівність

$$r(t) \leq K\left[\int_0^t r(s)ds + \frac{t}{T}\int_0^T r(s)ds\right] K\alpha_1(t)\max_{s\in[a,b]} r(s), \quad t \in [a, b]. \tag{34}$$

Використовуючи (34) рекурентно, отримаємо нерівність

$$r(t) \leq K^m \alpha_m(t) \max_{s\in[a,b]} r(s), \qquad t \in [a, b],$$

де m довільне натуральне число, для всіх t з $[0, T]$ і $k = 2, 3, \ldots$. Згідно з лемою 2.4 з [1], функції $\alpha_k(t)$ для всіх $t \in [0, T]$ і $k = 1, 2, \ldots$ задовольняють нерівність

$$\alpha_k(t) \leq \frac{10}{9}\alpha_1(t)\left(\frac{3T}{10}\right)^{k-1}.$$

Тому з (28) випливає, що для кожного натурального m

$$r(t) \leq \frac{10}{9}K\alpha_1(t)\left(\frac{3T}{10}K\right)^{m-1}\max_{s\in[a,b]} r(s), \qquad t \in [a, b].$$

Спрямовуючи m в останній нерівності до $+\infty$ і враховуючи умову (4), можна зробити висновок, що $r \equiv 0$ на $[0, T]$, тобто функції $\bar{x}$ і $\bar{\bar{x}}$ співпадають, і тому $\bar{\mu} = \bar{\bar{\mu}}$. Отримане протиріччя доводить, що $\mu = \Delta(z, \lambda)$ — єдине значення параметра μ у рівнянні (20), при якому розв'язок задачі Коші (20), (21) задовольняє двоточкову умову (9).

Наступне твердження показує зв'язок функції (13) з множиною розв'язків двоточкової задачі (1), (9) з параметром $\lambda \in I$, а отже і з розв'язками багатоточкової задачі (1), (2).

Теорема 3. *Припустимо, що для неперервної функції* $f : [0, T] \times D \to \mathbb{R}^n$ *виконується умова Ліпшиця* (3), *для якої справедлива нерівність* (4), *а також умова* (11). *Тоді функція* $x^*(\cdot, u^*, \lambda)$, *яка визначається в теоремі 1, є розв'язком двоточкової задачі* (1), (9), *з вектором параметрів* λ, *тоді і тільки тоді, коли пара векторних параметрів* (u^*, λ), *де* $u^* = col(u_1^*, u_2^*, ..., u_{n-p}^*)$, $\lambda = col(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{p+1})$ *задовольняють співвідношення*

$$\Delta(u, \lambda) = -\frac{1}{T}\int_0^T f(s, x^*(s, u, \lambda))ds + \frac{1}{T}\left[d(\lambda) - (A + E)\, z\right] = 0. \tag{35}$$

Функція (13) *є розв'язком вихідної багатоточкової задачі* (1), (2) *тоді і тільки тоді, коли* (u^*, λ^*), *де* $\lambda^* = col(\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_{p+1}^*)$, *задовольняють систему* (35), *та, крім того,*

$$\sum_{j=1}^{k-p-1} x_i^*\left(t_{p+j}, u, \lambda\right) = d_{p+1}, \ i \in \{1, ..., n\}. \tag{36}$$

Доведення. Я випливає з доведення теореми 1, при всіх $(u, \lambda) \in U \times I$ функція $x^*(\cdot, u^*, \lambda)$ є розв'язком двоточкової задачі (15), (9). Рівняння (15) співпадає з рівнянням (1) тоді і тільки тоді, коли u^* та λ задовольняють умову $\Delta(u^*, \lambda) = 0$, тобто виконується рівність (35). Друге твердження теореми випливає із зауваження 1.

5. Практична реалізація. При практичній реалізації зручно зафіксувати деякий номер ітерації m в (12) та використовувати $x_m(\cdot, u, \lambda)$ в якості наближення до невідомої функції $x^*(\cdot, u, \lambda)$, існування якої обґрунтовується в теоремі 1. При цьому, замість (35), (36) розглядаємо систему із $n+1$ наближених визначальних рівнянь

$$\Delta_m(u, \lambda) = -\frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_m(s, u, \lambda))ds + \frac{1}{T}\left[d(\lambda) - (A+E)\,z\right] = 0, \tag{37}$$

$$\sum_{j=1}^{k-p-1} x_{mi}(t_{p+j}, u, \lambda) = d_{p+1}, \quad i \in \{1, ..., n\}, \tag{38}$$

з яких шукаємо значення $n+1$ параметрів $u^* \approx col(u_{m1}, u_{m2}, \ldots, u_{m,n-p})$, $\lambda^* \approx col(\lambda_{m1}, \lambda_{m2}, ..., \lambda_{m,p+1})$.

