УДК 519.21

О. О. Курченко (Київський нац. ун-т імені Т. Шевченка)

БАКСТЕРІВСЬКА ОЦІНКА В ОДНІЙ НЕГАУССОВІЙ МОДЕЛІ

In this article the strong consistent estimate of the parameter θ by the observations of the random process $X(t) = \theta\xi(t) + \eta(t), t \in [0,1]$, where $\xi(\cdot), \eta(\cdot)$ are the random process with the increments of the K_1 class, by using the Baxter sums is constructed. The non asymptotic confidence intervals are found.

У цій статті за допомогою бакстерівських сум побудована сильно консистентна оцінка параметра θ за спостереженнями випадкового процесу $X(t) = \theta\xi(t) + \eta(t), t \in [0,1]$ у припущенні, що $\xi(\cdot), \eta(\cdot)$ — випадкові процеси з приростами класу K_1. Знайдені неасимптотичні довірчі інтервали.

Вступ. Бакстерівською сумою випадкового процесу $X(t), t \in [0,1]$ для розбиття $\lambda_n = \{0 = t_0, t_1, \ldots, t_n = 1\}$ називається випадкова величина

$$S(X, \lambda_n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\Delta X(t_k)),$$

де $\Delta X(t_k) = X(t_{k+1}) - X(t_k), f : \mathbf{R} \to [0, +\infty)$ — борелівська функція. Надалі $f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$. Поряд з приростами першого порядку, розглядаються бакстерівські суми з приростами

$$\Delta^p X(t_k) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_p^i X(t_k + (p-i)h)$$

порядку $p \geq 2$, де $h = \frac{t_{k+1} - t_k}{p}, 0 \leq k \leq n-1; C_p^i$ — біноміальні коефіцієнти. Бакстерівські суми визначаються також для випадкових полів, де більш широкі можливості для вибору виду приросту на багатовимірному паралелепіпеді.

Граничні теореми, в яких стверджується збіжність у тому чи іншому сенсі до детермінованої додатної сталої послідовності бакстерівських сум з відповідним чином підібраними нормуючими коефіцієнтами, називають теоремами бакстерівського типу або теоремами Леві-Бакстера. Для гауссових випадкових процесів і полів теореми бакстерівського типу були отримані різними авторами. Для випадкових процесів піонерськими роботами у цьому напрямі були статті [1]–[3], а для гауссових випадкових полів — [4]– [6]. У статті [7] отримана теорема бакстерівського типу для випадкових процесів без припущення гауссовості.

Останнім часом у статистиці випадкових процесів для оцінювання параметрів застосовується метод бакстерівських сум. Так, наприклад, у роботах [8], [9] цей метод був застосований для оцінювання параметра Хюрста дробового броунівського руху, а у статті [10] — для оцінки параметра коваріаційної функції багатопараметричного дробового броунівського поля. У монографії [11] застосуванню бакстерівських сум у статистиці випадкових процесів присвячено підрозділ. Граничні теореми бакстерівського типу забезпечують консистентність оцінок, отриманих бакстерівським методом. З обчислювальної точки зору знаходження оцінок параметрів за допомогою бакстерівських сум значно простіше порівняно з іншими методами. Ще одна перевага методу бакстерівських сум полягає у тому, що цей метод дозволяє будувати неасимптотичні вірогідні інтервали для параметрів, що оцінюються. У статті [12] методом бакстерівських сум побудована оцінка коефіцієнта в одній гауссовій моделі та вказані неасимптотичні інтервали вірогідності для цього коефіцієнта. Мета пропонованої читачу роботи — розв'язати аналогічну задачу без припущення гауссовості випадкових процесів.

1. Випадкові процеси з приростами класу K. У статті [7] отримані граничні теореми бакстерівського типу для випадкових процесів без припущення гауссовості. Натомість накладена умова, щоб прирости випадкового процесу на інтервалах без спільних внутрішніх точок утворювали вектор класу K. Наведемо відповідні означення.

