

УДК 519.21

Д. В. Затула (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

## ПРО РОЗПОДІЛ НОРМ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ У ПРОСТОРАХ ГЕЛЬДЕРА

In this article we obtain estimations for distributions of norms of random processes from Banach spaces  $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$  of random variables and investigate Hölder continuity of such processes on a compact metric space.

У роботі знайдені оцінки розподілів норм випадкових процесів з банахових просторів  $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$  випадкових величин та досліджена гельдерова неперервність таких процесів на метричному компактному просторі.

**Вступ.** Розглянемо метричний простір  $(\mathbb{T}, \rho)$  і випадковий процес  $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$ . Для процесу  $X$  модулями неперервності є такі функції  $f$ , що з ймовірністю 1 виконується нерівність:

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\sup_{0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)|}{f(\varepsilon)} \leq 1.$$

Питання про знаходження модулів неперервності та умов Гельдера для гаусових процесів детально розглянуто у роботі [1]. Ці результати були узагальнені для деяких класів процесів з просторів Орліча у [2, 3], а також у [4, 5]. Досліджена ліпшицева неперервність для  $\varphi$ -субгаусових процесів та знайдені оцінки розподілу ліпшицевих норм таких процесів у роботі [6]. Оцінки розподілів норм випадкових процесів з просторів  $L_p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$  знайдені у роботі [7].

Простори випадкових величин  $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$  — це банахові простори з нормою

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u \geq 1} \frac{(\mathbb{E}|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)},$$

де  $\psi(u) > 0$  — деяка монотонно зростаюча функція. Такі простори були введені у роботі [8], а властивості випадкових величин та процесів з просторів  $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$  розглянуто у [9]. У загальному випадку модулі неперервності та, відповідно, оцінки розподілів норм випадкових процесів з просторів  $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$  знайдено у [10].

У даній роботі знайдено модулі неперервності для випадкових процесів з просторів  $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$  з експоненційною функцією  $\psi$ , визначених на компактному просторі  $(\mathbb{T}, \rho)$ . Зокрема, оцінено ймовірності

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{0 < \rho(t,s) \leq v} \frac{|X(t) - X(s)|}{f(\rho(t,s))} > x \right\}$$

та наведено умови, за яких траєкторії таких випадкових процесів з просторів  $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$  задовольняють умову Гельдера.

Гельдерова неперервність випадкових процесів може бути застосована, наприклад, у вивченні швидкості наближення функцій тригонометричними поліномами.

**Означення та умова А простору  $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ .** У цьому розділі наведемо кілька означень, технічних результатів та необхідну умову, які будуть використані при доведенні основних результатів.

**Означення 1** (див. [9]). Нехай  $\psi(u) > 0$ ,  $u \geq 1$  – деяка монотонно зростаюча функція така, що  $\psi(u) \rightarrow \infty$  при  $u \rightarrow \infty$ . Випадкова величина  $\xi$  належить простору  $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ , якщо виконується наступна умова:

$$\sup_{u \geq 1} \frac{(\mathbb{E}|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)} \leq \infty.$$

У роботі [8] (див. також [9]) доведено, що  $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$  є простором з нормою

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u \geq 1} \frac{(\mathbb{E}|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)}.$$

**Теорема 1** (див. [9]). Якщо випадкова величина  $\xi$  належить простору  $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ , то  $\forall x > 0$  виконується наступна нерівність:

$$\mathbb{P}\{|\xi| > x\} \leq \inf_{u \geq 1} \frac{\|\xi\|_\psi^u \cdot (\psi(u))^u}{x^u}. \quad (1)$$

Надалі будемо розглядати простори  $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ , які задовольняють наступній умові. Нехай  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – випадкові величини з простору  $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ . Позначимо  $\eta = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|$ ,  $a = \max_{1 \leq k \leq n} \|\xi_k\|_\psi$ .

**Умова А** (див. [10]). Існують функція  $z(x) > 0$ , монотонно зростаюча функція  $U(n)$  та дійсне число  $x_0 > 0$ , що  $\forall x > x_0$  виконується наступна нерівність:

$$\mathbb{P}\{\eta > x \cdot a \cdot U(n)\} \leq \frac{1}{n} \exp\{-z(x)\}.$$

Для експоненційної функції  $\psi(u)$  умова А набуває наступного вигляду.

