УДК 517.9

П. В. Фекета, Ф. А. Асроров
Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка

ІНТЕГРАЛЬНІ МНОЖИНИ РОЗШИРЕНЬ НЕАВТОНОМНИХ СИСТЕМ НА ТОРІ З ІМПУЛЬСНИМИ ЗБУРЕННЯМИ

Utilizing the concept of Green–Samoilenko function of the invariant tori problem, the integral sets of linear and weakly nonlinear extensions of non-autonomous system on torus with impulsive perturbations at the fixed moments are built. The question regarding asymptotic stability of such sets are investigated.

Використовуючи поняття функції Гріна–Самойленка задачі про інваріантні тори, побудовано інтегральні множини лінійного та слабко нелінійного розширень неавтономної системи на торі з імпульсними збуреннями у фіксовані моменти часу. Досліджено питання асимптотичної стійкості цих множини.

Тематика роботи тісно пов'язана з двома напрямками теорії диференціальних рівнянь — теорією багаточастотних коливань [3, 5, 8] та диференціальних рівнянь з імпульсними збуреннями [4, 6, 7, 9]. Основним результатом є достатні умови існування та асимптотичної стійкості інтегральних множин лінійних та слабко нелінійних розширень неавтономної системи диференціальних рівнянь на торі, що зазнають імпульсних збурень у фіксовані моменти часу.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією в фіксовані моменти часу

$$\begin{gathered} \frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi), \\ \frac{dx}{dt} = P(t,\varphi)x + f(t,\varphi), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi)x + I_i(\varphi), \end{gathered} \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathcal{T}^m$, $\mathcal{T}^m$ — m-мірний тор; $a(t,\varphi)$, $f(t,\varphi)$, $P(t,\varphi)$ — неперервні по t відповідно векторні і матричні функції, неперервні і 2π-періодичні по φ_v, $v = 1,..,m$, обмежені при всіх $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{T}^m$. Функція $a(t,\varphi)$ задовольняє умову Ліпшиця по φ рівномірно відносно $t \in \mathbb{R}$. Функції $B_i(\varphi)$ і $I_i(\varphi)$ — рівномірно обмежені по i матриці і вектори, $det(E + B_i(\varphi)) \neq 0$ для будь-якого $\varphi \in \mathcal{T}^m$. Послідовність моментів $\{\tau_i\}$ занумерована цілими числами так, що $\tau_i \to -\infty$ при $i \to -\infty$ і $\tau_i \to +\infty$ при $i \to +\infty$. Вважатимемо, що існує число $\theta > 0$ таке, що виконується оцінка

$$\tau_{i+1} - \tau_i > \theta \tag{2}$$

для будь-якого $i \in \mathbb{Z}$.

Встановимо достатні умови існування інтегральних множин системи (1). Аналогічні системи рівнянь без імпульсних збурень та достатні умови існування інтегральних множин досліджено в [2], питання існування обмежених на всій осі розв'язків систем з імпульсними збуреннями досліджено в [1].

Розглянемо неавтономну систему диференціальних рівнянь, визначену та торі $\mathcal{T}_m$,

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi) \tag{3}$$

і позначимо через $\varphi_t(\tau,\varphi)$ розв'язок цієї системи, який задовольняє початкову умову $\varphi_\tau(\tau,\varphi)=\varphi$. В силу компактності фазового простору системи рівнянь (3) і припущень, зроблених відносно функції $a(t,\varphi)$, кожен розв'язок $\varphi_t(\tau,\varphi)$, $\varphi_\tau(\tau,\varphi)=\varphi$ існує при будь-яких $\tau\in\mathbb{R}$, $\varphi\in\mathcal{T}^m$ і може бути продовжений по t на всю дійсну вісь $\mathbb{R}$.

Розглянемо однорідну систему рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt}=P(t,\varphi_t(\tau,\varphi)), \quad t\neq\tau_i,\\ &\Delta x|_{t=\tau_i}=B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))x, \end{aligned} \tag{4}$$

залежну від $\varphi\in\mathcal{T}^m$, $\tau\in\mathbb{R}$ як від параметрів і позначимо через $\Omega_s^t(\tau,\varphi)$ матрицант цієї системи. Доведемо лему.