Означення 1. *[7] Нехай ξ, η — випадкові величини із скінченним четвертим моментом. Кажуть, що випадковий вектор (ξ, η) має властивість K, якщо*

1) $E\xi = E\eta = 0,$

2) $E(\xi \pm \eta)^4 \leq 3\left(E\left(\xi \pm \eta\right)^2\right)^2.$

Множину всіх двовимірних векторів з властивістю K також позначимо через K. Підмножину K_1 множини K визначимо як усі ті вектори класу K, для яких $E(\xi \pm \eta)^4 = 3\left(E\left(\xi \pm \eta\right)^2\right)^2$.

Наприклад, гауссовий випадковий вектор з нульовим середнім значенням належить множині K_1. Приклади негауссових випадкових векторів, що належать множині K, наведені у статті [7].

Означення 2. *[7] Випадковий процес $\{X(t), t \in [0,1]\}$ з нульовим математичним сподіванням називається випадковим процесом з приростами класу K (відповідно K_1), якщо для довільних $0 \leq s \leq t \leq u \leq v \leq 1$ випадковий вектор (ξ, η), де $\xi = X(t) - X(s), \eta = X(v) - X(u)$, належить множині K (відповідно K_1).*

Гауссовий випадковий вектор з нульовим середнім значенням є випадковим процесом з приростами класу K_1. Приклади негауссових випадкових процесів з приростами класу K наведені у статтях [7], [13]. Робота [7] містить теорему бакстерівського типу для випадкового процесу з приростами класу K.

2. Постановка задачі оцінювання та припущення. Нехай $\{\xi(t), t \in [0,1]\}, \{\eta(t), t \in [0,1]\}$ — випадкові процеси з нульовими математичними сподіваннями та стаціонарними у широкому сенсі приростами класу K_1; $\lambda_n = \left\{0, \frac{1}{a_n}, \frac{2}{a_n}, \dots, \frac{a_n - 1}{a_n}, 1\right\}$, $n \geq 1$, — послідовність рівномірних розбиттів відрізка $[0,1]$ з кроком $\frac{1}{a_n}$, де $(a_n) \subset \mathbf{N}$ — розбіжна до $+\infty$ послідовність. За спостереженнями випадкового процесу

$$X(t) = \theta\xi(t) + \eta(t), t \in [0,1]$$

у точках $\left\{\frac{k}{a_n} | 0 \leq k \leq a_n, n \geq 1\right\}$ потрібно оцінити параметр θ із відрізка $[0, d]$.

Через ξ_k, η_k, X_k позначимо відповідно прирости випадкових процесів $\xi(t)$, $\eta(t), X(t)$ на відрізку $\left[\frac{k}{a_n}, \frac{k+1}{a_n}\right], 0 \le k \le a_n - 1; n \ge 1$. Із означення 2 та властивостей випадкових векторів класу K [7], випливає, що для приростів випадкового процесу $\xi(t)$ справджується нерівність

$$E\left(\xi_k^2 \xi_j^2\right) \le 2\left(E\left(\xi_k \xi_j\right)\right)^2 + E\xi_k^2 E\xi_j^2, 0 \le k, j \le a_n - 1. \quad (1)$$

Зрозуміло, що така ж нерівність виконується для приростів випадкового процесу $\eta(t)$. Через $r(t,s)\, t, s \in [0,1]$ позначимо коваріаційну функцію випадкового процесу $\xi(t), t \in [0,1]$. Припустимо, що випадкові процеси $\xi(t), \eta(t)$ задовольняють наступні умови:

(A1) Для деяких додатних сталих c, δ, параметра $H \in (0,1)$ справжується співвідношення:

$$E\left(\xi(s) - \xi(0)\right)^2 = cs^{2H} + O\left(s^{2H+\delta}\right), s \to 0+.$$

(A2) Існує стала $\beta > 2H$ така, що:

$$E\left(\xi(s) - \xi(0)\right)^2 = O\left(s^{\beta}\right), s \to 0+.$$

(A3) Коваріаційна функція $r(t,s)\, t, s \in [0,1]$ випадкового процесу $\xi(t), t \in [0,1]$ двічі неперервно диференційовна при $t \ne s$ і

$$\left|\frac{\partial r(t,s)}{\partial t \partial s}\right| \le \frac{L}{|t-s|^{2-2H}},$$

де L — додатна стала.