**Теорема 2.** Нехай  $\psi(u) = e^{\alpha u^\beta}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ . Тоді наступна нерівність виконується при  $\forall x \geq \exp\left\{\left(\frac{\ln 3}{c \sqrt[\beta]{2(\ln 3 - 1)}}\right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}$ ,  $c = \frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \cdot (\beta + 1)^{-\frac{\beta+1}{\beta}}$ :

$$\mathbb{P}\left\{\eta > x \cdot a \cdot \exp\left\{(\ln(n+2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}\right\} \leq \frac{1}{n} \exp\left\{-\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \cdot \left(\frac{2}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} (\ln x)^{\frac{\beta+1}{2\beta}}\right\}.$$

**Доведення.** У цьому випадку нерівність (1) набуває наступного вигляду (див. [9]):

$$\mathbb{P}\{|\xi| > x\} \leq \exp\left\{-\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \cdot \frac{1}{(\beta+1)^{\frac{\beta+1}{\beta}}} \cdot \left(\ln \frac{x}{\|\xi\|_\psi}\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}\right\}$$

при  $x > \|\xi\|_\psi$ . Позначимо  $c := \frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \cdot (\beta+1)^{-\frac{\beta+1}{\beta}}$ . Тоді  $\forall x > \left(\exp\left\{(\ln 3)^{\frac{2\beta}{\beta+1}}\right\}\right)^{-1}$ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\eta > x \cdot a \cdot U(n)\} &= \mathbb{E}1\{\omega : \eta > x \cdot a \cdot U(n)\} \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}1\{\eta = |\xi_k|\} \cdot 1\{\omega : |\xi_k| > x \cdot a \cdot U(n)\} \leq \\
&\leq n \cdot \max_{1 \leq k \leq n} \mathbb{P}\{|\xi_k| > x \cdot a \cdot U(n)\} \leq \\
&\leq n \cdot \max_{1 \leq k \leq n} \exp \left\{ -c \cdot \left( \ln \frac{x \cdot a \cdot U(n)}{\|\xi_k\|_\psi} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} \right\} \leq \\
&\leq n \cdot \max_{1 \leq k \leq n} \exp \left\{ -c \cdot \left( \ln \frac{x \cdot a \cdot U(n)}{a} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} \right\} = \\
&= \frac{1}{n} \cdot n^2 \cdot \exp \left\{ -c \cdot (\ln(x \cdot U(n)))^{\frac{\beta+1}{\beta}} \right\}.
\end{aligned}$$

Візьмемо  $U(n) = \exp \left\{ (\ln(n+2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\}$ , позначимо  $d_n = c (\ln(x \cdot U(n)))^{\frac{\beta+1}{\beta}}$ . Виконується наступна рівність:

$$n^2 \cdot \exp\{-d_n\} = \exp\{2 \ln n - d_n\}.$$

Легко бачити, що якщо справджується нерівність

$$\frac{2 \ln n}{1 - \frac{1}{\ln 3}} \leq d_n,$$

тобто при  $x \geq \exp \left\{ \left( \frac{\ln 3}{c \sqrt{\beta} (\ln 3 - 1)} \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\}$ , то має місце наступна нерівність:

$$2 \ln n - d_n \leq -d_n \cdot \frac{1}{\ln(n+2)}.$$

Дійсно,  $\forall n \geq 1$ :

$$\begin{aligned}
x \geq \exp \left\{ \left( \frac{\ln 3}{c \sqrt{\beta} (\ln 3 - 1)} \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} &\Leftrightarrow \frac{2}{1 - \frac{1}{\ln 3}} \leq c \cdot 2^{\frac{\beta+1}{\beta}} (\ln x)^{\frac{\beta+1}{2\beta}} \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{2}{1 - \frac{1}{\ln(n+2)}} \leq c \cdot 2^{\frac{\beta+1}{\beta}} (\ln x)^{\frac{\beta+1}{2\beta}} &\Leftrightarrow \frac{2 \ln n}{1 - \frac{1}{\ln(n+2)}} \leq c \cdot 2^{\frac{\beta+1}{\beta}} (\ln x)^{\frac{\beta+1}{2\beta}} \ln n \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{2 \ln n}{1 - \frac{1}{\ln(n+2)}} &\leq c \cdot 2^{\frac{\beta+1}{\beta}} (\ln x)^{\frac{\beta+1}{2\beta}} \ln(n+2) \Rightarrow \\
\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Якщо } a > 0, b > 0, \text{ то } 2\sqrt{ab} \leq a + b \Rightarrow 2\sqrt{\ln x} \cdot (\ln(n+2))^{\frac{\beta}{\beta+1}} \leq \\ \leq \ln x + (\ln(n+2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}} = \ln \left( x \cdot \exp \left\{ (\ln(n+2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} \right) \end{array} \right| \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{2 \ln n}{1 - \frac{1}{\ln(n+2)}} \leq c \cdot \left( \ln \left( x \cdot \exp \left\{ (\ln(n+2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} \right) \right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}.
\end{aligned}$$

