УДК 517.9

Я. В. Варга (Ужгородський нац. ун-т)

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕГРАЛЬНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

We give a new approach for the investigation of existence and construction of an approximate solutions of nonlinear non-autonomous systems of ordinary differential equations under nonlinear integral boundary conditions depending on the derivative. The constructivity of a suggested technique is shown on the example of non-linear integral boundary value problem with two solutions.

Застосовано новий підхід для дослідження існування та побудови наближених розв'язків нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь, підпорядкованих нелінійним інтегральним крайовим умовам, які залежні від похідної. Доцільність запропонованої техніки показано на прикладі нелінійної інтегральної крайової задачі з двома розв'язками.

1. Вступ

В роботі [1] було запропоновано новий підхід для дослідження існування і побудови наближеного розв'язку задач нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Мета цієї роботи це застосувати цю техніку, для дослідження існування та побудови наближеного розв'язку нового класу нелінійних крайових задач з інтегральними крайовими умовами, які містять похідну.

Згідно з основною ідеєю цього методу, у кожному конкретному випадку задана крайова задача зводиться особливим чином до "збуреної" крайової задачі з невідомими "керуючими" параметрами. Розв'язок цієї модифікованої крайової задачі знаходиться в аналітичній формі за допомогою методу послідовних наближень. В свою чергу "збурена" задача супроводжується системою визначальних рівнянь (алгебраїчних чи трансцендентних), з якої і знаходяться числові значення параметрів, що фігурують у крайових умовах поставленої задачі. Такий підхід належить до [2–4], [6], [7].

Встановлюються умови збіжності побудованої послідовності функцій до деякої граничної функції, а також її зв'язок з розв'язком вихідної крайової задачі. Отримані теоретичні результати демонструються ілюстративним прикладом.

2. Означення

– у рівностях, а також операціях $|\cdot|, \max, \min, \sup$ та $\inf$ між векторами та матрицями розуміються покомпонентно;

– $r(Q)$ — спектральний радіус матриці Q;

Означення 1. *Для будь якого $z \in \mathbb{R}^n$ визначаємо його покомпонентний $\rho \in \mathbb{R}^n$ – окіл:*

$$B(z,\rho) := \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi - z| \leq \rho\},$$

Аналогічно, для заданої обмеженої можини $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, визначаємо покомпонентний $\rho \in \mathbb{R}^n$– окіл

$$B(\Omega,\rho) := \bigcup_{\xi\in\Omega} B(\xi,\rho).$$

Означення 2. *Для заданих обмежених множин $D_a \subset \mathbb{R}^n$ і $D_b \subset \mathbb{R}^n$, введемо область*

$$D_{a,b} := (1-\theta)z + \theta\eta,\ z \in D_a,\ \eta \in D_b,\ \theta \in [0,1] \tag{1}$$

і його $\rho-$окіл

$$D := B(D_{a,b}, \rho)\ . \tag{2}$$

Для множини $D \subset \mathbb{R}^n$, функція $f : [a,b] \times D \to \mathbb{R}^n$, задовольняє умову Ліпшиця з невід'ємною матрицею K:

$$f \in Lip(K, D)$$

якщо нерівність

$$|f(t,u) - f(t,v)| \le K\,|u - v| \tag{3}$$

справедлива для всіх $\{u, v\} \subset D$ та $t \in [a,b]$.

На основі заданої функції $f : [a,b] \times D \to \mathbb{R}^n$ визначимо вектор

$$\delta_{[a,b],D}(f) := \frac{1}{2}\left[\max_{(t,x)\in[a,b]\times D} f(t,x) - \min_{(t,x)\in[a,b]\times D} f(t,x)\right]. \tag{4}$$

3. Постановка задачі та параметризація крайових умов

Розглянемо нелінійну інтегральну крайову задачу

$$\frac{dx}{dt} = f\,(t,x)\,,\ \ t \in [a,b]\,, \tag{5}$$

$$Ax(a) + \int\limits_a^b [g(s, x(s)) + h(s, f\,(s, x(s)))]\,ds + Cx(b) = d, \tag{6}$$

де A, C — задані квадратні n –вимірні матриці, d — заданий n -вимірний вектор.

Нехай області D_a і D_b — опуклі підмножини $\mathbb{R}^n$ де шукаємо значення $x(a)$, $x(b)$, розв'язку крайової задачі (5), (6) відповідно. На основі областей D_a і D_b введемо область $D_{a,b}$ відповідно до (1) і її покомпоний $\rho-$ окіл як і в (2). Таким чином, область D визначається відповідно до (2).