Якщо система із $n+1$ рівняння (37), (38) має ізольований розв'язок $(\bar{u}, \bar{\lambda}) \in U \times I$, то при відповідних припущеннях [1] можна довести розв'язність і системи (35), (36), тим самим встановивши існування розв'язку вихідної крайової задачі (1), (2) типу Коші-Ніколетті за частиною змінних. При цьому функцію

$$\bar{x}_m(t) = x_m(\cdot, \bar{u}, \bar{\lambda}) \tag{39}$$

можна розглянути, як наближення до одного із розв'язків задачі (1), (2).

6. Приклад задачі з крайовими умовами типу Коші-Ніколетті за частиною змінних. Розглянемо нелінійну систему

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2^2(t) - x_4(t) + tx_3, \\ x_2'(t) = x_3^2(t) - x_4(t) + x_1 - \frac{1}{4}, \\ x_3'(t) = x_4(t) - x_2^2(t), \\ x_4'(t) = x_1(t) - x_2^2(t) + tx_3(t) - \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{40}$$

де $t \in [0, 1]$, з крайовими умовами типу Коші-Ніколетті за частиною змінних

$$\begin{cases} x_1(0) = \frac{1}{2}, \\ x_2(0) = 0, \\ x_3\left(\frac{1}{3}\right) + x_3\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \\ x_4(1) = \frac{1}{4}. \end{cases} \tag{41}$$

Припустимо, що задана крайова задача розглядається в області

$$D = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : |x_1| \le \frac{1}{2},\ |x_2| \le \frac{1}{3},\ |x_3| \le \frac{1}{3},\ |x_4| \le \frac{1}{2} \right\}.$$

Крайові умови (41) можна представити в матрично-векторному вигляді

$$Ax\,(0) + \sum_{j=0}^{1} Bx_3\,(t_{2+j}) + C_1 x\,(T) = d, \tag{42}$$

де $A = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\\0\\1\\\frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Очевидно, що матриця C_1 вироджена.

Для того, щоб обійти виродженість матриці C_1, замінимо значення першої, другої та третьої компонент розв'язку крайової задачі (40), (42) в точці T відповідно параметрами $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$:

$$x_1(T) = \lambda_1, \quad x_2(T) = \lambda_2, \quad x_3(T) = \lambda_3. \tag{43}$$

Причому, $|\lambda_1| \le \frac{1}{2}, |\lambda_2| \le \frac{1}{3}, |\lambda_3| \le \frac{1}{3}$.

Використовуючи рівності (43), крайові умови (42) можна представити у наступному вигляді:

$$Ax\,(0) + Cx\,(T) = d(\lambda)\ , \tag{44}$$

де $A = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}$, $d(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\lambda_1\\\lambda_2\\1+\lambda_3\\\frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $\lambda = col(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Зауважимо, що тут $C = E$ невироджена матриця.

Безпосередніми обчисленнями переконуємося, що для задачі (40), (44), в області D виконуються умови (3), (4) та (11) з матрицею K та векторами $\beta\,(z, \lambda)$ та $\delta_D\,(f)$ вигляду

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 1 & 1\\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 1\\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1\\ 1 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta\,(z, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} + \left|-\frac{1}{2} + \lambda_1\right| \\ \frac{19}{36} + |\lambda_2| \\ \frac{5}{18} + |-1 - \lambda_3 - z_3| \\ \frac{4}{9} + \left|z_4 - \frac{1}{4}\right| \end{pmatrix}, \delta_D\,(f) = \begin{pmatrix} \frac{8}{9}\\ \frac{19}{18}\\ \frac{5}{9}\\ \frac{8}{9} \end{pmatrix}.$$

Найбільше власне значення матриці K задовольняє нерівність $\lambda_{\max}\,(K) = 2.39 \le \frac{10}{3T}$, причому, $x_0 = \left(\frac{1}{2},\ 0,\ z_3,\ z_4\right)$.

Таким чином до даної задачі можна застосувати модифікацію чисельно-аналітичної схеми, розглянуту вище і сконструювати послідовність наближених розв'язків.

Не важко переконатися, що точний розв'язок заданої крайової задачі $x_1^*(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{1}{2}$, $x_2^*(t) = \frac{t}{2}$, $x_3^*(t) = \frac{1}{2}$, $x_4^*(t) = \frac{t^2}{4}$.

