УДК 517.946

В. В. Маринець, О. Ю. Питьовка (Ужгородський національний університет, Мукачівський державний університет)

ОДИН ПІДХІД ПОБУДОВИ ДВОСТОРОННІХ НАБЛИЖЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ У ВИПАДКУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО - ФУНКЦІОНАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

Modification of two-sides method for boundary-value problem of approaching integration of differential equations of hyperbolical type is built.

Будується одна модифікація двостороннього методу прискореної збіжності наближеного інтегрування крайової задачі для диференціально - функціональних рівнянь гіперболічного типу.

У роботах $[1, 2]$ досліджуються крайові задачі для квазілінійних рівнянь другого порядку гіперболічного типу, коли область відшукання розв'язку розглядуваної задачі обмежена "вільними" кривими та характеристиками заданого диференціального рівняння [3].

У даній роботі узагальнюються одержані результати в $[1, 2]$ і дається один підхід побудови двостороннього методу прискореної збіжності наближеного інтегрування досліджуваної задачі.

Нехай $y = g_i(x)$ $(x = k_i(y))$, $i = 1, 2$ — задані "вільні" криві, причому $g_1'(x) < 0, x \in (x_1, x_0)$, $g_1(x_k) = y_k, k = 0, 1$, $g_2'(x) > 0, x \in (x_0, x_2)$, $g_2(x_0) = y_0$, $g_2(x_2) = y_1$, $x_1 < x_0 < x_2$, $y_0 < y_1 < y_2$. Розглянемо область $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, де $D_1 = \{(x, y) \mid x \in (x_1, x_0],\ y \in (g_1(x), y_1]\}$, $D_2 = \{(x, y) \mid x \in [x_0, x_2],\ y \in (g_2(x), y_1]\}$, $D_3 = \{(x, y) \mid x \in (x_1, x_0],\ y \in [y_1, y_2]\}$.

Позначимо: $L_2u(x, y) := u_{xy}(x, y) + a_1(x, y)u_x(x, y) + a_2(x, y)u_y(x, y)$, $f[u(x, y)] := f(x, y, u(x, y), u(x, \theta(x, y)))$, $\theta(x, y) := y - \tau(x, y)$, де $\tau(x, y) \geq 0$ — задана неперервна функція, яка визначає початкову множину $\overline{E} = \overline{E}_1 \cup \overline{E}_2$, $\overline{E}_1 = \{(x, \overline{y}) \mid x \in [x_1, x_0],\ y - \tau(x, y) \leq \overline{y} \leq g_1(x),\ (x, y) \in \overline{D}_1 \cup \overline{D}_3\}$, $\overline{E}_2 = \{(x, \overline{y}) \mid x \in [x_0, x_2],\ y - \tau(x, y) \leq \overline{y} \leq g_2(x),\ (x, y) \in \overline{D}_2\}$.

Постановка задачі: в просторі функцій $C^*(\overline{D}) := C^{(1.1)}(D) \cap C^{(0.1)}(\overline{D})$ знайти розв'язок рівняння

$$L_2u(x, y) = f[u(x, y)], \tag{1}$$

який задовольняє умови

$$\begin{gathered} u(x, g_1(x)) = \varphi_1(x),\ u_y(x, g_1(x)) = \psi(x),\ x \in [x_1, x_0], \\ \psi(x) \in C[x_1, x_0],\ \varphi_1(x) \in C'[x_1, x_0], \end{gathered} \tag{2}$$

$$u(x, g_2(x)) = \varphi_2(x),\ x \in [x_0, x_2],\ \varphi_2(x) \in C'[x_0, x_2], \tag{3}$$

$$u(x_1, y) = \varphi(y),\ y \in [y_1, y_2],\ \varphi(y) \in C'[y_1, y_2], \tag{4}$$

причому виконуються умови узгодженості

$$\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0),\ \varphi_1(x_1) = \varphi(y_1),\ \varphi'(y_1) = \psi(x_1), \tag{5}$$

а

$$u(x,y)\mid_{\overline{E}}=\Phi(x,y),\ (x,y)\in\overline{E}, \tag{6}$$

де $\Phi(x,y)\in C'(\overline{E})$ — задана функція. Очевидно

$$\begin{gathered}\Phi(x,g_1(x))=\varphi_1(x),\ \Phi_y(x,g_1(x))=\psi(x),\ x\in[x_1,x_0],\\ \Phi(x,g_2(x))=\varphi_2(x),\ x\in[x_0,x_2].\end{gathered} \tag{7}$$

Розв'язок задачі (1) — (7) $u(x,y)=u_s(x,y)$, $(x,y)\in\overline{D}_s$, $s=1,2,3$, де $u_1(x,y)$— розв'язок задачі Коші (1), (2), (6) при $(x,y)\in\overline{D}_1$, $u_2(x,y)$ — розв'язок задачі Дарбу (1), (3), (5), (6) при $(x,y)\in\overline{D}_2$ і $u_2(x_0,y)=u_1(x_0,y)$, $y\in[y_0,y_1]$, а $u_3(x,y)$ — розв'язок задачі Гурса (1), (4), (5) при $(x,y)\in\overline{D}_3$ і $u_3(x,y_1)=u_1(x,y_1)$, $x\in[x_1,x_0]$.

