УДК 512.547.25

В. М. Петечук (Закарпатский ин-т последипломного педагог. образования),
Ю. В. Петечук (Ужгородський нац. ун-т)

ГОМОМОРФИЗМЫ МАТРИЧНЫХ ГРУПП НАД АССОЦИАТИВНЫМИ КОЛЬЦАМИ. Часть II

The article deals with the finishing of the description of homomorphism with the condition of matrix groups $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 4$ into the group $GL(W)$ of arbitrary module W above the associate ring K with one.
Ununit homomorphism $\Lambda : G \to GL(W)$, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$ satisfies a condition (*), if for arbitrary nilpotent element $m \in EndW$, $m^2 = 0$ exists converted into K natural numbers s_1, s_2 and $A \in G$, which are $\Lambda A = 1 + s_1 m$ and from equality $\Lambda A \Lambda B = \Lambda B \Lambda A$, $B \in G$ follows that $A^{s_2} B = B A^{s_2}$.
The present description of the homomorphisms of matrix groups with the condition (*) has a standart description and is much wider than the description of isomorphisms of group $GL(n,R)$, $n \geq 4$, which has been done by I.Z. Golubchikom.

В работе завершается описание гомоморфизмов с условием (*) матричных групп $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 4$ в группу $GL(W)$ произвольного модуля W над ассоциативным кольцом K с единицей.
Неединичный гомоморфизм $\Lambda : G \to GL(W)$, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$ над ассоциативным кольцом R с 1 удовлетворяет условие (*), если для произвольного ненулевого нильпотентного элемента $m \in EndW$, $m^2 = 0$ существуют обратимые в K натуральные числа s_1, s_2 и $A \in G$ такие, что $\Lambda A = 1 + s_1 m$ и из равенства $\Lambda A \Lambda B = \Lambda B \Lambda A$, $B \in G$ следует, что $A^{s_2} B = B A^{s_2}$.
Настоящее описание гомоморфизмов матричных групп с условием (*) имеет стандартное описание и является более широким, чем описание изомоморфизмов группы $GL(n,R)$, $n \geq 4$, полученное И.З. Голубчиком.

Введение. Настоящая статья является продолжением работы [1]. В ней завершается описание гомоморфизмов с условием (*) произвольной группы $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, когда $3 \in K^*$, $n \geq 4$ в группу $GL(W)$ над произвольными ассоциативными кольцами R и K соответственно.

Полученное описание гомоморфизмов с условием (*) является более широким, чем описание изоморфизмов этих групп, полученное И.З. Голубчиком [2], поскольку далеко не всякий гомоморфизм $\Lambda : G \to GL(W)$ группы G с условием (*) является изоморфизмом. Более того рассматривается произвольная группа $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, которая может не содержать всех диагональных инволюций. Отсутствие некоторых элементов в группе G почти всегда усложняет описание гомоморфизмов матричных групп из-за нехватки соотношений. Это наилучшим образом проявляется при описании гомоморфизмов матричных групп малых размерностей, многие из которых в настоящее время не описаны.

Неединичный гомоморфизм $\Lambda : G \to GL(W)$, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$ над ассоциативным кольцом R с 1 удовлетворяет условие (*), если для произвольного ненулевого нильпотентного элемента $m \in EndW$, $m^2 = 0$ существуют обратимые в K натуральные числа s_1, s_2 и $A \in G$ такие, что $\Lambda A = 1 + s_1 m$ и из равенства $\Lambda A \Lambda B = \Lambda B \Lambda A$, $B \in G$ следует, что $A^{s_2} B = B A^{s_2}$.

В частности, условие (*) удовлетворяет произвольный изоморфизм группы G на группу $GL(W)$. Для этого достаточно положить $s_1 = s_2 = 1$ и воспользоваться тем, что $1 + m \in GL(W)$.

Список наиболее значимых публикаций содержится в [1].

Напомним, что основным результатом, доказанным в частях 1 и 2, является

Теорема 1. *Пусть R и K - ассоциативные кольца с 1, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 4$, W - левый K-модуль, гомоморфизм $\Lambda : G \to GL(W)$ удовлетворяет условие (*). Тогда существуют подмодули L и P модуля W и изоморфизм $g : W \to \underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n} \oplus P$ такие, что*

$\Lambda(x) = g^{-1}\left[\overline{\delta}(x)\, e + \overline{\nu}(x)^{-1}(1-e) + e_1\right] g$, где $x \in E(n,R)$, $\overline{\delta}$ - кольцевой гомоморфизм и $\overline{\nu}$ - кольцевой антигомоморфизм кольца R_n , индуцированные кольцевым гомоморфизмом $\delta : R \to End(L)$ и кольцевым антигомоморфизмом $\nu : R \to End(L)$ соответственно в кольцо $End\left(\underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n}\right)$, e - центральный идемпотент подкольца δR кольца $End(L)$, 1 - единица кольца $End\left(\underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n}\right)$, а e_1 - единица кольца $End(P)$.