Побудуємо наближені розв'язки задачі (40)–(41). Для цього обчислюємо деякі з функцій рекурентної послідовності (12), використовуючи пакет символьних обчислень Maple. Покладемо нульову ітерацію тотожно рівною z, $z \in D_\beta$.

Тоді, наприклад, при $m = 2$ з (12) отримаємо

$$x_{21} = \frac{t^3\,\lambda_2^2}{3} - \frac{t^3\,z_3}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^3\,\lambda_3}{3} + \frac{t^2\,z_4}{2} + \frac{3\,z_3\,t^2}{4} - \frac{t^2}{8} - \frac{z_4\,t}{2} - \frac{t\,\lambda_2^2}{3} - \frac{t\,z_3}{4} - \frac{17\,t}{24} - \frac{t\,\lambda_3}{3} + t\,\lambda_1 + \frac{1}{2},$$

$$x_{22} = \frac{t^3}{3} + \frac{2\,t^3\,\lambda_3}{3} - \frac{2\,t^3\,z_3}{3} + \frac{t^3\,\lambda_3^2}{3} - \frac{2\,t^3\,\lambda_3\,z_3}{3} + \frac{t^3\,z_3^2}{3} + \frac{t^2\,\lambda_1}{2} + \frac{t^2\,z_4}{2} + z_3\,t^2 +$$

$$+ t^2\,\lambda_3\,z_3 - t^2\,z_3^2 - \frac{3\,t^2}{8} + \frac{2\,z_3^2\,t}{3} - \frac{z_4\,t}{2} + \frac{t}{24} - \frac{2\,t\,\lambda_3}{3} - \frac{t\,z_3}{3} - \frac{t\,\lambda_3^2}{3} - \frac{t\,\lambda_3\,z_3}{3} - \frac{t\,\lambda_1}{2} + t\,\lambda_2,$$

$$x_{23} = \frac{t^3\,z_3}{6} - \frac{t^3\,\lambda_2^2}{3} - \frac{z_3\,t^2}{4} + \frac{t^2}{8} - \frac{t^2\,z_4}{2} + \frac{z_4\,t}{2} - \frac{11\,t\,z_3}{12} + \frac{t\,\lambda_2^2}{3} + \frac{7\,t}{8} + t\,\lambda_3 + z_3,$$

$$x_{24} = -\frac{t^3\,z_3}{6} - \frac{t^3\,\lambda_2^2}{3} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^3\,\lambda_3}{3} + \frac{z_3\,t^2}{4} - \frac{t^2}{4} + \frac{t^2\,\lambda 1}{2} - \frac{t\,z_3}{12} + \frac{t\,\lambda_2^2}{3} + \frac{t}{6} - \frac{t\,\lambda_3}{3} - \frac{t\,\lambda_1}{2} - z_4\,t + z_4$$

для всіх $t \in [0,1]$, $(z_2, z_3) \in D_\beta$.

Тут і нижче символами x_{2i} позначені відповідно компоненти вектора $x_2, i = 1, 2, 3, 4$.

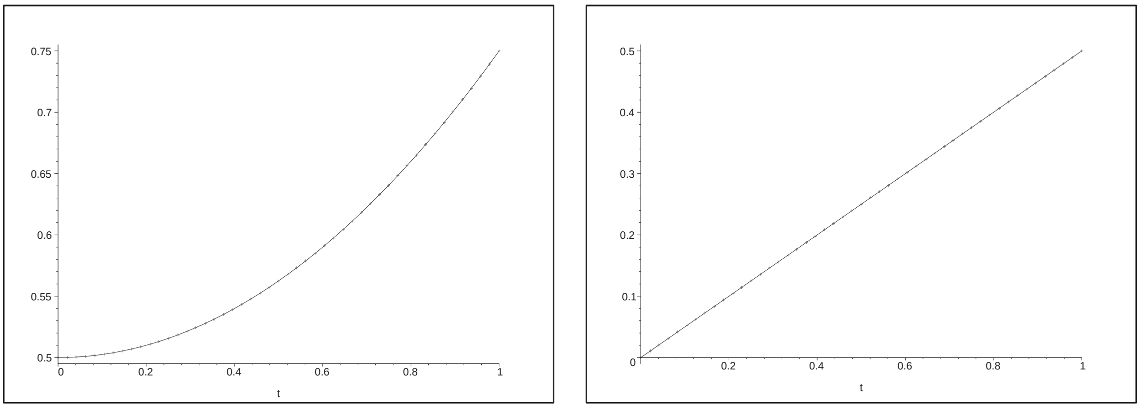

Рис. 1. Перша та друга компоненти точного розв'язку (лінія) та їх друге наближення (пунктир).