Вважаємо, що $a_1(x,y)\in C^{(1.0)}(D)$, $a_2(x,y)\in C^{(0.1)}(D)$, а $f[u(x,y)]\in C(\overline{B})$, $f:\overline{B}\to\mathbb{R}$, $\overline{B}\subset\mathbb{R}^4$.

Неважко показати, що якщо

$$a_{1x}(x,y)=a_{2y}(x,y),\ (x,y)\in\overline{D}, \tag{8}$$

то задачу (1) — (7) можна подати в еквівалентній інтегральній формі

$$\begin{gathered}
u_1(x,y)=\begin{cases}\Phi(x,y),\ (x,y)\in\overline{E}_1,\\ \omega_{1,1}(x,y)+T_1F[u_1(\xi,\eta)],\ (x,y)\in\overline{D}_1,\end{cases}\\
\omega_{1,i}(x,y):=\varphi_i(x)\exp\left(\int_y^{g_i(x)}a_1(x,\eta)d\eta\right)+\\
+\int_{g_i(x)}^{y}K(x,y;k_1(\eta),\eta)[\psi(k_1(\eta))+a_1(k_1(\eta),\eta)\varphi_1(k_1(\eta))]d\eta,\ i=1,2,\\
K(x,y;\xi,\eta):=\exp\left(\int_x^{\xi}a_2(\tau,\eta)d\tau+\int_y^{\tau}a_1(x,\tau)d\tau\right),\\
F[u_s(x,y)]:=f[u_s(x,y)]+(a_{2y}(x,y)+a_1(x,y)a_2(x,y))u_s(x,y),\ s=1,2,3,\\
T_1F[u_1(\xi,\eta)]:=\int_{g_1(x)}^{y}\int_{k_1(\eta)}^{x}K(x,y;\xi,\eta)F[u_1(\xi,\eta)]d\xi d\eta,\ (x,y)\in\overline{D}_1,
\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}
u_2(x,y)=\begin{cases}\Phi(x,y),\ (x,y)\in\overline{E}_2;\\ \\ \omega_{2,2}(x,y)+T_2F[u_2(\xi,\eta)],\ (x,y)\in\overline{D}_2,\end{cases}\\
\omega_{2,2}(x,y):=\omega_{1,2}(x,y)+T_{1,1}F[u_1(\xi,\eta)],\\
T_{1,1}F[u_1(\xi,\eta)]:=\int_{g_2(x)}^{y}\int_{k_1(\eta)}^{x_0}K(x,y;\xi,\eta)F[u_1(\xi,\eta)]d\xi d\eta,\\
T_2F[u_2(\xi,\eta)]:=\int_{g_2(x)}^{y}\int_{x_0}^{x}K(x,y;\xi,\eta)F[u_2(\xi,\eta)]d\xi d\eta,\ (x,y)\in\overline{D}_2,
\end{gathered} \tag{10}$$

$$u_3(x,y) = \begin{cases} \Phi(x,y),\ (x,y) \in \overline{E}_1; \\ \omega_{3,3}(x,y) + T_3F[u_3(\xi,\eta)],\ (x,y) \in \overline{D}_3, \end{cases}$$

$$\omega_{3,3}(x,y) := \int_{y_1}^{y} K(x,y;x_1,\eta)[\varphi'(\eta) + a_1(x_1,\eta)\varphi(\eta)]d\eta +$$
$$+\omega_{1,1}(x,y_1)\exp\left(\int_{y}^{y_1} a_1(x,\eta)d\eta\right) + T_{1,2}F[u_1(\xi,\eta)]d\xi d\eta, \tag{11}$$

$$T_{1,2}F[u_1(\xi,\eta)] := \int_{g_1(x)}^{y_1}\int_{k_1(\eta)}^{x} K(x,y;\xi,\eta)F[u_1(\xi,\eta)]d\xi d\eta,$$

$$T_3F[u_3(\xi,\eta)] := \int_{y_1}^{y}\int_{x_1}^{x} K(x,y;\xi,\eta)F[u_3(\xi,\eta)]d\xi d\eta,\ (x,y) \in \overline{D}_3.$$

Згідно постановки задачі $u_1(x_0,y) = u_2(x_0,y)$ і $u_1(x,y_1) = u_3(x,y_1)$ при $(x,y) \in \overline{D}$, а отже $u_{1y}(x_0,y) = u_{2y}(x_0,y)$, $u_{1x}(x,y_1) = u_{3x}(x,y_1)$, $(x,y) \in \overline{D}$.