Ми вважаємо, що в функції $f : [a,b] \times D \to \mathbb{R}^n$, $g : [a,b] \times D \to \mathbb{R}^n$, і $h : [a,b] \times D \to \mathbb{R}^n$ задовольняють умову Ліпшиця в області D і ρ задовольняє нерівність

$$\rho \ge \frac{b-a}{2}\delta_{[a,b],D}(f), \tag{7}$$

де $\delta_{[a,b],D}(f)$ наводиться в (4) і для максимального по модулю власного значення матриці

$$Q = \frac{3(b-a)}{10}K \tag{8}$$

виконується

$$r(Q) < 1. \tag{9}$$

Важливо підкреслити, що $D \subset \mathbb{R}^n$ обмежена і, таким чином, умова Ліпшиця не передбачається глобально.

Задача полягає у знаходженні неперервно диференційовного розв'язку системи диференціальних рівнянь (5) , який задовольняє інтегральні крайові умови (6).

Покажемо, що замість нелінійної задачі (5), (6) з інтегральними крайовими умовами доцільно розглядати систему диференціальних рівнянь (5) при певних параметризованих лінійних двоточкових крайових умовах. А саме, вводимо вектори параметрів

$$z = col(z_1, z_2, ..., z_n),\ \eta = col(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$$

формально поклавши

$$z := x(a), \eta = x(b). \tag{10}$$

Таким чином, замість вихідної інтегральної крайової задачі (5), (6) будемо розглядати двоточкову КЗ з розділеними параметрезованими крайовими умовами

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x\right), t \in [a, b] \tag{11}$$

$$x(a) = z,\ x(b) = \eta. \tag{12}$$

Лема 1. *([5],Лема 3.13). Нехай $f : [\tau, \tau + I] \to \mathbb{R}^n$ є неперервною функцією. Тоді для довільного $t \in [\tau, \tau + I]$, має місце нерівність*

$$\left| \int\limits_{\tau}^{t} \left[f(\tau) - \frac{1}{I} \int\limits_{\tau}^{\tau+I} f(s)ds \right] d\tau \right| \le \alpha_1(t, \tau, I)\ \delta_{[\tau,\tau+I]}(f), \tag{13}$$

де

$$\alpha_1(t, \tau, I) = 2\left(t - \tau\right)\left(1 - \frac{t-\tau}{I}\right),\ |\alpha_1(t, \tau, I)| \le \frac{I}{2},\ t \in [\tau, \tau + I], \tag{14}$$

і

$$\delta_{[\tau,\tau+I]}(f) = \frac{\max\limits_{t\in[\tau,\tau+I]} f(t) - \min\limits_{t\in[\tau,\tau+I]} f(t)}{2}.$$

Лема 2. *([5], Лема 3.16). Нехай послідовність безперервних функцій $\{\alpha_m(t, \tau, I)\}_{m=0}^{\infty}$, для $t \in [\tau, \tau + I]$ визначається рекурентним співвідношенням*

$$\alpha_{m+1}(t, \tau, I) = \left(1 - \frac{t-\tau}{I}\right) \int\limits_{\tau}^{t} \alpha_m(s, \tau, I)ds + \frac{t-\tau}{I} \int\limits_{t}^{\tau+I} \alpha_m(s, \tau, I)ds, m = 0, 1, 2, ..., \tag{15}$$

де

$$\alpha_0(t, \tau, I) = 1,$$

тоді справедлива наступна оцінка для $t \in [\tau, \tau + I]$:

$$\alpha_{m+1}(t, \tau, I) \le \frac{10}{9}\left(\frac{3I}{10}\right)^m \alpha_1(t, \tau, I),\ m \geqslant 0, \tag{16}$$

$$\alpha_{m+1}(t, \tau, I) \le \frac{3I}{10}\alpha_m(t, \tau, I), m \geqslant 2,$$

де $\alpha_1(t, \tau, I)$ наводиться в (14).

4. Збіжність послідовних наближень

Пов'яжемо з двоточковою КЗ (11), (12) послідовність функцій

$$x_{m+1}(t,z,\eta) = z + \int\limits_a^t f(s, x_m(s,z,,\eta))ds - \frac{t-a}{b-a}\int\limits_a^b f(\tau, x_m(\tau,z,\eta))d\tau + \tag{17}$$

$$+\frac{t-a}{b-a}\left[\eta - z\right],\ t\in[a,b],\ m = 1,2,...,$$

яка задовольняє (12) для всіх $z,\eta\in\mathbb{R}^n$, де

$$x_0(t,z,\eta) = z + \frac{t-a}{b-a}\left[\eta - z\right] = \left(1-\frac{t-a}{b-a}\right)z + \frac{t-a}{b-a}\eta, t\in[a,b], \tag{18}$$

$z\in D_a,\ \eta\in D_b$ розглядаються в якості параметрів.

З (18) легко бачити, що $x_0(t,z,\eta)\in D$ як випукла комбінація векторів z і η, коли $z\in D_a,\ \eta\in D_b$.