Тоді  $\forall x \geq \exp \left\{ \left( \frac{\ln 3}{c^{\frac{1}{\beta}} \sqrt{2}(\ln 3 - 1)} \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\}$  маємо наступне:

$$\begin{aligned} P \left\{ \eta > x \cdot a \cdot \exp \left\{ (\ln(n+2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} \right\} &\leq \frac{1}{n} \cdot \exp \left\{ -d_n \cdot \frac{1}{\ln(n+2)} \right\} = \\ &= \frac{1}{n} \cdot \exp \left\{ -c \cdot \left( \ln \left( x \cdot \exp \left\{ (\ln(n+2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} \right) \right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} \cdot \frac{1}{\ln(n+2)} \right\} = \\ &\leq \left| \begin{aligned} \text{Якщо } a > 0, b > 0, \text{ то } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow \ln \left( x \cdot \exp \left\{ (\ln(n+2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} \right) &= \\ &= \ln x + (\ln(n+2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \geq 2\sqrt{\ln x} \cdot (\ln(n+2))^{\frac{\beta}{\beta+1}} \end{aligned} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{n} \cdot \exp \left\{ -\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \cdot \left( \frac{2}{\beta+1} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} (\ln x)^{\frac{\beta+1}{2\beta}} \cdot \ln(n+2) \cdot \frac{1}{\ln(n+2)} \right\} = \\ &= \frac{1}{n} \exp \left\{ -\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \cdot \left( \frac{2}{\beta+1} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} (\ln x)^{\frac{\beta+1}{2\beta}} \right\}. \end{aligned}$$

**Означення 2** (див. [4]). Нехай  $(\mathbb{T}, \rho)$  – метричний простір. Метричною масивністю  $N_{(\mathbb{T}, \rho)}(u) := N(u)$ ,  $u > 0$  називається мінімальна кількість точок в  $u$ -сітці простору  $\mathbb{T}$  відносно метрики  $\rho$ .

**Означення 3** (див. [9]). Випадковий процес  $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$  належить простору  $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ , якщо для всіх  $t \in \mathbb{T}$  випадкова величина  $X(t) \in \mathbb{F}_\psi(\Omega)$ .

**Означення 4** (див. [4, 6]). Функція  $q = \{q(t), t \in \mathbb{R}\}$  називається модулем неперервності, якщо  $q(t) \geq 0$ ,  $q(0) = 0$  та  $q(t+s) \leq q(t) + q(s)$  при  $t > 0, s > 0$ .

**Означення 5** (див. [4, 6]). Нехай  $(\mathbb{T}, \rho)$  – метричний простір,  $q$  – модуль неперервності. Тоді сім'я функцій  $\{x(t), t \in \mathbb{T}\}$ , для яких

$$\sup_{\substack{t, s \in \mathbb{T} \\ t \neq s}} \frac{|x(t) - x(s)|}{q(\rho(t, s))} < \infty$$

(або ж  $\sup_{\rho(t, s) \leq h} |x(t) - x(s)| = o(q(h))$  при  $h \rightarrow 0$ ), називається простором Ліпшиця  $\Lambda_q(\mathbb{T}, \rho)$  (або ж  $\Lambda_q^0(\mathbb{T}, \rho)$ ).

**Теорема про модулі неперервності випадкових процесів з просторів  $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$  випадкових величин.** Сформулюємо теорему про модулі неперервності випадкових процесів з просторів  $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$  випадкових величин у загальному випадку та для експоненційної функції  $\psi(u)$ .