Поскільки $(x, y_1 - \tau(x,y_1)) \in \overline{D}_1 \cup E_1$, тобто $u_3(x, y_1 - \tau(x,y_1)) = u_1(x, y_1 - \tau(x,y_1))$, то із (9) — (11) легко переконатись у справедливості в області $\overline{D}$ рівностей

$$u_{3y}(x,y_1) - u_{1y}(x,y_1) = 0,\ x \in [x_1,x_0],$$
$$u_{2x}(x_0,y) - u_{1x}(x_0,y) = [\varphi_2'(x_0) - \varphi_1'(x_0) + \tag{12}$$
$$+(g_1'(x_0) - g_2'(x_0))\psi(x_0)]\exp(\int_{y}^{y_0} a_1(x_0,\eta)d\eta),\ y \in [y_0,y_1].$$

Таким чином справедлива наступна

Лема 1. *Нехай $f[u(x,y)] \in C(\overline{B})$, $a_1(x,y) \in C^{(1.0)}(\overline{D})$, $a_2(x,y) \in C^{(0.1)}(\overline{D})$ і виконується умова (8), а*

$$\varphi_2'(x_0) - \varphi_1'(x_0) + (g_1'(x_0) - g_2'(x_0))\psi(x_0) = 0. \tag{13}$$

Тоді, якщо задача (1) — (7) має розв'язок, то він належатиме просторові $C^*(\overline{D})$ (буде регулярним). У супротивному випадку має місце рівність (12) і $u(x,y) \in C^{(1.1)}(D\backslash I) \cap C^{(0.1)}(\overline{D})$, $I = \{(x,y)\,|\, x = x_0,\ y \in [y_0,y_1]\}$ (розв'язок буде іррегулярним).

Означення 1. *Будемо говорити, що $F[u(x,y)] \in C_1(\overline{B})$, якщо функція $F[u(x,y)]$ задовольняє наступні умови [4]:*

1) *$F[u(x,y)] \in C(\overline{B})$,*

2) *в просторі функцій $C(\overline{B}_1)$, $\overline{B}_1 \subset \mathbb{R}^6$, $\Pi p_{xOy}\overline{B}_1 = \overline{D}$, існує така функція $H(x,y,u(x,y),u(x,\theta(x,y)); v(x,y), v(x,\theta(x,y)) := H[u(x,y),\ v(x,y)]$, що*

   а) $H[u(x,y);\ u(x,y)] \equiv F[u(x,y)]$,

   б) для довільної з простору $C(\overline{D})$ пари функцій $u(x,y)$, $v(x,y) \in \overline{B}_1$, які задовольняють умову $u(x,y) \geq v(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}$, в області $\overline{B}_1$ виконується нерівність

$$H[u(x,y); v(x,y)] \geq H[v(x,y); u(x,y)],\ (x,y) \in \overline{D}, \tag{14}$$

3) функція $H[u(x,y);v(x,y)]$ в області $\overline{B}_1$ задовольняє умову Ліпшиця, тобто, для всяких з простору $C(\overline{D})$ функцій $u_i(x,y),\ v_i(x,y)\in\overline{B}_1,\ i=1,2,$ виконується умова

$$|H[u_1(x,y);v_1(x,y)]-H[u_2(x,y);v_2(x,y)]|\le\ L(|u_1(x,y)-u_2(x,y)|+$$

$$+|u_1(x,\theta(x,y))-u_2(x,\theta(x,y))|+|v_1(x,y)-v_2(x,y)|+$$

$$+|v_1(x,\theta(x,y))-v_2(x,\theta(x,y))|)$$

де L — стала Ліпшиця.

Очевидно, якщо функція $F[u(x,y)]\in C(\overline{B})$ і має обмежені частинні похідні першого порядку по всім своїм аргументам, розпочинаючи з третього, в області $\overline{B}$, то вона завжди належить просторові $C_1(\overline{B})$.

Встановимо достатні умови існування та єдиності регулярного (іррегулярного) розв'язку задачі (1) — (7) в області $\overline{D}$.

Нехай $Z_{p,s}(x,y),\ V_{p,s}(x,y)\in C(\overline{D})$ належать області $\overline{B}_1,\ s=1,2,3,\ p\in\mathbb{N}$.