Лема 1. *Для будь-яких $t,s,\tau,\sigma\in\mathbb{R}$ і $\varphi\in\mathcal{T}^m$ справедливо*

$$\Omega_s^t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi))=\Omega_s^t(\sigma,\varphi).$$

Доведення. Так як $\Omega_s^t(\tau,\varphi)$ матрицант системи рівнянь (4), то

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\Omega_s^t(\tau,\varphi)=P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))\Omega_s^t(\tau,\varphi),\\ \Delta\Omega_s^t(\tau,\varphi)|_{t=\tau_i}=B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))\Omega_s^{\tau_i}(\tau,\varphi). \end{gathered}$$

Замінимо φ на $\varphi_\tau(\sigma,\varphi))$ і, враховуючи властивість

$$\varphi_t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi))=\varphi_t(\sigma,\varphi)$$

розв'язків $\varphi_t(\tau,\varphi)$ системи (3), одержимо

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\Omega_s^t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi))=P(t,\varphi_t(\sigma,\varphi))\Omega_s^t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi)),\\ \Delta\Omega_s^t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi))|_{t=\tau_i}=B_i(\varphi_{\tau_i}(\sigma,\varphi))\Omega_s^{\tau_i}(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi)). \end{gathered}$$

Остання рівність означає, що $\Omega_s^t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi))$ є фундаментальною матрицею системи рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt}=P(t,\varphi_t(\sigma,\varphi))x,\\ &\Delta x|_{t=\tau_i}=B_i(\varphi_{\tau_i}(\sigma,\varphi))x, \end{aligned}$$

яка при $t=s$ є одиничною матрицею. Але цю ж властивість має і матриця $\Omega_s^t(\sigma,\varphi)$. Тому ці матриці співпадають. Лему доведено.

Нехай $C(t,\varphi)$ — неперервна 2π-періодична по кожній компоненті φ_v, $v=1,..,m$, кусково-неперервна по $t\in\mathbb{R}$ з розривами першого роду в точках $\{\tau_i\}$ матрична функція. Покладемо

$$G(t,s,\varphi)=\begin{cases}\Omega_s^t(t,\varphi)C(s,\varphi_s(t,\varphi)), & s\le t,\\ -\Omega_s^t(t,\varphi)[E-C(s,\varphi_s(t,\varphi))], & s>t,\end{cases}$$

і назвемо $G(t,s,\varphi)$ функцією Гріна – Самойленка системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= a(t,\varphi), \\ \frac{dx}{dt} &= P(t,\varphi)x, \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} &= B_i(\varphi)x, \end{aligned}$$

якщо

$$\|G(t,s,\varphi)\| \leq Ke^{-\gamma|t-s|} \tag{5}$$

для всіх $t, s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{T}^m$ і деяких $K \geq 1$, $\gamma > 0$.

Вкажемо найпростіші властивості функції Гріна – Самойленка $G(t,s,\varphi)$. З визначення $G(t,s,\varphi)$ випливає, що функція Гріна – Самойленка неперервна для всіх $t, s \in \mathbb{R}$, $t \neq s$, $\varphi \in \mathcal{T}^m$, 2π-періодична по φ_v, $v = 1, .., m$, причому

$$G(s+0,s,\varphi) - G(s-0,s,\varphi) = E.$$

Беручи до уваги лему 1, маємо

$$G(t,s,\varphi_t(\tau,\varphi)) = \begin{cases} \Omega_s^t(t,\varphi)C(s,\varphi_s(\tau,\varphi)), & s \leq t, \\ -\Omega_s^t(t,\varphi)[E - C(s,\varphi_s(\tau,\varphi))], & s > t. \end{cases} \tag{6}$$

При $s = \tau$ одержимо

$$G(t,\tau,\varphi_t(\tau,\varphi)) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(t,\varphi)C(\tau,\varphi), & \tau \leq t, \\ -\Omega_\tau^t(t,\varphi)[E - C(\tau,\varphi)], & \tau > t. \end{cases}$$

Як бачимо, матриця $G(t,\tau,\varphi_t(\tau,\varphi))$ складається з розв'язків однорідної системи рівнянь (4), що розглядається при $t \geq \tau$ і $t < \tau$ відповідно.