**Теорема 3** (див. [10]). Нехай  $(\mathbb{T}, \rho)$  – деякий компактний метричний простір. Розглянемо сепарабельний випадковий процес  $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$  з банахового простору  $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ , що задовольняє умові А з функціями  $U(n), z(x)$  та  $x_0 > 0$ . Припустимо, що існує монотонно зростаюча неперервна функція  $\sigma = \{\sigma(h), h \geq 0\}$  така, що  $\sigma(0) = 0$  та виконується наступна нерівність:

$$\sup_{\rho(t, s) \leq h} \|X(t) - X(s)\|_\psi \leq \sigma(h). \tag{2}$$

Нехай  $N(\varepsilon) = N_\rho(\mathbb{T}, \varepsilon)$  – метрична масивність простору  $(\mathbb{T}, \rho)$ . Також нехай  $\varepsilon_0 = \sigma^{(-1)} \left( \sup_{t,s \in \mathbb{T}} \rho(t,s) \right)$ ;  $\int_0^{\sigma(\varepsilon)} U(B^2 N^2(\sigma^{(-1)}(t))) dt < \infty$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Тоді для  $x > x_0$ ,  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  виконується наступна нерівність:

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon} \frac{|X(t) - X(s)|}{f_B(\rho(t,s))} > x \right\} \leq \frac{2B^2 + B}{(B^2 - 1)N(\varepsilon)} \cdot \exp\{-z(x)\},$$

де  $B > 1$  – деяке число,

$$f_B(\varepsilon) = (6 + 4\sqrt{2}) \int_0^{\sigma(\varepsilon)} U(BN(\sigma^{(-1)}(t))) dt + \\ + (5 + 2\sqrt{6}) \int_0^{\sigma(\varepsilon)} U(B^2 N^2(\sigma^{(-1)}(t))) dt, \quad \varepsilon > 0.$$

**Зауваження 1.** Якщо  $\psi(u) = e^{\alpha u^\beta}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , то, згідно із теоремою 2, простір  $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$  задовольняє умові А з функціями  $U(n) = \exp \left\{ (\ln(n+2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\}$ ,  $z(x) = \frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \left( \frac{2}{\beta+1} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} (\ln x)^{\frac{\beta+1}{2\beta}}$  і  $x_0 = \exp \left\{ \left( \frac{\ln 3}{b^{\beta/2}(\ln 3 - 1)} \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\}$ ,  $b = \frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \cdot (\beta+1)^{-\frac{\beta+1}{\beta}}$ . Тоді функція  $f_B(\varepsilon)$  набуває вигляду:

$$f_B(\varepsilon) = (6 + 4\sqrt{2}) \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \exp \left\{ (\ln(BN(\sigma^{(-1)}(t)) + 2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} dt + \\ + (5 + 2\sqrt{6}) \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \exp \left\{ (\ln(B^2 N^2(\sigma^{(-1)}(t)) + 2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} dt.$$

**Наслідок 1.** Нехай  $(\mathbb{T}, \rho)$  – деякий компактний метричний простір та  $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$  – сепарабельний випадковий процес з банахового простору  $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ , де  $\psi(u) = e^{\alpha u^\beta}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ . Припустимо, що існує монотонно зростаюча неперервна функція  $\sigma = \{\sigma(h), h \geq 0\}$  така, що  $\sigma(0) = 0$  та виконується нерівність (2). Також нехай  $N(\varepsilon)$  – метрична масивність простору  $(\mathbb{T}, \rho)$ ,  $\varepsilon_0 = \sigma^{(-1)} \left( \sup_{t,s \in \mathbb{T}} \rho(t,s) \right)$ ;  $\int_0^{\sigma(\varepsilon)} \exp \left\{ (\ln(B^2 N^2(\sigma^{(-1)}(t)) + 2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} dt < \infty$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Тоді для  $x > \exp \left\{ \left( \frac{\ln 3}{b^{\beta/2}(\ln 3 - 1)} \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\}$ ,  $b = \frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \cdot (\beta+1)^{-\frac{\beta+1}{\beta}}$  та  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  виконується наступна нерівність:

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon} \frac{|X(t) - X(s)|}{f_B(\rho(t,s))} > x \right\} \leq \\ \leq \frac{2B^2 + B}{(B^2 - 1)N(\varepsilon)} \cdot \exp \left\{ -\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \cdot \left( \frac{2}{\beta+1} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} (\ln x)^{\frac{\beta+1}{2\beta}} \right\},$$

де  $B > 1$  – деяке число,

$$f_B(\varepsilon) = (6 + 4\sqrt{2}) \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \exp \left\{ (\ln (BN (\sigma^{(-1)}(t)) + 2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} dt + \\ + (5 + 2\sqrt{6}) \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \exp \left\{ (\ln (B^2N^2 (\sigma^{(-1)}(t)) + 2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} dt.$$