Введемо позначення:

$$W_{p,s}(x,y):=Z_{p,s}(x,y)-V_{p,s}(x,y),$$

$$f^p_s(x,y):=H[Z_{p,s}(x,y);V_{p,s}(x,y)],\ f_{p,s}(x,y):=H[V_{p,s}(x,y);Z_{p,s}(x,y)],$$

$$\alpha^*_{p,s}(x,y):=Z_{p,s}(x,y)-\omega^p_{s,s}(x,y)-T_sf^p_s(\xi,\eta),\tag{15}$$

$$\beta^*_{p,s}(x,y):=V_{p,s}(x,y)-\omega_{s,s,p}(x,y)-T_sf_{p,s}(\xi,\eta),$$

$$s=1,2,3,\ p=0,1,2,...,\ (x,y)\in\overline{D}_s,$$

$$\omega^p_{1,1}(x,y)=\omega_{1,1,p}(x,y)=\omega_{1,1}(x,y),\ \forall p=0,1,2,...,\ \ (x,y)\in\overline{D}_1,$$

$$\omega^p_{2,2}(x,y):=\omega_{1,2}(x,y)+T_{1,1}f^p_1(\xi,\eta),$$

$$\omega_{2,2,p}(x,y):=\omega_{1,2}(x,y)+T_{1,1}f_{p,1}(\xi,\eta),\ (x,y)\in\overline{D}_2,$$

$$\omega^p_{3,3}(x,y):=\omega_{1,1}(x,y_1)\exp\left(\int_y^{y_1}a_1(x,\eta)d\eta\right)+$$

$$+\int_{y_1}^y K(x,y;x_1,\eta)[\varphi'(\eta)+a_1(x_1,\eta)\varphi(\eta)]d\eta+T_{1,2}f^p_1(\xi,\eta),$$

$$\omega_{3,3,p}(x,y):=\omega_{1,1}(x,y_1)\exp\left(\int_y^{y_1}a_1(x,\eta)d\eta\right)+$$

$$+\int_{y_1}^y K(x,y;x_1,\eta)[\varphi'(\eta)+a_1(x_1,y)\varphi(\eta)]d\eta+T_{1,2}f_{p,1}(\xi,\eta),\ (x,y)\in\overline{D}_3,$$

$$\overline{Z}_{p,s}(x,y):=Z_{p,s}(x,y)-d_{p,s}(x,y)W_{p,s}(x,y),$$

$$\overline{V}_{p,s}(x,y):=V_{p,s}(x,y)+q_{p,s}(x,y)W_{p,s}(x,y),\ (x,y)\in\overline{D}_s,$$

$$F^p_s(x,y):=H[\overline{Z}_{p,s}(x,y);\overline{V}_{p,s}(x,y)],\ F_{p,s}(x,y):=H[\overline{V}_{p,s}(x,y);\overline{Z}_{p,s}(x,y)]$$

$d_{p,s}(x,y)$, $q_{p,s}(x,y) \in C(\overline{D}_s)$ — довільні функції, які задовольняють умови

$$0 \le d_{p,s}(x,y) \le 0,5;\ 0 \le q_{p,s}(x,y) \le 0,5,$$
$$(x,y) \in \overline{D}_s,\ \text{для всіх} p \in \mathbb{N}, s = 1,2,3. \tag{16}$$

Побудуємо послідовності функцій $\{Z_{p,s}(x,y)\}$ та $\{V_{p,s}(x,y)\}$ згідно формул [5]

$$Z_{p+1,s}(x,y) = \begin{cases} \Phi(x,y),\ (x,y) \in \overline{E}_s, \\ \Omega^p_{s,s}(x,y) + T_s F^p_s(\xi,\eta),\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3, \end{cases}$$
$$V_{p+1,s}(x,y) = \begin{cases} \Phi(x,y),\ (x,y) \in \overline{E}_s,\ \overline{E}_3 \equiv \overline{E}_1, \\ \Omega_{s,s,p}(x,y) + T_s F_{p,s}(\xi,\eta),\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3, \end{cases} \tag{17}$$

$$\Omega^p_{s,s}(x,y) = \omega^p_{s,s}(x,y)\ |_{f^p_s(x,y)=F^p_s(x,y)}\,,$$

$$\Omega_{s,s,p}(x,y) = \omega_{s,s,p}(x,y)\ |_{f_{p,s}(x,y)=F_{p,s}(x,y)}\,,$$

де за нульове наближення $Z_{0,s}(x,y)$, $V_{0,s}(x,y) \in \overline{B}_1$ вибираємо довільні функції з простору $C(\overline{D}_s)$, які задовольняють умови

$$W_{0,s}(x,y) \ge 0,\ \ \alpha^*_{0,s}(x,y) \ge 0,\ \ \beta^*_{0,s}(x,y) \le 0,\ (x,y) \in \overline{D}_s,$$
$$Z_{0,s}(x,y)\ |_{\overline{E}_s} = V_{0,s}(x,y)\ |_{\overline{E}_s} = \Phi(x,y),\ s = 1,2,3. \tag{18}$$

Надалі функції $Z_{0,s}(x,y)$ та $V_{0,s}(x,y)$, які задовольняють умови (18) і належать $\overline{B}_1$, будемо називатимемо функціями порівняння задачі (1) — (7).