На послідовність (a_n) накладемо умову:

(B1) Для довільного додатного числа $\alpha > 0$ ряд із загальним членом $a_n^{-\alpha}$ збіжний.

Умови (A1), (A3) у сукупності з умовою (B1) забезпечать збіжність з ймовірністю одиниця послідовності зважених множником a_n^{2H-1} бакстерівських сум випадкового процесу $\xi(t), t \in [0,1]$ до сталої c. Завдяки умовам (A2) та (B1), послідовність так само зважених бакстерівських сум випадкового процесу $\eta(t), t \in [0,1]$ з ймовірністю одиниця прямує до нуля.

3. Консистентність бакстерівської оцінки. Розглянемо послідовность зважених множником a_n^{2H-1} бакстерівських сум випадкового процесу $\{X(t), t \in [0,1]\}$

$$S_n = a_n^{2H-1} \sum_{k=0}^{a_n-1} X_k^2 \, n \ge 1.$$

Теорема 1. *Нехай випадкові процеси $\{\xi(t), t \in [0,1]\}; \{\eta(t), t \in [0,1]\}$ із стаціонарними приростами класу K_1 задовольняють припущення (A1)–(A3), послідовність (a_n) задовольняє припущення (B1). Тоді статистика*

$$\theta_n = \sqrt{\frac{S_n(X)}{c}}, n \ge 1$$

— сильно консистентна оцінка параметра $\theta \in [0,d]$ за спостереженнями випадкового процесу $X(t) = \theta\xi(t) + \eta(t), t \in [0,1]$ у точках $\left\{\frac{k}{a_n} | 0 \le k \le a_n, n \ge 1\right\}$.

Доведення. Розіб'ємо на три кроки доведення даної теореми. Спочатку доведемо, що

$$S_n(\eta) = a_n^{2H-1} \sum_{k=0}^{a_n-1} \eta_k^2 \to 0 \tag{2}$$

з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$ (перший крок) і

$$S_n(\xi) = a_n^{2H-1} \sum_{k=0}^{a_n-1} \eta_k^2 \to c \tag{3}$$

з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$ (другий крок). На третьому кроці отримаємо, що $S_n(X) \to c\theta^2$ з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$, звідки випливатиме твердження теореми.

I. Доведемо, що границя

$$\lim_{n\to\infty} ES_n(\eta) = 0. \tag{4}$$

Дійсно,

$$ES_n(\eta) = a_n^{2H-1} E\left(\sum_{k=0}^{a_n-1} \eta_k^2\right) = a_n^{2H-1} a_n E\eta_0^2 = a_n^{2H} O\left(\frac{1}{a_n^{\beta}}\right) \to 0, n \to \infty,$$

оскільки $\beta > 2H$. Далі,

$$\mathrm{Var} S_n(\eta) = ES_n^2(\eta) - (ES_n(\eta))^2 = a_n^{4H-2} \sum_{k,j=0}^{a_n-1} \left(E\left(\eta_k^2\eta_j^2\right) - E\eta_k^2 E\eta_j^2\right) \leq$$

$$\leq 2a_n^{4H-2} \sum_{k,j=0}^{a_n-1} \left(E\left(\eta_k\eta_j\right)\right)^2 \leq 2a_n^{4H-2} \sum_{k,j=0}^{a_n-1} E\eta_k^2 E\eta_j^2 =$$

$$= 2a_n^{4H-2} a_n^2 \left(E\eta_0^2\right)^2 = 2a_n^{4H} O\left(\frac{1}{a_n^{2\beta}}\right) = O\left(\frac{1}{a_n^{2(\beta-2H)}}\right), n \to \infty.$$

У цьому ланцюжку співвідношень застосована нерівність (1) та нерівність Коші-Буняковського: $(E(\eta_k\eta_j)) \leq E\eta_k^2 E\eta_j^2$, $0 \leq k, j \leq a_n - 1$. Врахована також стаціонарність приростів.