Наступне твердження встановлює рівномірну збіжність послідовності (17).

Теорема 1. *Нехай існує невід'ємний вектор ρ що задовольняє нерівності (7) і $f:[a,b]\times D\to\mathbb{R}^n$ є функція, що задовольняє умову Ліпшиця $f\in Lip(K,D)$ в області D вигляду (2) з матрицею K для якої*

$$r\left(Q\right) < 1,\ Q = \frac{3(b-a)}{10}K.$$

Тоді, для будь-яких фіксованих $(z,\eta)\in D_a\times D_b$:

1. Функції послідовності (17) неперервно диференційовних функцій на відрізку $t\in[a,b]$, мають значення в область D і задовольняють двоточковим розділеним крайовим умовам (12).

2. Послідовність функцій (17) при $t\in[a,b]$ рівномірно збігається при $m\to\infty$ до граничної функції

$$x_\infty\left(t,z,\eta\right) = \lim_{m\to\infty} x_m(t,z,\eta).$$

3. Гранична функція задовольняє умови:

$$x_\infty\left(a,z,\eta\right) = z$$

та та

$$x_\infty\left(b,z,\eta\right) = \eta$$

.

4. Функція $x_\infty\left(t,z,\eta\right)$ є единим неперервно диференційовним розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = z + \int\limits_a^t f(s,x(s))ds - \frac{t-a}{b-a}\int\limits_a^b f(s,x(s))ds + \frac{t-a}{b-a}\left[\eta - z\right], \tag{19}$$

або еквівалентної йому задачі Коші для модифікованої системи:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \ + \frac{1}{b-a}\Delta(z,\eta),$$
$$x\,(a) = z \tag{20}$$

де $\Delta(z,\eta)) : D_a \times D_b \to \mathbb{R}^n$ *- відображення, визначене формулою:*

$$\Delta(z,\eta) := \eta - z - \int\limits_a^b f(s, x_\infty\,(s,z,\eta))ds. \tag{21}$$

5. Справедлива оцінка

$$|x_\infty\,(t,z,\eta) - x_m\,(t,z,\eta)| \leqslant \frac{10}{9}\alpha_1(t,a,b)Q^m\,(1_n - Q)^{-1}\,\delta_{[a,b],D}(f), \tag{22}$$

для будь-якого $t \in [a,b]$ *і* $m \geq 0$, *де* $\delta_{[a,b],D}(f)$ *визначений формулою (4) і*

$$\alpha_1(t,a,b) = 2(t-a)\left(1 - \frac{t-a}{b-a}\right),\ \alpha_1(t,a,b) \leq \frac{b-a}{2}. \tag{23}$$

Доведення. Справедливість твердження 1 перевіряється прямим обчисленням. Аналогічно [1] доведемо, що послідовність функцій (17) належить області D і є послідовністю Коші у банаховому просторі $C\left([a,b]\,, \mathbb{R}^n\right)$. Дійсно, з використанням оцінки (13) з Леми1 для $\tau = a$, $I = b - a$, співвідношення (17) при $m = 0$, $t \in [a,b]$ випливає що

$$|x_1\,(t,z,\eta) - x_0\,(t,z,\eta)| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\alpha_1(t,a,b)\left[\underset{t\in[a,b]}{max} f(t, x_0\,(t,z,\eta)) - \underset{t\in[a,b]}{min} f(t, x_0\,(t,z,\eta))\right]$$
$$\leq \alpha_1(t,a,b)\delta_{[a,b],D}(f) \leq \frac{b-a}{2}\delta_{[a,b],D}(f), \tag{24}$$

приходимо до висновку, що $x_1\,(t,z,\lambda,\eta) \in D$, при $(t,z,\eta) \in [a,b] \times D_a\ \times D_b$.

Використовуючи це і міркуючи за індукцією згідно Леми1 легко встановити, що

$$|x_m\,(t,z,\eta) - x_0\,(t,z,\eta)| \leq \alpha_1(t,a,b)\delta_{[a,b],D}(f) \leq \frac{b-a}{2}\delta_{[a,b],D}(f),\ m = 2,3,...,$$

це означає, що всі функції послідовності (17) містяться в області D, для всіх $m = 1,2,3,..$ та $(t,z,\eta) \in [a,b] \times D_a\ \times D_b$.