Із (15) та (17) при $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$ випливає справедливість формул:

$$Z_{p,s}(x,y) - Z_{p+1,s}(x,y) = \alpha_{p,s}(x,y) := Z_{p,s}(x,y) - \Omega^p_{s,s}(x,y) - T_s F^p_s(\xi,\eta),$$
$$V_{p,s}(x,y) - V_{p+1,s}(x,y) = \beta_{p,s}(x,y) := V_{p,s}(x,y) - \Omega_{s,s,p}(x,y) - T_s F_{p,s}(\xi,\eta), \tag{19}$$

$$W_{p+1,s}(x,y) = \Omega^p_{s,s}(x,y) - \Omega_{s,s,p}(x,y) + T_s(F^p_s(\xi,\eta) - F_{p,s}(\xi,\eta)), \tag{20}$$

$$\alpha_{p+1,s}(x,y) = \Omega^p_{s,s}(x,y) - \Omega^{p+1}_{s,s}(x,y) + T_s(F^p_s(\xi,\eta) - F^{p+1}_s(\xi,\eta)),$$
$$\beta_{p+1,s}(x,y) = \Omega_{s,s,p}(x,y) - \Omega_{s,s,p+1}(x,y) + T_s(F_{p,s}(\xi,\eta) - F_{p+1,s}(\xi,\eta)). \tag{21}$$

В силу (16), (18) маємо

$$V_{0,s}(x,y) \le \overline{V}_{0,s}(x,y) \le \overline{Z}_{0,s}(x,y) \le Z_{0,s}(x,y),\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3,$$

а отже, на підставі (14) $F^0_s(x,y) - F_{0,s}(x,y) \ge 0$ для всіх $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$, якщо тільки $Z_{0,s}(x,y), V_{0,s}(x,y) \in \overline{B}_1$. Відмітимо, якщо $\alpha^*_{0,s}(x,y) \ge 0$, $\beta^*_{0,s}(x,y) \le 0$, то і $\alpha_{0,s}(x,y) \ge 0$, $\beta_{0,s}(x,y) \le 0$ при $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$. Але тоді із (19), (20) при $p = 0$ одержуємо $Z_{0,s}(x,y) - Z_{1,s}(x,y) \ge 0$, $V_{0,s}(x,y) - V_{1,s}(x,y) \le 0$, $W_{1,s}(x,y) \ge 0$, тобто

$$V_{0,s}(x,y) \le V_{1,s}(x,y) \le Z_{1,s}(x,y) \le Z_{0,s}(x,y),\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3,$$

а отже, $Z_{1,s}(x,y)$, $V_{1,s}(x,y) \in \overline{B}_1$.

Вибираємо функції $d_{0,s}(x,y)$, $q_{0,s}(x,y)$, які задовольняють умови (16), таким чином, щоб при $(x,y) \in \overline{D}_s$ виконувались умови [6]

$$Z_{0,s}(x,y) - Z_{1,s}(x,y) - d_{0,s}(x,y)W_{0,s}(x,y) \geq 0,$$

$$V_{0,s}(x,y) - V_{1,s}(x,y) + q_{0,s}(x,y)W_{0,s}(x,y) \leq 0.$$

Тоді в силу (14) $F_s^0(x,y) - F_s^1(x,y) \geq 0$, $F_{0,s}(x,y) - F_{1,s}(x,y) \leq 0$, $(x,y) \in \overline{D}_s$.

Але в такому разі із (21) при $p = 0$ маємо $\alpha_{1,s}(x,y) \geq 0$, $\beta_{1,s}(x,y) \leq 0$, $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$.

Приймаючи функції $Z_{1,s}(x,y)$, $V_{1,s}(x,y)$ за вихідні і повторюючи вище наведені міркування, методом математичної індукції переконуємось, що якщо функції $d_{p,s}(x,y)$, $q_{p,s}(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$, $p \in \mathbb{N}$ на кожному кроці ітерації (17) вибирати таким чином, щоб виконувались умови

$$Z_{p,s}(x,y) - Z_{p+1,s}(x,y) - d_{p,s}(x,y)W_{p,s}(x,y) \geq 0,$$

$$V_{p,s}(x,y) - V_{p+1,s}(x,y) + q_{p,s}(x,y)W_{p,s}(x,y) \leq 0, \tag{22}$$

$$(x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3,\ p \in \mathbb{N},$$

то в області $\overline{B}_1$ мають місце нерівності

$$\begin{gathered} V_{p,s}(x,y) \leq V_{p+1,s}(x,y) \leq Z_{p+1,s}(x,y) \leq Z_{p,s}(x,y), \\ \alpha_{p,s}(x,y) \geq 0,\ \beta_{p,s}(x,y) \leq 0,\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3,\ \text{для всіх } p \in \mathbb{N} \end{gathered} \tag{23}$$

Зауважимо, що для всіх $p \in \mathbb{N}$ $\alpha_{p,s}(x,y) \geq \alpha^*_{p,s}(x,y) \geq 0$, $\beta_{p,s}(x,y) \leq \beta^*_{p,s}(x,y) \leq 0$, $(x,y) \in \overline{D}_s$.