Розглянемо вираз

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s,\varphi)f(s,\varphi_s(t,\varphi))ds + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t,\tau_i+0,\varphi)I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi)).$$

Враховуючи (2) і (5), одержимо

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s,\varphi)f(s,\varphi_s(t,\varphi))ds + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t,\tau_i+0,\varphi)I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi)) \right\| \leq \\ &\leq \frac{2K}{\gamma} \sup_{t\in\mathbb{R}} \max_{\varphi\in\mathcal{T}^m} \|f(t,\varphi)\| + \frac{2K}{1-e^{-\gamma\theta}} \sup_{i\in\mathbb{Z}} \max_{\varphi\in\mathcal{T}^m} \|I_i(\varphi)\|. \end{aligned}$$

Покладемо

$$u(t,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s,\varphi)f(s,\varphi_s(t,\varphi))ds + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t,\tau_i+0,\varphi)I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi)). \tag{7}$$

Функція $u(t,\varphi)$ — 2π-періодична по φ_v, $v = 1, \ldots, m$, неперервна по $\varphi \in \mathcal{T}^m$ і кусково-неперервна по $t \in \mathbb{R}$ з розривами першого роду в точках $\{\tau_i\}$.

Покажемо, що множина $x = u(t,\varphi)$, $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{T}^m$ є інтегральною множиною системи рівнянь (1). Для цього розглянемо функцію $x_t(\tau,\varphi) = u(t,\varphi_t(\tau,\varphi))$, де $\varphi_t(\tau,\varphi)$, $\varphi_\tau(\tau,\varphi) = \varphi$ — розв'язок першого з рівнянь системи (1).

Згідно представлень (6), (7) маємо

$$x_t(\tau,\varphi) = u(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s,\varphi_t(\tau,\varphi)) f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)))ds+$$
$$+\sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t,\tau_i+0,\varphi_t(\tau,\varphi)) I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi_t(\tau,\varphi))) = \int_{-\infty}^{t} \Omega_s^t(\tau,\varphi)\times$$
$$\times C(s,\varphi_s(\tau,\varphi)) f(s,\varphi_s(\tau,\varphi))ds + \sum_{\tau_i<t} \Omega_{\tau_i}^t(\tau,\varphi) C(\tau_i,\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)) I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))+$$
$$+\int_t^{+\infty} \Omega_s^t(\tau,\varphi)[C(s,\varphi_s(\tau,\varphi)) - E] f(s,\varphi_s(\tau,\varphi))ds+$$
$$+\sum_{\tau_i>t} \Omega_{\tau_i}^t(\tau,\varphi)[C(\tau_i,\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)) - E] I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)).$$

Диференціюючи останнє співвідношення по t при $t \neq \tau_j$, знаходимо

$$\frac{dx_t(\tau,\varphi)}{dt} = \frac{d}{dt}u(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) = P(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) \int_{-\infty}^{t} \Omega_s^t(\tau,\varphi) C(s,\varphi_s(\tau,\varphi))\times$$
$$\times f(s,\varphi_s(\tau,\varphi))ds + C(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) f(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) + P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))\times$$
$$\times \int_t^{+\infty} \Omega_s^t(\tau,\varphi)[C(s,\varphi_s(\tau,\varphi)) - E] f(s,\varphi_s(\tau,\varphi))ds - [C(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) - E]\times$$
$$\times f(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) = P(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) u(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) + f(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) =$$
$$= P(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) x_t(\tau,\varphi) + f(t,\varphi_t(\tau,\varphi))$$

для будь-якого $\tau \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{T}^m$. А при $t = \tau_j$ маємо

$$x_{\tau_j+0}(\tau,\varphi) - x_{\tau_j}(\tau,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(G(\tau_j+0,s,\varphi_{\tau_j+0}(\tau,\varphi)) - G(\tau_j,s,\varphi_{\tau_j}(\tau,\varphi))\big)\times$$
$$\times f(s,\varphi_s(\tau_j,\varphi_{\tau_j}(\tau,\varphi)))ds+$$
$$+\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \big(G(\tau_j+0,\tau_i,\varphi_{\tau_j+0}(\tau,\varphi)) - G(\tau_j,\tau_i,\varphi_{\tau_j}(\tau,\varphi))\big) I_i(\varphi_{t_i}(\tau_j,\varphi_{\tau_j}(\tau,\varphi))) =$$
$$= B_j(\varphi_{\tau_j}(\tau,\varphi)) x_{\tau_j}(\tau,\varphi) + I_j(\varphi_{\tau_j}(\tau,\varphi))$$

для будь-якого $\tau \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{T}^m$.

Останні дві рівності доводять, що функція $u(t,\varphi_t(\tau,\varphi))$ є розв'язком системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))x + f(t,\varphi_t(\tau,\varphi)), \quad t \neq \tau_i,$$
$$\Delta x|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))x + I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)),$$

яка залежить від $\varphi \in \mathcal{T}^m$, $\tau \in \mathbb{R}$ як від параметрів. Це означає, що множина $x = u(t,\varphi)$ є інтегральною множиною системи рівнянь (1).