**Умова Гельдера для випадкових процесів з просторів  $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$  випадкових величин з експоненційною функцією  $\psi(u)$ .**

**Теорема 4** (див. [10]). *Нехай виконуються усі припущення теореми 3. Тоді з ймовірністю 1:*

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\sup_{0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)|}{f_B(\varepsilon)} \leq 1,$$

де

$$f_B(\varepsilon) = (6 + 4\sqrt{2}) \int_0^{\sigma(\varepsilon)} U(BN(\sigma^{(-1)}(t))) dt + \\ + (5 + 2\sqrt{6}) \int_0^{\sigma(\varepsilon)} U(B^2N^2(\sigma^{(-1)}(t))) dt, \quad \varepsilon > 0.$$

Аналогічно має місце теорема у випадку експоненційної функції  $\psi(u)$ .

**Теорема 5.** *Нехай виконуються усі припущення наслідку 1. Тоді з ймовірністю 1:*

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\sup_{0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)|}{f_B(\varepsilon)} \leq 1,$$

де

$$f_B(\varepsilon) = (6 + 4\sqrt{2}) \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \exp \left\{ (\ln (BN (\sigma^{(-1)}(t)) + 2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} dt + \\ + (5 + 2\sqrt{6}) \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \exp \left\{ (\ln (B^2N^2 (\sigma^{(-1)}(t)) + 2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} dt, \quad \varepsilon > 0.$$

**Наслідок 2.** *За виконання умов теореми 5 для достатньо малих  $v$ :*

$$\sup_{\rho(t,s) \leq v} |X(t) - X(s)| \leq (6 + 4\sqrt{2}) \int_0^{\sigma(v)} \exp \left\{ (\ln (BN (\sigma^{(-1)}(t)) + 2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} dt + \\ + (5 + 2\sqrt{6}) \int_0^{\sigma(v)} \exp \left\{ (\ln (B^2N^2 (\sigma^{(-1)}(t)) + 2))^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} dt$$

з ймовірністю 1.

**Теорема 6.** Нехай виконуються усі припущення наслідку 1 за умови, що  $\sigma(h) = dh^c$ ,  $h, c, d > 0$  та простір  $\mathbb{T} = [0, T]$ . Тоді для  $\varepsilon \in \left(0, \sqrt[c]{\frac{T}{d}}\right)$ ,  $B > 1$ ,  $\forall x > \exp \left\{ \left( \frac{\ln 3}{b \sqrt[\beta]{2(\ln 3 - 1)}} \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\}$ ,  $b = \frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \cdot (\beta + 1)^{-\frac{\beta+1}{\beta}}$  та за умови, що  $\beta \in (0, 1)$ , виконується наступна нерівність:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ \sup_{0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon} \frac{|X(t) - X(s)|}{g_B(\rho(t,s))} > x \right\} &\leq \\ &\leq \frac{2B^2 + B}{(B^2 - 1)N(\varepsilon)} \cdot \exp \left\{ -\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \left( \frac{2}{\beta + 1} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} (\ln x)^{\frac{\beta+1}{2\beta}} \right\}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} g_B(\varepsilon) &= (5 + 2\sqrt{6}) \cdot \left( \exp \left\{ \left( \ln \left( B^2 T \sqrt[c]{d} \left( \frac{T \sqrt[c]{d}}{4} + 1 \right) + B^2 + 2 \right) \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \exp \left\{ \left( \ln \left( B^2 T \sqrt[c]{d} \left( \frac{T \sqrt[c]{d}}{4} + 1 \right) + \varepsilon \sqrt[c]{d} (B^2 + 2) \right) \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} \right) + \\ &\quad + d\varepsilon^c \left( (6 + 4\sqrt{2}) \cdot \exp \left\{ \left( \ln \left( \sqrt[c]{d} \left( \frac{BT}{2} + \varepsilon(B + 2) \right) \right) \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + (5 + 2\sqrt{6}) \cdot \exp \left\{ \left( \ln \left( B^2 T \sqrt[c]{d} \left( \frac{T \sqrt[c]{d}}{4} + 1 \right) + \varepsilon \sqrt[c]{d} (B^2 + 2) \right) \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} \right). \end{aligned}$$