Оскільки $\beta > 2H$, то, внаслідок припущення (B1), ряд із загальним членом $a_n^{2(2H-\beta)}$ збігається, звідки випливає збіжність ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Var} S_n(\eta)$. Тому $S_n(\eta) - ES_n(\eta) \to 0$ з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$. Враховуючи (4), отримуємо (2).

II. Доведемо, що границя

$$\lim_{n\to\infty} ES_n(\xi) = c. \tag{5}$$

Дійсно, внаслідок умови (A1),

$$ES_n(\xi) = a_n^{2H-1} E\left(\sum_{k=0}^{a_n-1} \xi_k^2\right) = a_n^{2H-1} a_n \left(\frac{c}{a_n^{2H}} + O\left(\frac{1}{a_n^{2H+\delta}}\right)\right) =$$

$$= c + O\left(\frac{1}{a_n^\delta}\right) \to c, n \to \infty.$$

Як і для дисперсії $\mathrm{Var} S_n(\eta)$,

$$\mathrm{Var} S_n(\xi) \leq 2a_n^{4H-2} \sum_{k,j=0}^{a_n-1} \left(E\xi_k \xi_j\right)^2.$$

Оцінимо суму у правій частині останньої нерівності. Для цього окремо розглянемо доданки, для яких $|k-j| \leq 2$ і $|k-j| > 2$:

$$\sum_{k,j=0}^{a_n-1} \left(E\xi_k \xi_j\right)^2 = \sum_{\substack{k,j=0,\\ |k-j|\leq 2}}^{a_n-1} \left(E\xi_k \xi_j\right)^2 + \sum_{\substack{k,j=0,\\ |k-j|>2}}^{a_n-1} \left(E\xi_k \xi_j\right)^2. \tag{6}$$

Кількість доданків у сумі $\sum_{\substack{k,j=0,\\ |k-j|\leq 2}}^{a_n-1} \left(E\xi_k \xi_j\right)^2$ дорівнює $5a_n - 4$. Застосовуючи до кожного доданка цієї суми нерівність Коші-Буняковського, отримаємо:

$$\sum_{\substack{k,j=0,\\ |k-j|\leq 2}}^{a_n-1} \left(E\xi_k \xi_j\right)^2 \leq \sum_{\substack{k,j=0,\\ |k-j|\leq 2}}^{a_n-1} E\xi_k^2 E\xi_j^2 = (5a_n - 4)\left(E\xi_0^2\right)^2 \leq$$

$$\leq 5a_n \left(\frac{c}{a_n^{2H}} + O\left(\frac{1}{a_n^{2H+\delta}}\right)\right)^2 = O\left(\frac{1}{a_n^{4H-1}}\right), n \to \infty. \tag{7}$$

Для оцінки суми $\sum_{\substack{k,j=0,\\ |k-j|>2}}^{a_n-1} \left(E\xi_k \xi_j\right)^2$ скористаємося тим, що для відрізків $[t, t+h], [s, s+h] \subset [0,1]$ без спільних внутрішніх точок

$$E\left(\xi(t+h) - \xi(t)\right)\left(\xi(s+h) - \xi(s)\right) = r(t+h, s+h) - r(t, s+h) -$$

$$- r(t+h, s) + r(t, s) = \int_t^{t+h} du \int_s^{s+h} \frac{\partial^2 r(u,v)}{\partial u \partial v} dv.$$

Тому, внаслідок умови (A3), для $|k-j| > 2$ маємо:

$$|E\xi_k \xi_j| \leq \int_{\frac{k}{a_n}}^{\frac{(k+1)}{a_n}} du \int_{\frac{j}{a_n}}^{\frac{(j+1)}{a_n}} \left|\frac{\partial^2 r(u,v)}{\partial u \partial v}\right| dv \leq \frac{L}{\left(|k-j|-1\right)^{2-2H}} \cdot a_n^{2-2H} \frac{1}{a_n^2} =$$