Лема 2. *Якщо $F[u(x,y)] \in C_1(\overline{B})$ і в області $\overline{B}_1$ існують функції порівняння $Z_{0,s}(x,y)$ та $V_{0,s}(x,y) \in C(\overline{D}_s)$, $s = 1,2,3$, тоді множина функцій $d_{p,s}(x,y)$, $q_{p,s}(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_s$, які задовольняють нерівності (16), (22), не порожня.*

Дійсно, покладемо на кожному кроці ітерації (17)

$$d_{p,s}(x,y) = \begin{cases} \alpha^*_{p,s}(x,y)\rho^{-1}_{p,s}(x,y),\ W_{p,s}(x,y) \neq 0, \\ 0, W_{p,s}(x,y) = 0,\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3, \end{cases}$$

$$q_{p,s}(x,y) = \begin{cases} -\beta^*_{p,s}(x,y)\rho^{-1}_{p,s}(x,y),\ W_{p,s}(x,y) \neq 0, \\ 0, W_{p,s}(x,y) = 0,\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3, \end{cases}$$

$$\rho_{p,s}(x,y) = \alpha^*_{p,s}(x,y) - \beta^*_{p,s}(x,y) + W_{p,s}(x,y),\ p \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, таким чином вибрані функції $d_{p,s}(x,y)$, $q_{p,s}(x,y)$ задовольняють умови (16), а в силу (19)

$$Z_{p,s}(x,y) - Z_{p+1,s}(x,y) - d_{p,s}(x,y)W_{p,s}(x,y) \geq \alpha_{p,s}(x,y)(1 - W_{p,s}(x,y)\rho^{-1}_{p,s}(x,y)) \geq 0,$$

$$V_{p,s}(x,y) - V_{p+1,s}(x,y) + q_{p,s}(x,y)W_{p,s}(x,y) \leq \beta_{p,s}(x,y)(1 - W_{p,s}(x,y)\rho^{-1}_{p,s}(x,y)) \leq 0,$$

$$\text{для всіх } (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3,\ p \in \mathbb{N}.$$

Отже, справедлива наступна

Теорема 1. *Нехай $F[u(x,y)] \in C_1(\overline{B})$, коефіцієнти $a_i(x,y)$ задовольняють умову (8), а в області $\overline{B}_1$ існують функції порівняння задачі (1) — (7) $Z_{0,s}(x,y)$, $V_{0,s}(x,y) \in C(\overline{D}_s)$, $s = 1,2,3$.*

Тоді для послідовностей функцій $\{Z_{p,s}(x,y)\}$ та $\{V_{p,s}(x,y)\}$, які побудовані згідно закону (17), де $d_{p,s}(x,y)$, $q_{p,s}(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$, задовольняють умови (16), (22), в області $\overline{B}_1$ справедливі нерівності (23).

Покажемо, що побудовані таким чином послідовності функцій $\{Z_{p,s}(x,y)\}$ та $\{V_{p,s}(x,y)\}$ збігаються рівномірно в області $\overline{D}_s$, $s = 1,2,3$, до єдиного розв'язку відповідного інтегрального рівняння (9) — (11). В силу виконання в області $\overline{B}_1$ нерівностей (23), для цього достатньо показати, що $\lim\limits_{p\to\infty} W_{p,s}(x,y) = 0$, $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$.

Нехай

$$\max_s \left\{ \sup_{\overline{D}_s} W_{0,s}(x,y), \sup_{\overline{D}_s} W_{0,s}(x,\theta(x,y)) \right\} \le d,\ Q = \sup_{\overline{D}}(1, y - y_0 + x - x_1),$$

$$\max_{p,s} \sup_{\overline{D}_s}(1 - d_{p,s}(x,y) - q_{p,s}(x,y)) \le q,\ \sup_{\overline{D}\times\overline{D}} K(x,y;\xi,\eta) \le 0,25K.$$

Тоді із (20) методом математичної індукції переконуємось у справедливості оцінок

$$\max_s \sup_{\overline{D}_s} W_{p,s}(x,y) \le \frac{[LKQq(y - y_0 + x - x_1)]^p}{p!} d, \tag{24}$$

а отже,

$$\lim_{p\to\infty} Z_{p,s}(x,y) = \lim_{p\to\infty} V_{p,s}(x,y) = u_s(x,y),\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3.$$

Перейшовши у формулах (17) до границі, коли $p \to \infty$ переконуємось, що граничні функції $u_s(x,y)$ є розв'язками відповідних інтегральних рівнянь (9) — (11) при $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$.