Більше того, у метриці  $\rho(t, s) = |t - s|$ ,  $t, s \in [0, T]$ , справджується умова Гельдера для випадкового процесу  $X$ :

$$|X(t) - X(s)| = O(|t - s|^c), \quad c \in (0, 1).$$

**Доведення.** Оберненою функцією до функції  $\sigma(h) \in \sigma^{(-1)}(h) = \sqrt[c]{\frac{h}{d}}$ . Тоді функція  $f_B(\varepsilon)$  із наслідку 1 набуває вигляду:

$$\begin{aligned} f_B(\varepsilon) &= (6 + 4\sqrt{2}) \int_0^{d\varepsilon^c} \exp \left\{ \left( \ln \left( BN \left( \sqrt[c]{\frac{t}{d}} \right) + 2 \right) \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} dt + \\ &\quad + (5 + 2\sqrt{6}) \int_0^{d\varepsilon^c} \exp \left\{ \left( \ln \left( B^2 N^2 \left( \sqrt[c]{\frac{t}{d}} \right) + 2 \right) \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} dt. \end{aligned}$$

Оскільки простір  $\mathbb{T} = [0, T]$ , то справджується нерівність для метричної масивності:

$$N \left( \sqrt[c]{\frac{u}{d}} \right) = N(\sigma^{(-1)}(u)) \leq \frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 = \frac{T}{2\sqrt[c]{\frac{u}{d}}} + 1 = \frac{T}{2} \sqrt[c]{\frac{d}{u}} + 1.$$

Тому ми можемо обмежити зверху інтеграли функції  $f_B(\varepsilon)$ :

$$\int_0^{d\varepsilon^c} \exp \left\{ \left( \ln \left( BN \left( \sqrt[c]{\frac{t}{d}} \right) + 2 \right) \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} dt \leq$$

$$\leq \int_0^{d\varepsilon^c} \exp \left\{ \left( \ln \left( B \cdot \left( \frac{T}{2} \sqrt[c]{\frac{d}{t}} + 1 \right) + 2 \right) \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} dt =: I_1;$$

$$\int_0^{d\varepsilon^c} \exp \left\{ \left( \ln \left( B^2 N^2 \left( \sqrt[c]{\frac{t}{d}} \right) + 2 \right) \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} dt \leq$$

$$\leq \int_0^{d\varepsilon^c} \exp \left\{ \left( \ln \left( B^2 \cdot \left( \frac{T}{2} \sqrt[c]{\frac{d}{t}} + 1 \right)^2 + 2 \right) \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} dt =: I_2.$$

Умовою скінченності цих інтегралів є  $\frac{2\beta}{\beta+1} < 1 \Leftrightarrow \beta \in (0, 1)$ . У такому разі можемо оцінити та обчислити інтеграли  $I_1$  та  $I_2$ :

$$I_1 \leq d\varepsilon^c \cdot \exp \left\{ \left( \ln \left( \sqrt[c]{d} \left( \frac{BT}{2} + \varepsilon(B+2) \right) \right) \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\};$$

$$I_2 \leq \exp \left\{ \left( \ln \left( B^2 T \sqrt[c]{d} \left( \frac{T \sqrt[c]{d}}{4} + 1 \right) + B^2 + 2 \right) \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} +$$

$$+ (d\varepsilon^c - 1) \cdot \exp \left\{ \left( \ln \left( B^2 T \sqrt[c]{d} \left( \frac{T \sqrt[c]{d}}{4} + 1 \right) + \varepsilon \sqrt[c]{d} (B^2 + 2) \right) \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\}.$$

Оскільки

$$\varepsilon_0 = \sigma^{(-1)} \left( \sup_{t,s \in \mathbb{T}} \rho(t,s) \right) = \sqrt[c]{\frac{\sup_{t,s \in [0,T]} \rho(t,s)}{d}} = \sqrt[c]{\frac{T}{d}},$$

то, згідно із наслідком 1, для  $\varepsilon \in \left( 0, \sqrt[c]{\frac{T}{d}} \right)$ ,  $B > 1$ ,  $\forall x > \exp \left\{ \left( \frac{\ln 3}{b \sqrt{2}(\ln 3 - 1)} \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\}$ ,