$$= \frac{L}{\left(|k-j|-1\right)^{2-2H}} \cdot \frac{1}{a_n^{2H}}.$$

Отже,

$$\sum_{\substack{k,j=0,\\ |k-j|>2}}^{a_n-1} \left(E\xi_k \xi_j\right)^2 \leq \sum_{\substack{k,j=0,\\ |k-j|>2}}^{a_n-1} \frac{L^2}{\left(|k-j|-1\right)^{4-4H}} \cdot \frac{1}{a_n^{4H}} =$$

$$= 2\sum_{l=3}^{a_n-1}(a_n-l)\frac{L^2}{(l-1)^{4-4H}}\cdot\frac{1}{a_n^{4H}} = \begin{cases} O\left(\frac{1}{a_n^{4H-1}}\right), & 0<H<\frac{3}{4}, \\ O\left(\frac{\ln a_n}{a_n^{4H-1}}\right), & H=\frac{3}{4}, \\ O\left(\frac{1}{a_n^2}\right), & \frac{3}{4}<H<1 \end{cases} \tag{8}$$

при $n\to\infty$. Із оцінок (7), (8) випливає, що

$$\mathrm{Var}S_n(\xi) = \begin{cases} O\left(\frac{1}{a_n}\right), & 0<H<\frac{3}{4}, \\ O\left(\frac{\ln a_n}{a_n}\right), & H=\frac{3}{4}, \\ O\left(\frac{1}{a_n^{4(1-H)}}\right), & \frac{3}{4}<H<1 \end{cases}$$

при $n\to\infty$. Із припущення (B1) випливає, що для довільного $H\in(0,1)$ ряд із дисперсій $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Var}S_n(\xi)$ збіжний. Тому $S_n(\xi)-ES_n(\xi)\to 0$ з ймовірністю одиниця при $n\to\infty$. Враховуючи (5), отримуємо (3).

III. Тепер доведемо, що

$$S_n(X)\to c\theta^2$$

при $n\to\infty$. Маємо:

$$S_n(X) = a_n^{2H-1}\sum_{k=0}^{a_n-1}X_k^2 = a_n^{2H-1}\sum_{k=0}^{a_n-1}(\theta\xi_k+\eta_k)^2 =$$

$$= \theta^2 S_n(\xi)+S_n(\eta)+2\theta a_n^{2H-1}\sum_{k=0}^{a_n-1}\xi_k\eta_k.$$

Останній доданок прямує до нуля з ймовірністю одиниця при $n\to\infty$. Дійсно,

$$a_n^{2H-1}\left|\sum_{k=0}^{a_n-1}\xi_k\eta_k\right| \le \sqrt{a_n^{2H-1}\sum_{k=0}^{a_n-1}\xi_k^2\cdot a_n^{2H-1}\sum_{k=0}^{a_n-1}\eta_k^2}\to 0$$

з ймовірністю одиниця при $n\to\infty$. Отже,

$$S_n(X)\to c\theta^2$$

з ймовірністю одиниця при $n\to\infty$, звідки випливає твердження теореми.

4. Довірчі інтервали для параметра θ. Для побудови довірчих інтервалів для параметра θ зробимо такі додаткові припущення:

(A) Випадкові процеси $\{\xi(t), t\in[0,1]\}; \{\eta(t), t\in[0,1]\}$ із стаціонарними приростами класу K_1 незалежні.

(A1') Для деяких сталих $c>0, \delta>0, q\ge 0$, параметра $H\in(0,1)$, справджується нерівність:

$$\left|E\left(\xi(s)-\xi(0)\right)^2 - cs^{2H}\right| \le qs^{2H+\delta}$$

для всіх $s\in(0,1)$.

(A2') Для деяких сталих $b > 0, \beta > 2H$ (параметр $H \in (0,1)$ визначений у припущенні (A1')) справджується нерівність:

$$\left|E\left(\eta(s) - \eta(0)\right)^2\right| \leq bs^\beta$$

для всіх $s \in (0,1)$.

Припущення (A3) залишається без змін. Як легко бачити, із припущень (A1'), (A2') випливають припущення (A1), (A2) відповідно. Внаслідок припущення (A), як це випливає із властивостей випадкових векторів класу K (K_1), випадковий процес $\{X(t), t \in [0,1]\}$ має прирости класу K_1.