Теорема 2. *Нехай $F[u(x,y)] \in C_1(\overline{B})$, коефіцієнти $a_i(x,y)$, $i = 1,2$ задовольняють умову (8) і в області $\overline{B}_1$ існують функції порівняння задачі (1) — (7) $Z_{0,s}(x,y)$, $V_{0,s}(x,y) \in C(\overline{D}_s)$, $s = 1,2,3$.*

Тоді послідовності функцій $\{Z_{p,s}(x,y)\}$ та $\{V_{p,s}(x,y)\}$, побудовані згідно закону (17), де $d_{p,s}(x,y)$, $q_{p,s}(x,y) \in C(\overline{D}_s)$, $s = 1,2,3$, задовольняють умови (16), (22):

а) збігаються рівномірно до єдиного розв'язку відповідного інтегрального рівняння (9) — (11) при $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$;

б) мають місце оцінки (24);

в) в області $\overline{B}_1$ виконуються нерівності

$$V_{p,s}(x,y) \le V_{p+1,s}(x,y) \le u_s(x,y) \le Z_{p+1,s}(x,y) \le Z_{p,s}(x,y),$$
$$(x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3, \tag{25}$$

для всіх $p \in \mathbb{N}$, де $u_s(x,y)$ — єдиний розв'язку відповідного інтегрального рівняння (9) — (11) при $(x,y) \in \overline{D}_s$,

г) збіжність ітераційного методу (17), (16), (22) не повільніша збіжності двостороннього методу Пікара (коли $d_{p,s}(x,y) = q_{p,s}(x,y) \equiv 0$).

Доведення. Єдиність розв'язку інтегральних рівнянь (9) — (11) при $(x, y) \in \overline{D}_s$, $s = 1, 2, 3$, доводиться методом від супротивного.

Доведемо справедливість нерівностей (25). З цією метою припустимо, що в деякій точці $(x, y) \in \overline{D}_s$ для деякого номера p, наприклад, $u_s(x, y) > Z_{p,s}(x, y)$.

Тоді в силу (23) для всіх $n \in \mathbb{N}$ в розглядуваній точці $(x, y) \in \overline{D}_s$

$$u_s(x, y) > Z_{p,s}(x, y) \geq Z_{p+1,s}(x, y),$$

а отже, в даній точці послідовність функцій $\{Z_{p+n,s}(x, y)\}$ при $n \to \infty$ не збігається до розв'язку $u_s(x, y)$, що протирічить доведеному. Аналогічно доводяться всі інші нерівності (25).

Нехай $Z_{p,s}(x, y), V_{p,s}(x, y) \in \overline{B}_1$ — двосторонні наближення до розв'язків відповідних інтегральних рівнянь (9) — (11) при $(x, y) \in \overline{D}_s$, $s = 1, 2, 3$, побудовані за деяким методом і вони задовольняють умови $W_{p,s}(x, y) \geq 0$, $\alpha^*_{p,s}(x, y) \geq 0$, $\beta^*_{p,s}(x, y) \leq 0$.

Позначимо через $Z^*_{p+1,s}(x, y)$, $V^*_{p+1,s}(x, y)$ наступні наближення, побудовані згідно двостороннього методу Пікара. Тоді при $(x, y) \in \overline{D}_s$, в силу (14), (16), маємо

$$Z^*_{p+1,s}(x, y) - Z_{p+1,s}(x, y) = \omega^p_{s,s}(x, y) - \Omega^p_{s,s}(x, y) + T_s(f^p_s(\xi, \eta) - F^p_s(\xi, \eta)) \geq 0,$$

$$V^*_{p+1,s}(x, y) - V_{p+1,s}(x, y) = \omega_{s,s,p}(x, y) - \Omega_{s,s,p}(x, y) + T_s(f_{p,s}(\xi, \eta) - F_{p,s}(\xi, \eta)) \leq 0,$$

тобто збіжність методу (17), (16), (22) не повільніша збіжності двостороннього методу Пікара.

Зауважимо, що в залежності від вибору функцій $d_{p,s}(x, y)$ та $q_{p,s}(x, y)$ в алгоритмі (17), (16), (22) ми отримаємо різні модифікації двостороннього методу.

Наслідок 1. *Нехай коефіцієнти рівняння (1) $a_1(x, y) \in C^{(1.0)}(D)$, $a_2(x, y) \in C^{(0.1)}(D)$ задовольняють умову (8) і виконуються вимоги теореми 2.*

Тоді розв'язок крайової задачі (1) — (7) в області $\overline{D}$ існує і він єдиний, причому при виконанні умови (13) він буде регулярним, в супротивному випадку — іррегулярним.