$b = \frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \cdot (\beta + 1)^{-\frac{\beta+1}{\beta}}$  та за умови, що  $\beta \in (0, 1)$ , виконується наступна нерівність:

$$P \left\{ \sup_{0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon} \frac{|X(t) - X(s)|}{g_{B,1}(\rho(t,s)) + g_{B,2}(\rho(t,s)) \cdot (\rho(t,s))^c} > x \right\} \leq$$

$$\leq \frac{2B^2 + B}{(B^2 - 1)N(\varepsilon)} \cdot \exp \left\{ -\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \left( \frac{2}{\beta + 1} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} (\ln x)^{\frac{\beta+1}{2\beta}} \right\},$$



де

$$g_{B,1}(\varepsilon) = (5 + 2\sqrt{6}) \cdot \left( \exp \left\{ \left( \ln \left( B^2 T \sqrt[\beta]{d} \left( \frac{T \sqrt[\beta]{d}}{4} + 1 \right) + B^2 + 2 \right) \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} - \right. \\ \left. - \exp \left\{ \left( \ln \left( B^2 T \sqrt[\beta]{d} \left( \frac{T \sqrt[\beta]{d}}{4} + 1 \right) + \varepsilon \sqrt[\beta]{d} (B^2 + 2) \right) \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} \right),$$

$$g_{B,2}(\varepsilon) = d \left( (6 + 4\sqrt{2}) \cdot \exp \left\{ \left( \ln \left( \sqrt[\beta]{d} \left( \frac{BT}{2} + \varepsilon(B + 2) \right) \right) \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} + \right. \\ \left. + (5 + 2\sqrt{6}) \cdot \exp \left\{ \left( \ln \left( B^2 T \sqrt[\beta]{d} \left( \frac{T \sqrt[\beta]{d}}{4} + 1 \right) + \varepsilon \sqrt[\beta]{d} (B^2 + 2) \right) \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} \right).$$

Також, відповідно до наслідку 2, має місце нерівність:

$$\sup_{0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| \leq g_{B,1}(\varepsilon) + g_{B,2}(\varepsilon) \cdot \varepsilon^c.$$

Більше того, оскільки  $g_{B,1}(\varepsilon) \leq g_{B,1}(0)$  та  $g_{B,2}(\varepsilon) \leq g_{B,2}(\varepsilon_0)$ , то справджується наступна нерівність:

$$\sup_{0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| \leq g_{B,1}(0) + g_{B,2}(\varepsilon_0) \cdot \varepsilon^c.$$

Отже, якщо обрати метрику  $\rho(t, s) = |t - s|$ ,  $t, s \in [0, T]$ , то матимемо:

$$|X(t) - X(s)| = O(|t - s|^c), \quad c \in (0, 1).$$

Наступна теорема випливає з наслідку 1.

**Теорема 7.** *Нехай  $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$  — випадковий процес, для якого виконуються припущення наслідку 1. Якщо  $f_B(\varepsilon) \leq q_B(\varepsilon)$  в околі нуля, де  $q_B$  — деякий модуль неперервності, то з ймовірністю 1 процес  $X$  належить простору  $\Lambda_q(\mathbb{T}, \rho)$  і виконується наступна нерівність:*

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{0 < \rho(t,s) \leq \varepsilon} \frac{|X(t) - X(s)|}{q_B(\rho(t, s))} > x \right\} \leq \\ \leq \frac{2B^2 + B}{(B^2 - 1)N(\varepsilon)} \cdot \exp \left\{ -\frac{\beta}{\alpha^{1/\beta}} \cdot \left( \frac{2}{\beta + 1} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} (\ln x)^{\frac{\beta+1}{2\beta}} \right\}. \quad (3)$$

Якщо ж  $f_B(\varepsilon) = o(q_B(\varepsilon))$ , то з ймовірністю 1 процес  $X$  належить простору  $\Lambda_q^0(\mathbb{T}, \rho)$  та для достатньо малих  $\varepsilon$  має місце нерівність (3).

**Наслідок 3.** *Нехай функція  $\sigma(h) = dh^c$ ,  $c, d, h > 0$ . Розглянемо випадковий процес  $X = (X(t), t \in \mathbb{T})$ , для якого виконуються припущення наслідку 1, та деякий модуль неперервності  $q_B$ . Якщо*

$$\int_0^{d\varepsilon_0^c} \frac{\exp \left\{ \left( \ln \left( B^2 N^2 \left( \sqrt{\frac{c}{d}} \right) + 2 \right) \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\}}{q_B(t)} dt < \infty,$$

то з ймовірністю 1 процес  $X$  належить простору  $\Lambda_q^0(\mathbb{T}, \rho)$ .