Розглянемо різницю:

$$x_{m+1}\,(t,z,\eta) - x_m\,(t,z,\eta) =$$
$$= \int\limits_a^t \left[f\left(s, x_m\,(s,z,\eta)\right) - f\left(s, x_{m-1}\,(s,z,\eta)\right)\right] ds -$$
$$- \frac{t-a}{b-a}\int\limits_a^b \left[f\left(s, x_m\,(s,z,\eta)\right) - f\left(s, x_{m-1}\,(s,z,\eta)\right)\right] ds,\ m = 1,2,... \tag{25}$$

та позначимо:

$$r_m(t,z,\eta)=\left|x_m\left(t,z,\eta\right)-x_{m-1}\left(t,z,\eta\right)\right|,m=1,2,....$$

Відповідно до рекурентного співвідношення (15) Леми 2, використовуючи умову Ліпшиця (3) і умову (16), для $m=1$ з (25) і (24) випливає, що

$$r_2(t,z,\eta)\leq K\left[\left(1-\frac{t-a}{b-a}\right)\int\limits_0^t\alpha_1(s,a,b)ds+\frac{t-a}{b-a}\int\limits_0^T\alpha_1(s,a,b)ds\right]\delta_{[a,b],D}(f)\leq$$

$$\leq K\alpha_2(t,a,b)\delta_{[a,b],D}(f)\leq\frac{10}{9}Q\alpha_1(t,a,b)\delta_{[a,b],D}(f),$$

де матриця Q має вигляд (8). За індукцією легко встановити, що

$$r_{m+1}(t,z,\eta)\leq K^m\alpha_{m+1}(t,a,b)\delta_{[a,b],D}(f)\leq\frac{10}{9}Q^m\alpha_1(t,a,b)\delta_{[a,b],D}(f),\qquad(26)$$

Таким чином, з урахуванням (26)

$$|x_{m+j}(t,z,\eta)-x_m(t,z,\eta)|\leq$$

$$\leq|x_{m+j}(t,z,\eta)-x_{m+j-1}(t,z,\eta)|+|x_{m+j-1}(t,z,\eta)-x_{m+j-2}(t,z,\eta)|+...+$$

$$+|x_{m+1}(t,z,\eta)-x_m(t,z,\eta)|=\sum_{i=1}^{j}r_{m+i}(t,z,\eta)\leq\frac{10}{9}\alpha_1(t,a,b)\sum_{i=1}^{j}Q^{m+i-1}\delta_{[a,b],D}(f)=$$

$$=\frac{10}{9}\alpha_1(t,a,b)Q^m\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\delta_{[a,b],D}(f),\qquad(27)$$

де $\delta_{[a,b],D}(f)$ має вигляд (4). Так як максимальне власне значення матриці Q вигляду (9) не перевищує одиницю, то

$$\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\leq\left(1_n-Q\right)^{-1},\ \lim_{m\to\infty}Q^m=O_n.$$

Таким чином, згідно з критерієм Коші, з нерівності (27) випливає що, послідовність функцій $\{x_m\left(t,z,\eta\right)\}_{m=0}^{\infty}$ вигляду (17) рівномірно збігається в області $(t,z,\eta)\in[a,b]\times D_a\ \times D_b$ до граничної функції $x_\infty\left(t,z,\eta\right)$.Так як всі функції послідовності (17) задовольняють крайові умови (12) для всіх значень введених параметрів, можна зробити висновок, що гранична функція $x_\infty\left(t,z,\eta\right)$ також їх задовольняє. Перейшовши у рівності (17) до границі при $m\to\infty$ отримаємо, що гранична функція задовольняє інтегральне рівняння (19) або що те ж саме є розв'язком задачі Коші (20), де $\Delta(z,\eta)$ задається формулою (21). При переході до границі при $j\to\infty$ у (27) отримаємо оцінку (22), що і завершує доведення.

5. Зв'язок граничної функції $x_\infty\left(\cdot,z,\eta\right)$ з розв'язком вихідної КЗ

Встановимо зв'язок граничної функції $x_\infty\left(\cdot,z,\eta\right)$ послідовності функцій (17) з розв'язком вихідної крайової задачі (5), (6). З цією метою розглянемо задачу

Коші для системи диференціальних рівнянь з постійним збуренням у правій частині:

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x\right) + \frac{1}{b-a}\mu,\ t \in \left[a, b\right], \tag{28}$$

з крайовою умовою

$$x(a) = z, \tag{29}$$

де

$$\mu = col\left(\mu_1, ..., \mu_n\right) \in \mathbb{R}^n$$

є керуючим параметром.

Теорема 2. *Нехай $z \in D_a$ і $\eta \in D_b$ - задані вектори. Припустимо, що для системи диференціальних рівнянь (5) мають місце умови Теореми 1. Тоді для того, щоб розв'язок $x(\cdot, a, z)$ задачі Коші (28), (29) задовольняв також і параметризовані двоточкові крайові умови (12), необхідно і достатньо, щоб параметр μ був заданий рівністю:*

$$\mu := \eta - z - \int_a^b f(s, x_\infty\left(s, z, \eta\right))ds, \tag{30}$$

де $x_\infty\left(\cdot, z, \eta\right)$ - гранична функція послідовності (17). Крім того, в цьому випадку

$$x(\cdot, a, z) = x_\infty\left(\cdot, z, \eta\right). \tag{31}$$

Доведення проводиться аналогічно як в Теоремі 2, [8].