Таким чином доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай в системі рівнянь (1) функції $a(t,\varphi)$, $f(t,\varphi)$, $P(t,\varphi)$ — неперервні по t відповідно векторні і матричні функції, неперервні і 2π-періодичні по φ_v, $v = 1,..,m$, обмежені при всіх $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{T}^m$. Функція $a(t,\varphi)$ задовольняє умову Ліпшиця по φ рівномірно відносно $t \in \mathbb{R}$. Функції $B_i(\varphi)$ і $I_i(\varphi)$ — рівномірно обмежені по i матриці і вектори, $det(E + B_i(\varphi)) \neq 0$ для будь-якого $\varphi \in \mathcal{T}^m$. Для послідовності моментів імпульсних збурень $\{\tau_i\}$ виконується оцінка*

$$\tau_{i+1} - \tau_i > \theta > 0$$

для будь-якого $i \in \mathbb{Z}$. Нехай також існує функція Гріна – Самойленка $G(t,s,\varphi)$. Тоді система рівнянь (1) має інтегральну множину

$$x = u(t,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s,\varphi) f(s,\varphi_s(t,\varphi)) ds +$$

$$+ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t,\tau_i + 0,\varphi) I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \mathcal{T}^m,$$

причому

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \max_{\varphi\in\mathcal{T}^m} \|u(t,\varphi)\| \leq \frac{2K}{\gamma} \sup_{t\in\mathbb{R}} \max_{\varphi\in\mathcal{T}^m} \|f(t,\varphi)\| + \frac{2K}{1-e^{-\gamma\theta}} \sup_{i\in\mathbb{Z}} \max_{\varphi\in\mathcal{T}^m} \|I_i(\varphi)\|. \quad (8)$$

Теорема 2. *Припустимо, що система рівнянь (1) задовольняє умовам теореми 1. Нехай також матрицант $\Omega_s^t(\tau,\varphi)$ системи рівнянь (4) задовольняє нерівності*

$$\left\|\Omega_s^t(\tau,\varphi)\right\| \leq K e^{-\gamma(t-s)}, \quad (9)$$

для будь-яких $t \geq s \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{T}^m$ і деяких $K \geq 1$, $\gamma > 0$. Тоді система рівнянь (1) має інтегральну множину

$$x = u(t,\varphi) = \int_{-\infty}^{t} G(t,s,\varphi) f(s,\varphi_s(t,\varphi)) +$$

$$+ \sum_{\tau_i<t} G(t,\tau_i + 0,\varphi) I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \mathcal{T}^m$$

і ця множина є асимптотично стійкою.

Доведення. З оцінки (9) очевидно, що існує функція Гріна – Самойленка наступного вигляду

$$G(t,s,\varphi) = \begin{cases} \Omega_s^t(t,\varphi), & s < t, \\ 0, & s \geq t. \end{cases} \quad (10)$$

В системі рівнянь (4) зробимо заміну: $x = u(t,\varphi) + z$. Тоді

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{dz}{dt} = P(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) u(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) +$$
$$+ P(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) z + f(t,\varphi_t(\tau,\varphi)),$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} a(t,\varphi) + \frac{dz}{dt} = P(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) u(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) +$$
$$+ P(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) z + f(t,\varphi_t(\tau,\varphi)),$$

а

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = \Delta u|_{t=\tau_i} + \Delta z|_{t=\tau_i} =$$
$$= P(\tau_i, \varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))u(\tau_i, \varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)) + I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)) + \Delta z|_{t=\tau_i}.$$

Звідки

$$\frac{dx}{dt} = P(t, \varphi_t(\tau,\varphi))z. \tag{11}$$

Позначимо через $z = z(t,\varphi,z_0) = \Omega_0^t(\tau,\varphi)z_0$ загальний розв'язок системи рівнянь (11). Використовуючи властивості матриціанта $\Omega_0^t(\tau,\varphi)$, для цього розв'язку одержуємо оцінку

$$\|z(t,\varphi,z_0\| = \left\|\Omega_0^t(\tau,\varphi)z_0\right\| = \left\|\Omega_\tau^t(\tau,\varphi)\Omega_0^\tau(\tau,\varphi)z_0\right\| =$$
$$= \left\|\Omega_\tau^{t-\tau+\tau}(\tau,\varphi)z(\tau,\varphi,z_0)\right\| \le \left\|\Omega_\tau^{t-\tau}(\tau,\varphi_t(\tau,\varphi))\right\| \|z(\tau,\varphi,z_0)\| \le$$
$$\le Ke^{-\gamma(t-\tau)} \|z(\tau,\varphi,z_0)\|,$$

