УДК 519.713

І. А. Мич (Ужгородський нац. ун-т)

Про побудову формул швидких перетворень знаходження спектрів функцій багатозначної логіки

Formulas of the fast transformations for the calculation of the spectra of multiple-valued logic functions have been deduced. The advantages of using these formulas is considerable reduction of the number of operations required for the calculation of the spectrum of functions and need no to build the transformation matrix.

Виведено формули швидких перетворень для знаходження спектрів функцій багатозначної логіки. Перевагами використання цих формул є значне зменшення числа операцій необхідних для обчислення спектру функції, а також те, що непотрібно будувати матрицю перетворення.

В [1]– [2] розглянуто задачу побудови формул швидких кон'юнктивних та узагальнених кон'юнктивних перетворень функцій двозначної логіки. Показано застосування цих перетворень для розв'язування різних прикладних задач математичної кібернетики [2]– [4].

За аналогією з двозначною логікою побудуємо формули швидких перетворень в k-значній логіці. Розглянемо матрицю A в α-ому стовпці якої поміщені значення добутків $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdot x_n^{\alpha_n}$ на всіх можливих наборах множини $\mathbb{Z}_k^n$. Цю матрицю можна представити як n-ий кронекерівський степінь деякої матриці B_k, тобто $A = B_k^{\otimes n}$. Матриця A невироджена при простому k. Матрицю

$$B_k = \begin{pmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & \dots & b_{0,k-1} \\ b_{1,0} & b_{1,1} & \dots & b_{1,k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k-1,0} & b_{k-1,1} & \dots & b_{k-1,k-1} \end{pmatrix}$$

можна факторизувати, тобто представити у вигляді добутку так званих слабо заповнених матриць, елементами яких є числа з множини $\mathbb{Z}_k$. Матриця факторизації матриці B_k буде мати вигляд

$$B = \begin{pmatrix}
b_{0,0} & b_{0,1} & \dots & b_{0,k-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & b_{0,0} & b_{0,1} & \dots & b_{0,k-1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & b_{0,0} & b_{0,1} & \dots & b_{0,k-1} \\
b_{1,0} & b_{1,1} & \dots & b_{1,k-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & b_{1,0} & b_{1,1} & \dots & b_{1,k-1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & b_{1,0} & b_{1,1} & \dots & b_{1,k-1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
b_{k-1,0} & b_{k-1,1} & \dots & b_{k-1,k-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & b_{k-1,0} & b_{k-1,1} & \dots & b_{k-1,k-1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & b_{k-1,0} & b_{k-1,1} & \dots & b_{k-1,k-1}
\end{pmatrix}$$

Нехай $f = (f_0,\ f_1,\ \ldots,\ f_{k^n-1})$ довільна функція багатозначної логіки. Добуток $A \cdot f$, який називають A спектром функції f (або A перетворенням функції f), можна знаходити як звичайний матричний добуток над полем $GF(k)$ так і на основі формул швидких перетворень.

Позначимо через $g = (g_0,\ g_1,\ \ldots,\ g_{k^n-1}) = A \cdot f$. Згідно операції множення матриць отримаємо:

$$\begin{cases} g_0 = b_{0,0} \cdot f_0 + b_{0,1} \cdot f_1 + \cdots + b_{0,k-1} \cdot f_{k-1}, \\ g_1 = b_{1,0} \cdot f_0 + b_{1,1} \cdot f_1 + \cdots + b_{1,k-1} \cdot f_{k-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{k^n-1} = b_{k-1,0} \cdot f_0 + b_{k-1,1} \cdot f_1 + \cdots + b_{k-1,k-1} \cdot f_{k-1}. \end{cases}$$

Поклавши $n = 2$, $k = 2$, отримаємо

$$\begin{cases} g_0 = b_{0,0} \cdot f_0 \oplus b_{0,1} \cdot f_1, \\ g_1 = b_{0,0} \cdot f_2 \oplus b_{0,1} \cdot f_3, \\ g_2 = b_{1,0} \cdot f_0 \oplus b_{1,1} \cdot f_1, \\ g_3 = b_{1,0} \cdot f_2 \oplus b_{1,1} \cdot f_3, \end{cases}$$

тобто

$$g_i = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{1} b_{0,j} \cdot f_{i \cdot 2 + j}, & \text{якщо } i \leqslant 1, \\ \sum\limits_{j=0}^{1} b_{1,j} \cdot f_{(i-2) \cdot 2 + j}, & \text{якщо } 1 < i \leqslant 3. \end{cases} \tag{1}$$