Спочатку побудуємо довірчий інтервал для $c\theta^2$. Зауважимо, що

$$\left|S_n(X) - c\theta^2\right| \leq |S_n(X) - ES_n(X)| + \left|ES_n(X) - c\theta^2\right|.$$

Другий доданок правої частини цієї нерівності є детермінованою величиною. Оцінимо його зверху:

$$\left|ES_n(X) - c\theta^2\right| = \left|E\left(\theta^2 S_n(\xi) + S_n(\eta)\right) - c\theta^2\right| \leq \theta^2 \left|ES_n(\xi) - c\right| + ES_n(\eta) =$$

$$= \theta^2 \left|a_n^{2H-1} a_n E\xi_0^2 - c\right| + ES_n(\eta) = \theta^2 a_n^{2H} \left|E\xi_0^2 - \frac{c}{a_n^{2H}}\right| + a_n^{2H-1} a_n E\eta_0^2 \leq$$

$$\leq d^2 \cdot a_n^{2H} \cdot q \cdot \frac{1}{a_n^{2H+\delta}} + \frac{b}{a_n^{\beta-2H}} = \frac{qd^2}{a_n^\delta} + \frac{b}{a_n^{\beta-2H}} =: \Delta_n.$$

Внаслідок нерівності Чебишова,

$$P\left\{|S_n(X) - ES_n(X)| > \varepsilon\right\} \leq \frac{\mathrm{Var} S_n(X)}{\varepsilon^2}.$$

Із припущення (A) випливає, що випадкові величини $S_n(\xi), S_n(\eta)$ незалежні і тому

$$\mathrm{Var} S_n(X) = \theta^4 \mathrm{Var} S_n(\xi) + \mathrm{Var} S_n(\eta). \tag{9}$$

Оцінимо зверху кожну з дисперсій $\mathrm{Var} S_n(\xi), \mathrm{Var} S_n(\eta)$. Як і у попередньому пункті,

$$\mathrm{Var} S_n(\eta) \leq 2a_n^{4H-2} \sum_{k,j=0}^{a_n-1} \left(E\eta_k \eta_j\right)^2 \leq 2a_n^{4H-2} \sum_{k,j=0}^{a_n-1} \left(E\eta_0^2\right)^2 = 2b^2 a_n^{2(2H-\beta)}, \tag{10}$$

$$\mathrm{Var} S_n(\xi) \leq 2a_n^{4H-2} \sum_{k,j=0}^{a_n-1} \left(E\xi_k \xi_j\right)^2. \tag{11}$$

Як і у доведенні теореми 1, розіб'ємо суму у правій частині нерівності (11) на дві суми:

$$\sum_{k,j=0}^{a_n-1} \left(E\xi_k \xi_j\right)^2 = \sum_{\substack{k,j=0,\\ |k-j|\leq 2}}^{a_n-1} \left(E\xi_k \xi_j\right)^2 + \sum_{\substack{k,j=0,\\ |k-j|>2}}^{a_n-1} \left(E\xi_k \xi_j\right)^2.$$

Далі,

$$\sum_{\substack{k,j=0,\\|k-j|\le 2}}^{a_n-1} (E\xi_k\xi_j)^2 \le (5a_n-4)\left(E\xi_0^2\right) \le 5a_n(c+q)^2\frac{1}{a_n^{4H}}. \tag{12}$$

Аналогічно ланцюжку співвідношень (8),

$$\sum_{\substack{k,j=0,\\|k-j|>2}}^{a_n-1} (E\xi_k\xi_j)^2 \le 2L^2\sum_{l=3}^{a_n-1}(a_n-l)\frac{1}{(l-1)^{4-4H}}\cdot\frac{1}{a_n^{4H}} \le$$

$$\le 2L^2a_n^{1-4H}\sum_{l=3}^{a_n-1}\frac{1}{(l-1)^{4-4H}}\cdot\frac{1}{a_n^{4H}} \le 2L^2a_n^{1-4H}C_n(H), \tag{13}$$