Теорема 3. *В умові Теореми 1, гранична функція*

$$x_\infty\left(t, z^*, \eta^*\right) = \lim_{m\to\infty} x_m(t, z^*, \eta^*) \tag{32}$$

послідовності (17) є неперервно диференційовним розвязком інтегральної крайової задачі (5), (6) тоді і тільки тоді, коли пара (z^*, η^*) задовольняє систему $2n$ визначальних рівнянь

$$\begin{aligned} \Delta(z, \eta) &:= \eta - z - \int_a^b f(s, x_\infty\left(s, z, \eta\right))ds = 0, \\ \Lambda(z, \eta) &:= \int_a^b \left[g(s, x_\infty\left(s, z, \eta\right)) + h(s, f(s, x_\infty\left(s, z, \eta\right)))\right] ds - d = 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Доведення. *Для доведення достатньо застосувати Теорему 2 і зауважити, що диференціальне рівняння (20) співпадає з (5) тоді і тільки тоді коли (z^*, η^*) задовольняє рівняння:*

$$\Delta(z^*, \eta^*) := \eta^* - z^* - \int_a^b f(s, x_\infty\left(z^*, \eta^*\right))ds = 0.$$

Очевидно, що гранична функція $x_\infty\left(\cdot, z^*, \eta^*\right)$ збігається з розв'язком інтегральної крайової задачі (5), (6) тоді і тільки тоді, коли $x_\infty\left(\cdot, z^*, \eta^*\right)$ задовольняє *рівняння:*

$$\int\limits_a^b \left[g(s, x_\infty(\cdot, z^*, \eta^*)) + h(s, f(s, x_\infty(\cdot, z^*, \eta^*)))\right] ds = d.$$

Це означає, що гранична функція $x_\infty(z^*, \eta^*)$ є розв'язком інтегральної крайової задачі (5), (6) тоді і тільки тоді, коли виконуться (33). Останнє твердження і доводить теорему.

Покажемо, що система визначальних рівнянь (33) виявляє всі можливі розв'язки вихідної нелінійної інтегральної крайової задачі (5), (6).

Теорема 4. *Нехай виконуються всі умови Теореми 1. Крім того, існують вектори $(z^0, \eta^0) \in D_a \times D_b$ які задовольняють систему визначальних рівнянь (33), тоді інтегральна крайова задача (5), (6) має розв'язок $x^0(\cdot)$ такий, що*

$$x^0(a) = z^0,\ x^0(b) = \eta^0,$$

$$\int\limits_a^b \left[g(s, x^0(s)) + h(s, f(s, x^0(s)))\right] ds = d.$$

Крім того, він задається формулою:

$$x^0(t) = x_\infty\left(t, z^0, \eta^0\right) = \lim_{m \to \infty} x_m(\cdot, z^0, \eta^0),\ \ t \in [a, b]\,. \tag{34}$$

Якщо інтегральна крайова задача (5), (6) має розв'язок $x^0(\cdot)$, то він задається формулою (34) і система визначальних рівнянь (33) задовольняється при

$$z = x^0(a),\, \eta = x^0(b)\,. \tag{35}$$

Доведення. *Якщо існує пара $(z^0, \eta^0) \in D_a \times D_b$ яка задовольняє систему визначальних рівнянь (33), то на основі Теореми 3 функція (34) є розв'язком вихідної інтегральної крайової задачі (5), (6).*

З іншого боку, якщо $x^0(\cdot)$ є розв'язком крайової задачі (5), (6), то ця функція є розв'язком задачі Коші (28), (29) при

$$\mu = 0\ \ i\ z = x^0(a).$$

Так як $x^0(\cdot)$ задовольняє інтегральні крайові умови (6), тоді з Теореми 3 в силу рівності (32) випливає, що має місце рівність (34).

Крім того,

$$\mu := \eta - z - \int\limits_a^b f(s, x_\infty(s, z, \eta))ds = 0, \tag{36}$$

де пара векторів (z, η) визначаються співвідношенням (35). З (36) маємо, що перше рівняння визначальної системи (33) виконуться, якщо (z, η) визначається згідно з (35). З використанням крайових умов (6), отримуємо, що два інших рівняння (33) визначальної системи також мають місце.

Таким чином ми визначили в (35) такі значення (z, η) які задовольняють систему визначальних рівнянь(33), що і доводить теорему.

Для дослідження розв'язності визначальної системи (33) аналогічно [6] розглядатимемо наближену визначальну систему

$$\begin{aligned}
&\Delta_m(z,\eta) := \eta - z - \int\limits_a^b f(s, x_m(s,z,\eta))ds = 0,\\
&\Lambda_m(z,\eta) := \int\limits_a^b \left[g(s, x_m(s,z,\eta)) + h(s, f(s, x_m(s,z,\eta)))\right] ds - d = 0,
\end{aligned} \tag{37}$$

яка може бути побудована явно.