яка справедлива для всіх $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{T}^m$. Остаточно маємо

$$\|x(t,\varphi_t(\tau,\varphi),x_0) - u(t,\varphi_t(\tau,\varphi))\| = \|z(t,\varphi,z_0)\| \le Ke^{-\gamma(t-\tau)} \|z(t,\varphi,z_0)\|.$$

А це означає, що

$$\|x(t,\varphi_t(\tau,\varphi),x_0) - u(t,\varphi_t(\tau,\varphi))\| \to 0, \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{12}$$

Теорему доведено.

Наведемо достатні умови існування інтегральних множин слабко нелінійної системи диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= a(t,\varphi), \\ \frac{dx}{dt} &= P(t,\varphi)x + f(t,\varphi,x), \quad t \ne \tau_i, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} &= B_i(\varphi)x + I_i(\varphi,x), \end{aligned} \tag{13}$$

Вважатимемо, що функції $f(\varphi,x)$ та $I_i(\varphi,x)$, визначені та обмежені для всіх $\varphi \in \mathcal{T}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, неперервні, 2π-періодичні по φ і рівномірно по $\varphi \in \mathcal{T}^m$ задовольняють умову Ліпшиця по x

$$\left\|f(\varphi,x') - f(\varphi,x'')\right\| + \left\|I_i(\varphi,x') - I_i(\varphi,x'')\right\| \le N\left\|x' - x''\right\| \tag{14}$$

для всіх $x', x'' \in \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{R}$.

Теорема 3. *Якщо функція Гріна–Самойленка $G(t,\tau,\varphi)$ задовольняє нерівність*

$$\|G(t,\tau,\varphi)\| \le Ke^{-\gamma|t-\tau|}$$

для всіх $t,\tau \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{T}^m$ та деяких $K \ge 1$ і $\gamma > 0$, а для моментів імпульсних збурень $\{\tau_i\}$ справедливо

$$\tau_{i+1} - \tau_i \ge \theta$$

для всіх $i \in \mathbb{Z}$ і деякого $\theta > 0$, тоді для достатньо малої сталої Ліпшиця N, система рівнянь (13) має інтегральну множину

$$x = u(t,\varphi), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \mathcal{T}^m.$$

Доведення. Будемо шукати інтегральну множину системи (13) як границю послідовності множин

$$\mathbb{M}^{(k)} : x = u^{(k)}(t,\varphi), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \mathcal{T}^m, \quad k = 1, 2, ..., \quad u^{(0)}(t,\varphi) = 0,$$

кожна з яких є інтегральною множиною системи рівнянь

$$\begin{gathered} \frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi), \\ \frac{dx}{dt} = P(t,\varphi)x + f(t,\varphi,u^{(k-1)}(\varphi)), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi)x + I_i(\varphi, u^{(k-1)}(\varphi)), \end{gathered} \tag{15}$$

За теоремою 1, система рівнянь (15) має інтегральну множину

$$\begin{gathered} x = u(t,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s,\varphi) f(s,\varphi_s(t,\varphi), u^{(k-1)}(s,\varphi_s(t,\varphi)))ds + \\ + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t,\tau_i+0,\varphi) I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi), u^{(k-1)}(\tau_i,\varphi_{\tau_i}(t,\varphi))), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \mathcal{T}^m, \end{gathered} \tag{16}$$

для кожного $k = 1, 2, ...$ Беручи до уваги оцінку (8), умову (14), і позначивши $C = \max\left\{\frac{2K}{\gamma}, \frac{2K}{1-e^{-\gamma\theta}}\right\}$, одержимо