Аналогічно для $n = 2$, $k = 3$, отримаємо

$$\begin{cases} g_0 = b_{0,0} \cdot f_0 \oplus b_{0,1} \cdot f_1 \oplus b_{0,2} \cdot f_2, \\ g_1 = b_{0,0} \cdot f_3 \oplus b_{0,1} \cdot f_4 \oplus b_{0,2} \cdot f_5, \\ g_2 = b_{0,0} \cdot f_6 \oplus b_{0,1} \cdot f_7 \oplus b_{0,2} \cdot f_8, \\ g_3 = b_{1,0} \cdot f_0 \oplus b_{1,1} \cdot f_1 \oplus b_{1,2} \cdot f_2, \\ g_4 = b_{1,0} \cdot f_3 \oplus b_{1,1} \cdot f_4 \oplus b_{1,2} \cdot f_5, \\ g_5 = b_{1,0} \cdot f_6 \oplus b_{1,1} \cdot f_7 \oplus b_{1,2} \cdot f_8, \\ g_6 = b_{2,0} \cdot f_0 \oplus b_{2,1} \cdot f_1 \oplus b_{2,2} \cdot f_2, \\ g_7 = b_{2,0} \cdot f_3 \oplus b_{2,1} \cdot f_4 \oplus b_{2,2} \cdot f_5, \\ g_8 = b_{2,0} \cdot f_6 \oplus b_{2,1} \cdot f_7 \oplus b_{2,2} \cdot f_8. \end{cases}$$

тобто

$$g_i = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{2} b_{0,j} \cdot f_{i \cdot 3 + j}, & \text{якщо } i \leqslant 2, \\ \sum\limits_{j=0}^{2} b_{1,j} \cdot f_{(i-2) \cdot 3 + j}, & \text{якщо } 2 < i \leqslant 5, \\ \sum\limits_{j=0}^{2} b_{2,j} \cdot f_{(i-3 \cdot 2) \cdot 3 + j}, & \text{якщо } 5 < i \leqslant 8. \end{cases} \tag{2}$$

Узагальнюючи формули (1) (2) для довільного k і $n = 2$, отримаємо

$$g_i = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{k-1} b_{0,j} \cdot f_{i \cdot k+j}, & \text{якщо } i \leqslant k-1, \\ \sum\limits_{j=0}^{k-1} b_{1,j} \cdot f_{(i-k)\cdot k+j}, & \text{якщо } k-1 < i \leqslant 2k-1, \\ \sum\limits_{j=0}^{k-1} b_{2,j} \cdot f_{(i-k(k-1))\cdot k+j}, & \text{якщо } k(k-1) < i \leqslant k \cdot k - 1, \end{cases}$$

або в узагальненому вигляді $g_i = \sum\limits_{j=0}^{k-1} b_{y,j} \cdot f_{(i-yk)k+j}$, де $y = \text{int}\left(\frac{i}{k}\right)$.

Таким чином, змінюючи значення n, отримаємо наступні формули

$$g_i = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{k-1} b_{0,j} \cdot f_{i \cdot k+j}, & \text{якщо } i \leqslant k^{n-1}-1, \\ \sum\limits_{j=0}^{k-1} b_{1,j} \cdot f_{(i-k^{n-1})\cdot k+j}, & \text{якщо } k^{n-1}-1 < i \leqslant 2k^{n-1}-1, \\ \sum\limits_{j=0}^{k-1} b_{k-1,j} \cdot f_{(i-k^{n-1}(k-1))\cdot k+j}, & \text{якщо } k(k^{n-1}-1) < i \leqslant k^{n-1} - 1, \end{cases}$$

або в узагальненому вигляді $g_i = \sum\limits_{j=0}^{k-1} b_{y,j} \cdot f_{(i-yk)k+j}$, де $y = \text{int}\left(\frac{i}{k}\right)$.

Список використаної літератури

1. *Айзенберг Н. Н., Трофимлюк О. Т.* Конъюнктивные преобразования дискретных сигналов и их применение для отыскания тестов и распознавания монотонності функцій алгебры логики. // Кибернетика. – 1981. – №5. – С.138–139.
2. *Трофимлюк О. Т., Мич І. А.* Узагальнені кон'юнктивні перетворення дискретних сигналів та їх застосування // Обробка сигналів і зображень та розпізнавання образів: Тези допов. конф. – Київ, 1998. – С.35–36.
3. *Трофимлюк О.Т., Мич І.А.* Однорідні та α-монотонні бульові функції // Науковий вісник УжДУ. Сер. матем.– 1997.– №2.– с.108-113.
4. *Супрун Б.П.* Об одном методе полиномиального разложения булевых функций // Кибернетика.– 1989.– №5.– С.122-124.

Одержано 07.04.2015