6. Ілюстративний приклад

Застосуємо описаний вище підхід для системи диференціальних рівняннь

$$\begin{cases}
x_1'(t) = \dfrac{t}{5}x_1(t) + \dfrac{1}{10}x_2^2(t) + \dfrac{t^6}{250} - \dfrac{t^3}{100} + \dfrac{t}{5},\\
x_2'(t) = \dfrac{t^2}{10}x_2^2(t) + \dfrac{t}{8}x_1(t) - \dfrac{t^5}{50} - \dfrac{t^3}{160} + \dfrac{3t^2}{5} + \dfrac{t}{16}, \quad t \in [0,1],
\end{cases} \tag{38}$$

з інтегральними крайовими умовами

$$\begin{aligned}
x_1\left(\frac{1}{4}\right) + \int_0^1 [s x_1(s) x_2(s) + f_1^2(s, x_1(s), x_2(s))]ds + x_1\left(\frac{1}{2}\right) = d_1,\\
\int_0^1 [s^2 x_2^2(s) + f_2^2(s, x_1(s), x_2(s))]ds + x_2\left(\frac{1}{6}\right) = d_2.
\end{aligned} \tag{39}$$

Очевидно, (38), (39) є окремим випадком для (5), (6) при $a := 0$, $b := 1$,

$$f(t, x_1, x_2) := \begin{pmatrix} \dfrac{t}{5}x_1 + \dfrac{1}{10}x_2^2 + \dfrac{t^6}{250} - \dfrac{t^3}{100} + \dfrac{t}{5}, \\ \dfrac{t^2}{10}x_2^2 + \dfrac{t}{8}x_1 - \dfrac{t^5}{50} - \dfrac{t^3}{160} + \dfrac{3t^2}{5} + \dfrac{t}{16}, \end{pmatrix},$$

$g(t, x_1, x_2) := \begin{pmatrix} t x_1 x_2 \\ t^2 x_2^2 \end{pmatrix}$, $h(t, f(t, x_1, x_2)) := \begin{pmatrix} f_1^2(t, x_1, x_2) \\ f_2^2(t, x_1, x_2) \end{pmatrix}$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} -767/2100 \\ 247/2250 \end{pmatrix}.$$

Можна перевірити, що система функцій:

$$x_1^*(t) = \frac{t^2}{20} - \frac{1}{2}, \; x_2^*(t) = \frac{t^3}{5}, \tag{40}$$

є точним розв'язком задачі (38), (39).

Введемо наступні параметри:

$$\begin{aligned}
z &:= x(0) = col(x_1(0), x_2(0)) = col(z_1, z_2),\\
\eta &:= x(1) = col(x_1(1), x_2(1)) = col(\eta_1, \eta_2).
\end{aligned}$$

Виберемо області D_a і D_b:

$$D_a = D_b = \{(x_1, x_2) : -1.2 \le x_1 \le -0.2, \; -1 \le x_2 \le 0.4\}.$$

У цьому випадку, опукла лінійна комбінація $D_{a,b}$ форми (1) для векторів $z \in D_a$ і $\eta \in D_b$

$$D_{a,b} = D_a = D_b.$$

$$\rho := col\,(0.2;\ 0.2)\,.$$

Таким чином область D буде наступною:

$$D = \{(x_1, x_2) : -1.4 \le x_1 \le 0,\ -1.2 \le x_2 \le 0.6\}\,.$$

Матриця, яка фігурує в умові Ліпшиця (3) для правої частини системи диференціальних рівнянь (38) в області D має вигляд

$$K = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/25 \\ 1/8 & 1/10 \end{bmatrix}$$

і

$$Q = \frac{3}{20}\begin{bmatrix} 1/5 & 1/25 \\ 1/8 & 1/10 \end{bmatrix},\ r(Q) = 0.07098 < 1,$$

$$\delta_{[a,b],D}(f) := \frac{1}{2}\left[\max_{(t,x)\in[0,1]\times D} f(t,x) - \min_{(t,x)\in[0,1]\times D} f(t,x)\right] = \begin{bmatrix} 0.212, \\ 0.351426 \end{bmatrix},$$

$$\rho = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix} \ge \frac{b-a}{2}\delta_{[a,b],D}(f) = \begin{bmatrix} 0.106, \\ 0.175713 \end{bmatrix}.$$

Отже, для даної інтегральної КЗ виконуються всі умови Теореми 1.