Наслідок 2. *Нехай $\varphi_i(x) = \varphi(y) = \psi(x) = 0$, $i = 1, 2$, $F[u(x, y)] \in C_1(\overline{B})$, причому $F[u(x, y)] \equiv H[u(x, y); 0]$.*

Тоді, якщо $F[0] \leq (\geq)0$ в області $\overline{B}$, то розв'язок задачі (1) — (7) при $(x, y) \in \overline{D}_s$ задовольняє нерівність $u(x, y) \leq (\geq)0$.

Розглянемо поряд із рівнянням (1) рівняння вигляду

$$\begin{gathered} L_2 Z(x, y) = f_1(x, y, Z(x, y), Z(x, \theta(x, y)) := f_1[Z(x, y)], \\ f_1 : \overline{B} \to \mathbb{R},\ \overline{B} \in \mathbb{R}^4. \end{gathered} \tag{26}$$

Надалі будемо вважати, що праві частини рівнянь (1), (26) задовольняють наступні умови:

1) $f[u(x, y)] \in C_1(\overline{B})$,

2) функція $f_1[Z(x,y)] \in C(\overline{B})$ і в області $\overline{B}$ має обмежені частинні похідні першого порядку по $Z(x,y)$ і $Z(x,\theta(x,y))$, які задовольняють умови

$$\frac{\partial f[Z(x,y)]}{\partial Z(x,y)} + a_{2y}(x,y) + a_1(x,y)a_2(x,y) \geq 0, \ \frac{\partial f[Z(x,y)]}{\partial Z(x,\theta(x,y))} \geq 0, \qquad (27)$$

3) для всякої з простору $C^*(\overline{D})$ функції $V(x,y) \in \overline{B}$

$$f_1[V(x,y)] \geq (\leq) f[V(x,y)] \qquad (28)$$

Теорема 3. *Нехай коефіцієнти $a_i(x,y)$, $i = 1,2$ задовольняють умову (8), а праві частини рівнянь (1), (26) $f[u(x,y)]$ та $f_1[Z(x,y)]$ задовольняють вище наведені умови 1)-3) і в області $\overline{B}_1$ існують функції порівняння задач (1) — (7), (26), (2) — (7).*

Тоді для розв'язків цих задач при $(x,y) \in \overline{D}$ виконуються нерівності

$$u(x,y) \geq (\leq) Z(x,y) \qquad (29)$$

Доведення. Згідно теореми 2 і наслідку 1 розв'язки задач (1) — (7), (26), (2) — (7) існують і вони є єдині (регулярні або іррегулярні), а отже, позначивши $W(x,y) := Z(x,y) - u(x,y)$ і використавши теорему Лагранжа про скінчені прирости, матимемо

$$W_{xy}(x,y) + a_1(x,y)W_x(x,y) + a_2(x,y)W_y(x,y) =$$

$$= b_1(x,y)W(x,y) + b_2(x,y)W(x,\theta(x,y)) + f_1[u(x,y)] - f[u(x,y)],$$

де $b_i(x,y)$, $i = 1,2$ — частинні похідні першого порядку від функції $f_1[Z(x,y)]$ відповідно по $Z(x,y)$ та $Z(x,\theta(x,y))$ при деяких їх фіксованих значеннях, що належать $\overline{B}$, $(x,y) \in \overline{D}$.

Очевидно, функція $W(x,y)$ задовольняє однорідні умови (2) — (6), а

$$F[W(x,y)] \equiv [b_1(x,y) + a_{2y}(x,y) + a_1(x,y)a_2(x,y)W(x,y) +$$

$$+ b_2(x,y)W(x,\theta(x,y)) + f_1[u(x,y)] - f[u(x,y)],$$

тобто в силу (27), (28) $F[0] \geq (\leq)0$. На підставі наслідку 2 $W(x,y) \geq (\leq)0$ при $(x,y) \in \overline{D}$, тобто справедливі нерівності (29).

1. *Маринець В.В., Маринець Т.Й., Добридень А.В.* Про одну некласичну задачу теорії рівнянь гіперболічного типу // Праці Міжнародного симпозіуму "Питання оптимізації обчислень" — Київ: Інститут кібернетики ім.В.М.Глушкова НАНУ, 2009. — Т.2. — С.79—84.
2. *Маринець В.В., Питьовка О.Ю.* Про одну крайову задачу для диференціально-функціональних рівнянь гіперболічного типу // Наук. вісник Ужгород.ун–ту. Сер. матем і інформ. — 2010. — Вип.20.— С.79—89.
3. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. — М.:Мир, 1969. - 448с.
4. *Перестюк М.О., Маринець В.В.* Теорія рівнянь математичної фізики.— К:Либідь, 2006. — 424 с.
5. *Маринець В.В.* Деякі підходи до побудови наближеного розв'язку задачі Гурса для систем визначених квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними з аргументом, що відхиляється // Укр.мат.журнал — 1995. —Т.47, №12. — С.1667—1675.
6. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969. — 456 с.

Одержано 05.09.2011