де

$$C_n(H)=\begin{cases}\zeta\left(4-4H\right), & 0<H<\frac{3}{4},\\ \ln a_n, & H=\frac{3}{4},\\ \frac{a_n^{4H-3}}{4H-3}, & \frac{3}{4}<H<1,\end{cases} \tag{14}$$

$\zeta(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^y}, y>1$. Таким чином,

$$\mathrm{Var}S_n(\xi)\le 2a_n^{4H-2}\left(5a_n^{1-4H}(c+q)^2+2L^2a_n^{1-4H}C_n(H)\right)=$$

$$=\frac{2}{a_n}\left(5(c+q)^2+2L^2C_n(H)\right). \tag{15}$$

Із рівності (9), нерівностей (10), (15) випливає, що

$$\mathrm{Var}S_n(X)\le\frac{2d^4}{a_n}\left(5(c+q)^2+2L^2C_n(H)\right)+2b^2a_n^{2(2H-\beta)}=:B_n(H).$$

Нехай заданий рівень довіри $1-p$. З рівності $\frac{B_n(H)}{\varepsilon^2}=p$ знаходимо

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{B_n(H)}{p}}.$$

Тоді

$$P\left\{c\theta^2\in\left(\max\left(0,c\theta_n^2-\varepsilon-\Delta_n\right),\min\left(c\theta_n^2+\varepsilon+\Delta_n,cd^2\right)\right)\right\}\ge 1-p,$$

звідки

$$P\left\{\theta\in(l_n,r_n)\right\}\ge 1-p,$$

де

$$l_n=\sqrt{\max\left(0,\theta_n^2-\frac{\varepsilon}{c}-\frac{\Delta_n}{c}\right)}, r_n=\sqrt{\min\left(\theta_n^2+\frac{\varepsilon}{c}+\frac{\Delta_n}{c},d^2\right)}.$$

Сформулюємо отриманий результат.

Теорема 2. *Нехай виконуються припущення (A), (A1'), (A2'), (A3), (B1). Нехай, далі,* $1-p$ — *рівень довіри,*

$$\Delta_n = \frac{qd^2}{a_n^{\delta}} + \frac{b}{a_n^{\beta-2H}}, n \geq 1;$$

$$C_n(H) = \begin{cases} \zeta\left(4-4H\right), & 0 < H < \frac{3}{4}, \\ \ln a_n, & H = \frac{3}{4}, \\ \frac{a_n^{4H-3}}{4H-3}, & \frac{3}{4} < H < 1, \end{cases}$$

де $\zeta(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^y}, y > 1$;

$$B_n(H) = \frac{2d^4}{a_n}\left(5(c+q)^2 + 2L^2 C_n(H)\right) + 2b^2 a_n^{2(2H-\beta)};$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{B_n(H)}{p}}, n \geq 1.$$

Тоді (l_n, r_n), *де*

$$l_n = \sqrt{\max\left(0, \theta_n^2 - \frac{\varepsilon}{c} - \frac{\Delta_n}{c}\right)}, r_n = \sqrt{\min\left(\theta_n^2 + \frac{\varepsilon}{c} + \frac{\Delta_n}{c}, d^2\right)},$$

довірчий інтервал для параметра θ *з рівнем довіри* $1-p, p \in (0,1)$.

5. Приклад. Нехай $Y_H(t), t \in \mathbf{R}$, де параметр $H \in (0,1)$, — випадковий процес з приростами класу K_1 і коваріаційною функцією

$$r_H(t,s) = \frac{1}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right), t, s \in \mathbf{R}.$$

Неважко перевірити, що цей випадковий процес має стаціонарні в широкому сенсі прирости. Приклад такого випадкового процесу, відмінного від гауссового, наведений у статті [13]. Зауважимо, що на відміну від гауссового випадку, параметр H не визначає однозначно скінченновимірні розподіли випадкового процесу $Y_H(t), t \in \mathbf{R}$.