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \max_{\varphi\in\mathcal{T}^m} \left\|u^{(1)}(t,\varphi)\right\| \le 2C \max\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}} \max_{\varphi\in\mathcal{T}^m} \|f(t,\varphi,0)\|, \sup_{t\in\mathbb{R}} \max_{\varphi\in\mathcal{T}^m} \|g(t,\varphi,0)\|\right\},$$

$$\begin{gathered} \sup_{t\in\mathbb{R}} \max_{\varphi\in\mathcal{T}^m} \left\|u^{(k)}(t,\varphi)\right\| \le \sup_{t\in\mathbb{R}} \max_{\varphi\in\mathcal{T}^m} \left\|u^{(k)}(t,\varphi) - u^{(1)}(t,\varphi)\right\| + \sup_{t\in\mathbb{R}} \max_{\varphi\in\mathcal{T}^m} \left\|u^{(1)}(t,\varphi)\right\| \le \\ \le \frac{1}{1-2NC} \sup_{t\in\mathbb{R}} \max_{\varphi\in\mathcal{T}^m} \left\|u^{(1)}(t,\varphi)\right\| \le \\ \le \frac{2C}{1-2NC} \max\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}} \max_{\varphi\in\mathcal{T}^m} \|f(t,\varphi,0)\|, \sup_{t\in\mathbb{R}} \max_{\varphi\in\mathcal{T}^m} \|g(t,\varphi,0)\|\right\}. \end{gathered}$$

Більше того,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \max_{\varphi\in\mathcal{T}^m} \left\|u^{(k+1)}(t,\varphi) - u^{(k)}(t,\varphi)\right\| \le 2NC \sup_{t\in\mathbb{R}} \max_{\varphi\in\mathcal{T}^m} \left\|u^{(k)}(t,\varphi) - u^{(k-1)}(t,\varphi)\right\|. \tag{17}$$

Якщо стала Ліпшиця N є настільки малою, що $2NC < 1$, то з оцінки (17) випливає, що послідовність функцій $\{u^{(k)}(t,\varphi)\}$ є рівномірно збіжною. Нехай

$$u(t,\varphi) = \lim_{k\to\infty} u^{(k)}(t,\varphi).$$

З рівномірної збіжності послідовності $\{u^{(k)}(t,\varphi)\}$ випливає, що гранична функція $u(t,\varphi)$ є 2π-періодичною по φ_v, $v = 1, \ldots, m$ та кусково-неперервною по t з розривами першого роду в точках $\{\tau_i\}$. Переходячи до границі в (16) при $k \to \infty$ бачимо, що функція $u(t,\varphi)$ задовольняє рівність

$$\begin{gathered} x = u(t,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s,\varphi) f(s,\varphi_s(t,\varphi), u(s,\varphi_s(t,\varphi)))ds + \\ + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t,\tau_i+0,\varphi) I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi), u(\tau_i,\varphi_{\tau_i}(t,\varphi))). \end{gathered}$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що функція $u(t, \varphi_t(\tau, \varphi))$ є розв'язком системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(t, \varphi_t(\tau, \varphi))x + f(t, \varphi_t(\tau, \varphi), x), \quad t \neq \tau_i,$$
$$\Delta x|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau, \varphi))x + I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau, \varphi), x),$$

яка залежить від $\varphi \in \mathcal{T}^m$, $\tau \in \mathbb{R}$ як від параметрів. Це означає, що множина $x = u(t, \varphi)$, $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{T}^m$ є інтегральною множиною системи рівнянь (13).

Таким чином, в статті встановлено достатні умови існування інтегральних множин лінійного та слабко нелінійного розширення неавтономної системи на m-мірному торі, з імпульсними збуреннями у фіксовані моменти часу; вказано достатні умови асимптотичної стійкості таких множин.

1. *Асроров Ф. А., Фекета П. В.* Обмежені розв'язки лінійних неоднорідних систем з імпульсною дією // Наук. вісн. Ужгород. ун.-ту. Сер. матем. і інформ. — 2010. — Вип. 20. — С. 4-12.
2. *Асроров Ф. А., Перестюк Н. А.* Функция Грина–Самойленко и существование интегральных множеств линейных расширений неавтономных систем // Укр. мат. журн. — 1994. — т. 46, № 8. — с. 1067-1071.
3. *Митропольський Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифферениальных уравнений с помощью функции Ляпунова. — К.: Наукова думка, 1992. — 272 с.
4. *Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. — К.: ИМ НАН Украины, 2007.
5. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. — М.: Наука, 1987.
6. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — К.: Наукова думка, 1987.
7. *Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V.* Differential Equations with Impulse Effects: Multivalued Right-hand Sides with Discontinuities. — Berlin: Walter de Gruyter Co, 2011.
8. *Samoilenko A. M.* Elements of the Mathematical Theory of Multi-Frequency Oscillations. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991.
9. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive Differential Equations. — Singapore: World Scientific, 1995.

Одержано 22.03.2012