На першому кроці ($m = 1$) на основі послідовних наближень (17), використовуючи Maple 15 отримаємо

$$\begin{aligned} x_{11}(t,z,\eta) := z_1 - 1/1750t^7 - 1/400t^4 + 1/3(-1/5z_1 + 1/5\eta_1 + 1/10(-z_2+\eta_2)^2)t^3 + \\ + 1/2(1/5z_2(-z_2+\eta_2) + 1/5 + 1/5z_1)t^2 + 1/10z_2^2t - \\ - t(1357/14000 + (1/30)z_1 + (1/15)\eta_1 + (1/30)(-z_2+\eta_2)^2 + \\ (1/10)z_2(-z_2+\eta_2) + (1/10)z_2^2) + t(-z_1+\eta_1), \quad (41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{12}(t,z,\eta) := z_2 - (1/300)t^6 + (1/4(-(1/10)z_2 + (1/10)\eta_2 - 1/160))t^4 + 1/3((1/10)z_2 + \\ + 3/5 - (1/8)z_1 + (1/8)\eta_1)t^3 + (1/2(1/16 + (1/8)z_1))t^2 - t(2173/9600 + \\ + (1/120)z2 + (1/40)\eta_2 + (1/48)z1 + (1/24)\eta_1) + t(-z_2+\eta_2). \end{aligned}$$

Розв'язком системи визначальних рівнянь (37) при $m = 1$ є наступні величини:

$$\begin{aligned} z_1 := z_{11} \approx -0.5004705081, \quad z_2 := z_{12} \approx -0.001258348056, \\ \eta_1 := \eta_{11} \approx -0.4505519664, \quad \eta_2 := \eta_{12} \approx 0.1986482683. \end{aligned} \quad (42)$$

Підставивши (42) в (41), отримаємо перше наближення до розв'язку інтегральної КЗ (38), (39):

$$\begin{aligned} x_{11}(t) = -0.5004705081 - \frac{1}{1750}t^7 - (1/400)t^4 + 0.004659991283t^3 + \\ + 0.04992779400t^2 - 0.00159781500t, \quad (43) \end{aligned}$$

$$x_{12}(t) = -0.001258348056 - \frac{1}{300}t^6 + 0.003435165410t^4 + \\ + 0.2020379943t^3 - 0.000029406755t^2 - 0.0022038033t.$$

Аналогічні обчислення проводяться при $m = 2$ та $m = 3$.

Для третього наближення ($m = 3$) отримано наступне максимальне відхилення компонент точного на наближеного розв'язків:

$$\max_{t\in[0,\frac{1}{2}]} |x_1^*(t) - x_{31}(t)| \leq 6 \cdot 10^{-7},$$

$$\max_{t\in[0,\frac{1}{2}]} |x_2^*(t) - x_{32}(t)| \leq 5 \cdot 10^{-7}.$$

На Рис. 1 зображено графіки компонент точного (40) та наближеного (43) розв'язків у першій ітерації.

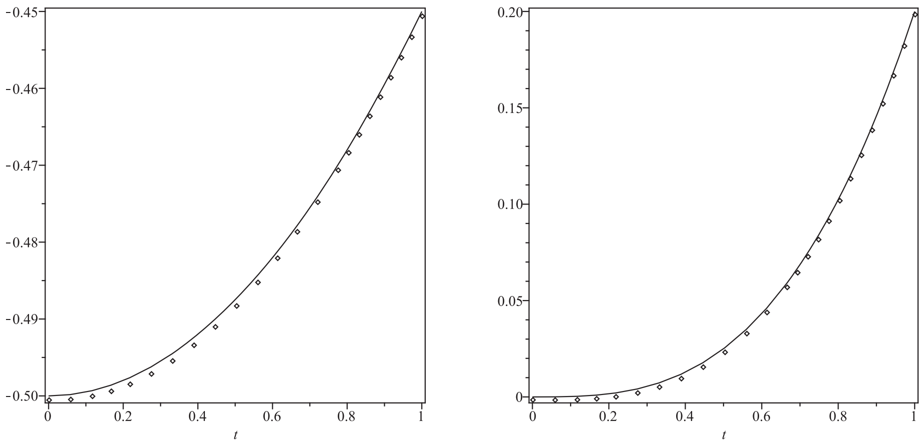

Рис. 1. Перша та друга компоненти точного розв'язку (лінія) та їх перше наближення (пунктир).