**Доведення.** Функцію  $f_B(\varepsilon)$  із наслідку 1 можна обмежити наступним чином:

$$\begin{aligned} f_B(\varepsilon) &= (6 + 4\sqrt{2}) \int_0^{d\varepsilon^c} \exp \left\{ \left( \ln \left( BN \left( \sqrt{\frac{c}{d}} \right) + 2 \right) \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} dt + \\ &+ (5 + 2\sqrt{6}) \int_0^{d\varepsilon^c} \exp \left\{ \left( \ln \left( B^2 N^2 \left( \sqrt{\frac{c}{d}} \right) + 2 \right) \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\} dt = \\ &= (6 + 4\sqrt{2}) \int_0^{d\varepsilon^c} q_B(t) \cdot \frac{\exp \left\{ \left( \ln \left( BN \left( \sqrt{\frac{c}{d}} \right) + 2 \right) \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\}}{q_B(t)} dt + \\ &+ (5 + 2\sqrt{6}) \int_0^{d\varepsilon^c} q_B(t) \cdot \frac{\exp \left\{ \left( \ln \left( B^2 N^2 \left( \sqrt{\frac{c}{d}} \right) + 2 \right) \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\}}{q_B(t)} dt \leq \\ &\leq (6 + 4\sqrt{2}) q_B(\varepsilon) \int_0^{d\varepsilon^c} \frac{\exp \left\{ \left( \ln \left( BN \left( \sqrt{\frac{c}{d}} \right) + 2 \right) \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\}}{q_B(t)} dt + \\ &+ (5 + 2\sqrt{6}) q_B(\varepsilon) \int_0^{d\varepsilon^c} \frac{\exp \left\{ \left( \ln \left( B^2 N^2 \left( \sqrt{\frac{c}{d}} \right) + 2 \right) \right)^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \right\}}{q_B(t)} dt = \\ &= o(q_B(\varepsilon)), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Остаточно твердження цього наслідку випливає з теореми 7.

**Висновок.** У цій роботі знайдено умови, за яких траєкторії випадкового процесу  $X$  з простору  $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$  випадкових величин з експоненційною функцією  $\psi$  задовольняють умові Гельдера, та отримано оцінки розподілів норм траєкторій випадкових процесів у просторі Гельдера. У подальшому планується розглянути модулі неперервності випадкових процесів з просторів  $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$  на нескінченних інтервалах.

### Список використаної літератури

1. *Dudley R. M.* Sample functions of the Gaussian processes // *Annal. of Probability.* – 1973. – 1, №1. – С. 3–68.

2. *Kozachenko Yu. V.* Random processes in Orlicz spaces. I // Theory Probab. Math. Stat. – 1985. – №30. – С. 103–117.
3. *Kozachenko Yu. V.* Random processes in Orlicz spaces. II // Theory Probab. Math. Stat. – 1985. – №31. – С. 51–58.
4. *Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V.* Metric Characterization of Random Variables and Random Processes. – American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
5. *Zatula D. V.* Modules of continuity of random processes from Orlicz spaces of random variables, defined on the interval // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. – 2013. – №2. – С. 23–28.
6. *Kozachenko Yu., Sottinen T., Vasylyk O.* Lipschitz conditions for  $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ -processes and applications to weakly self-similar processes with stationary increments // Theor. Probability and Math. Statist. – 2011. – №82. – С. 57–73.
7. *Zatula D.* Lipschitz conditions for random processes from  $L_p(\Omega)$  spaces of random variables // Journal of Classical Analysis. – 2015. – 6, №1. – С. 59–72.
8. *Ермаков С. В., Островский Е. И.* Условия непрерывности, экспоненциальные оценки и центральная предельная теорема для случайных полей. – М., 1986. – 42 с. – Деп. в ВИНТИ, №3752-В.86.0.
9. *Козаченко Ю. В., Млавець Ю. Ю.* Простори Банаха випадкових величин  $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$  // Теорія ймовір. та матем. статист. – 2012. – Вип. 86. – С. 92–107.
10. *Затула Д. В., Козаченко Ю. В.* Умови Ліпшиця для випадкових процесів з банахових просторів  $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$  випадкових величин // Теорія ймовір. та матем. статист. – 2014. – Вип. 91. – С. 38–54.

Одержано 20.02.2015