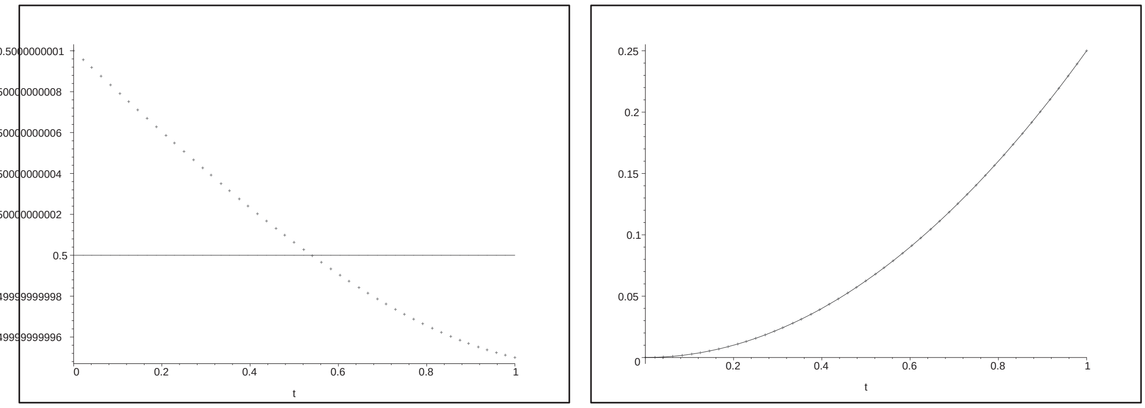

Рис. 2. Третя та четверта компоненти точного розв'язку (лінія) та їх друге наближення (пунктир).

Система наближених визначальних рівнянь (37), (38) для задачі (40), (41) при $m = 2$ матиме розв'язки:

$$\lambda_1 = 0.7499999999,\ \lambda_2 = 0.4999999999,\ \lambda_3 = -0.5000000001,$$
$$z_4 = -0.7690328250\,10^{-11},\ z_3 = 0.5000000001.$$

Підставляючи обчислені наближені значення параметрів z_2, z_3 і λ_1, λ_2, λ_3 у компоненти другої ітерації, знаходимо функцію вигляду (39) — друге наближення до розв'язку триточкової задачі (40), (41):

$$\bar{x}_{21}(t) = -0.1000000000\,10^{-9}\,t^3 + 0.5000000000 + 0.2500000001\,t^2,$$

$$\bar{x}_{22}(t) = -0.1038451641\,10^{-9}\,t^2 + 0.5000000000\,t,$$
$$\bar{x}_{23}(t) = 0.5000000000\,10^{-10}\,t^3 + 0.5000000001 - 0.2000000000\,10^{-9}\,t,$$
$$\bar{x}_{24}(t) = -0.7690328250\,10^{-11} + 0.2500000000\,t^2.$$

Як видно з рисунків 1-2, графіки наближеного розв'язку вже на другій ітерації для всіх чотирьох компонент майже повністю співпадають з графіками точного розв'язку, а похибки (відхилення другої ітерації від точного розв'язку) не перевищують $0.14 \cdot 10^{-10}$, $0.1 \cdot 10^{-9}$, $0.1 \cdot 10^{-9}$, $0.85 \cdot 10^{-11}$, відповідно для першої, другої, третьої та четвертої компонент.

1. *Ronto M., Samoilenko A.M.* Numerical-analytic methods in the theory of boundary-value problems. – River Edge. NS: World Scientific Publishing Co. Inc. – 2000. – 455 p.
2. *Ronto A.* On some boundary value problems for Lipschitz differential equations // Nonlinear Oscillations. – 1998. – **1**, №1. – P. 74–94.
3. *Ronto A., Ronto M.* Successive Approximation Techniques in Non-Linear Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations // Handbook of Differential Equations. Elsevier B. V. – 2008. – Vol. IV. – P. 441–592.
4. *Ronto M., Shchobak N.* On the numerical-analytic investigation of parametrized problems with nonlinear boundary conditions // Nonlinear Oscillations. – 2003. – **6**, №4. – P. 482–510.
5. *Ронто А.Н., Ronto M., Щобак Н.М.* О параметризации трехточечных нелинейных краевых задач // Нелінійні коливання. – 2004. – **7**, №3. – P. 395–413.

Одержано 28.04.2011