Нехай в задачі оцінювання $\xi(t) = Y_{1/2}(t), \eta(t) = Y_{3/4}(t), t \in \mathbf{R}$ — незалежні випадкові процеси, $d = 1$. Покладемо $a_n = 2^n$. Припущення (A), (B1), очевидно, справджуються. Припущення (A1') виконується при $c = 1, q = 0$, (A2') — при $b = 1, \beta = \frac{3}{2}$, (A3) — при $L = 0$. Внаслідок теореми 1, статистика $\theta_n = \sqrt{S_n(X)}, n \geq 1$ — сильно консистентна оцінка параметра θ. Теорема 2 дозволяє побудувати довірчий інтервал. Так, для рівня довіри 0,9

$$B_n(H) = \frac{12}{a_n}, \varepsilon_n = \sqrt{\frac{120}{2^n}}, \Delta_n = \sqrt{\frac{1}{2^n}}, n \in \mathbf{N};$$

(l_n, r_n), де

$$l_n = \sqrt{\max\left(0, \theta_n^2 - \varepsilon - \Delta_n\right)}, r_n = \sqrt{\min\left(\theta_n^2 + \varepsilon + \Delta_n, d^2\right)},$$

— довірчий інтервал з рівнем довіри 0,9 для параметра θ.

Висновки. У роботі досліджена бакстерівська оцінка параметра у моделі оцінювання з випадковими процесами, що належать до сім'ї випадкових процесів з приростами класу K_1. Ця сім'я випадкових процесів значно ширша сім'ї гауссових випадкових процесів з нульовим середнім. За допомогою бакстерівських сум отримана сильно консистентна оцінка та побудовані неасимптотичні довірчі інтервали для параметра, що оцінюється. Бакстерівські статистики прості з обчислювальної точки зору, хоча у застосуваннях слід брати до уваги похибки вимірювання.

Список використаної літератури

1. *Levy P.* Le mouvement Brownian plan // Amer J. Math. – 1940. – Vol. 62. – P. 487–550.
2. *Baxter G.* A strong limit theorem for Gaussian processes // Proc. Amer. Math. Soc. –1956. – No. 3. – P. 522–527.
3. *Гладышев Е Г.* Новая предельная теорема для случайных процессов с гауссовскими приращениями // Теория вероятностей и ее применения. – 1961. – Том. 1. – С. 57–66.
4. *Berman S. M.* A version of the Levy-Baxter theorem for the increments of Brownian motion of several parameters // Proc. Amer. Math. Soc. – 1967. –Vol. 18. – P. 1051–1055.
5. *Краснитский С. М.* О некоторых предельных теоремах для случайных полей с гауссовскими разностями m-го порядка // Теория вероятностей и математическая статистика. – 197. – Вып. 5. – С. 71–80.
6. *Арак Т. В.* О теоремах типа Леви-Бакстера для случайных полей // Теория вероятностей и ее применения. – 1972. – Том 17, Вып. 1. – С. 153–160.
7. *Kozachenko Yu. V., Kurchenko O. O.* Levy-Baxter theorems for one class of non-Gaussian stochastic processes // Random Oper. Stoch. Equ. – 2011. – Vol. 4. – P. 313–326.
8. *Курченко О. О.* Одна сильно конзистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2002. – Вип. 67. – С. 88–96.
9. *Breton J-C., Nourdin I., Peccati G.* Exact confidence intervals for the Hurst parameter of a fractional Brownian motion // Electronic Journal of Statistics – 2009. –No. 3. – P. 416–425.
10. *Kozachenko Yu. V., Kurchenko O. O.* An estimate for the multiparameter FBM // Theory Stoch. Process. – 1999. – Vol. 5 (21). – P. 113–119.
11. *Prakasa Rao B. L. S.* Statistical Inference for Fractional Diffusion Processes. – Chichester: John Wiley&Sons, 2010. – 280 p.
12. *Курченко О. О., Синявська О. О.* Бакстерівська оцінка коефіцієнта регресії в одній моделі // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2011. – No. 3. – С. 40–45.
13. *Синявська О. О.* Бакстерівська оцінка невідомого параметра коваріаційної функції у негауссовому випадку // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2013. – Вип. 88. – С. 155–164.

Одержано 25.03.2015