Розрахунки показують, що система визначальних рівнянь (37), окрім розв'язку (43) має ще один розв'язок

$$\begin{aligned} &\widetilde{z}_1 := \widetilde{z}_{11} \approx -1.024301087, &&\widetilde{z}_2 := \widetilde{z}_{12} \approx -0.8055515464, \\ &\widetilde{\eta}_1 := \widetilde{\eta}_{11} \approx -0.9657361623, &&\widetilde{\eta}_2 := \eta_{12} \approx -0.6652593554. \end{aligned} \tag{44}$$

Підставивши (44) в перше наближення (41) ми отримаємо перше наближення до другого розв'язку даної інтегральної КЗ (38), (39)

$$\widetilde{x}_{11}(t) = -1.024301087 - \frac{1}{1750}t^7 - 1/400t^4 + 0.004560391597t^3 - \\ - 0.01373136785t^2 + 0.07080732951t,$$

$$\widetilde{x}_{12}(t) = -0.8055515464 - \frac{1}{300}t^6 + 0.001944804775t^4 + 0.1755884870t^3 - \\ -0.03276881795t^2 - 0.0011389494t.$$

За аналогією отримаємо друге ($m = 2$) і третє ($m = 3$) наближення.

Підставивши третє наближення в систему диференціальних рівнянь (39) отримаємо наступну похибку:

$$\max_{t\in[0,1]}\left|x'_{31}(t)-\frac{t}{5}\widetilde{x}_{31}(t)-\frac{1}{10}\widetilde{x}^{2}_{32}(t)-\frac{t^6}{250}+\frac{t^3}{100}-\frac{t}{5}\right|=1.5\cdot 10^{-6},$$

$$\max_{t\in[0,1]}\left|x'_{32}(t)-\frac{t^2}{10}\widetilde{x}^{2}_{32}(t)-\frac{t}{8}\widetilde{x}_{31}(t)+\frac{t^5}{50}+\frac{t^3}{160}-\frac{3t^2}{5}-\frac{t}{16}\right|=1.7\cdot 10^{-6}.$$

На Рис.2 показано графіки першого і третього наближення до другого розв'язку інтегральної КЗ

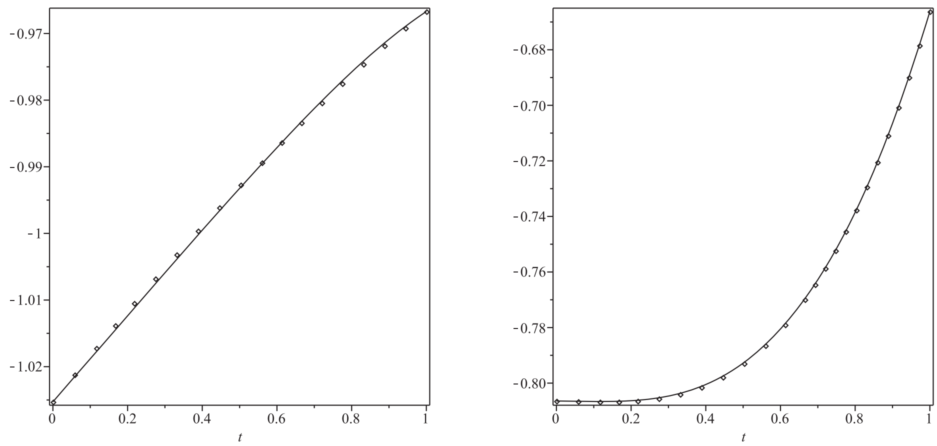

Рис. 2. Перше (пунктир) та третє (лінія) наближення другого розв'язку, перша та друга компонента відповідно.

Список використаної літератури

1. Rontó, A., Rontó, M. and Varha Y., A new approach to non-local boundary value problems for ordinary differential systems, *Applied Mathematics and Computation,* vol. **250** (2015) 689-700.
2. Rontó, M. and Varha, Y., Constructive existence analysis of solutions of non-linear integral boundary value problems, *Miskolc Mathematical Notes*, vol. 15 , No.2 (2014), 725-742
3. Rontó, M., Varha, Y. and Marynets K., Further results on the investigation of solutions of integral boundary value problems, *Tatra Mountains Mathematical Publications, 2015, to be published, 18 pages*
4. Rontó, M. and Samoilenko, A.M., Numerical-Analytic Methods in the Theory of Boundary-Value Problems, World Scientific, 2000
5. Rontó, A. and Rontó, M., Successive Approximation Techniques in Non- Linear Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations , Handbook of Differential Equations, Ordinary Differential Equations, vol. IV, 441- 592, Edited by F. Batelli and M. Feckan, (2008), Elsevier B.V.
6. Rontó, A., Rontó, M. and Shchobak N, Constructive analysis of periodic solutions with interval halving, *Boundary Value Problems* 2013 2013:57, doi:10.1186/1687-2770-2013-57, 1-34 pages
7. Rontó, M. and Marynets K., On parametrization of boundary value problems with two-point nonlinear boundary conditions, *Nonlinear Oscillations,* **14,** (2011), No.3, 359-391
8. Rontó M. and Marynets. K., On parametrization for boundary value problems with three-point non-linear restrictions, *Miskolc Mathematical Notes*, vol. 13 , No.1 (2012), 91-106,

Одержано 20.01.2015