Замечание 1. *Если дополнительно предположить, что $2 \in R^*$, то теорема верна при $n \geq 3$. Этот результат составляет содержание первой части работы. Если $n = 3$ и $2 \notin R^*$, то существуют нестандартные гомоморфизмы.*

Условимся обозначать 1 или E единичные элементы без уточнения в каких кольцах они содержатся, если из контекста будет понятно о каких единичных элементах идет речь.

1. Общие вопросы

Введем обозначения формальных 2x2 матриц над некоторым ассоциативным кольцом с 1

$$a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ b_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ b_1^2 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix},$$
$$t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть x - произвольная формальная 2x2 матрица над некоторым кольцом.

Будем использовать введенные обозначения в различных кольцах, всякий раз понимая под 1 или E соответствующий единичный элемент.

Лемма 1. *Если имеют место равенства*
$$\begin{cases} xa = ax \\ xb = bx \end{cases} \text{или} \begin{cases} xa = ax \\ xb_1 = b_1 x \end{cases},$$
то x - скалярная формальная матрица.

Доказательство. Если x коммутирует с a и b, то x коммутирует с матрицами
$$a + b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } a - b = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Поэтому $x_{12} = x_{21} = 0$.

Аналогично, если x коммутирует с a и b_1 , то x коммутирует с $a - b_1 = diag(0,-1)$ и $x_{12} = x_{21} = 0$.

Тем самым доказано, что в обоих случаях x - диагональная формальная матрица. Поскольку x коммутирует с a, то $x_{11} = x_{22}$. Это означает, что x - скалярная матрица.

Обозначим формальные матрицы одинаковой размерности
$$A = diag\,(a, E)\ ,\ B = diag\,(b, E)\ ,\ B_1 = diag\,(b_1, E)\ ,\ X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$
где $a,\ b,\ \ b_1$ - формальные 2x2 матрицы введенные выше, E – единичная формальная матрица произвольной размерности, x_1 - формальная $2times2$ матрица.

Лемма 2. *Если* $XA = AX$ *, то* $3x_2 = 0$, $3x_3 = 0$, $x_1a = ax_1$.

Доказательство. Из равенства $XA = AX$ следует, что X коммутирует с $diag\,(a - E, 0)$. Поэтому $(a - E)\,x_2 = 0$, $x_3\,(a - E) = 0$ и, как следствие, $3x_2 = 0$, $3x_3 = 0$. Очевидно, что $x_1a = ax_1$.

В частности, если 3 - обратимый элемент, то $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ и $X = diag\,(x_1, x_4)$, где $ax_1 = x_1a$.

Лемма 3. *Если имеют место равенства*
$$\begin{cases} XA = AX \\ XB = BX \end{cases}\ , \textit{то} \begin{cases} x_2 = 0 \\ 3x_3 = 0 \\ x_1 - \textit{скалярная матрица} \end{cases}$$
$$\textit{или если} \begin{cases} XA = AX \\ XB_1^2 = B_1^2X \end{cases}\ , \textit{то} \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ ax_1 = x_1a \end{cases}.$$

Доказательство. Непосредственно проверяется, что из $XA = AX$ и $XB = BX$ следует, что $(a - E)\,x_2 = 0$, $(b - E)\,x_2 = 0$ и $(a - b)\,x_2 = 0$. Поэтому $x_2 = 0$. Кроме этого $3x_3 = 0$ и, согласно лемме 1 и x_1 - скалярная формальная 2x2 матрица.

Если $XB_1^2 = B_1^2X$, то $2x_2 = 0$, $2x_3 = 0$. Согласно лемме 2 имеют место равенства $3x_2 = 0$, $3x_3 = 0$. Поэтому из перестановочности X с A и B_1^2 следует, что $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $ax_1 = x_1a$.

В частности, если матрица X коммутирует с A и B, то X коммутирует с A и B_1^2 и $X = diag\,(x_1, x_4)$, где x_1 - скалярная формальная 2x2 матрица.

Замечание 2. *В лемме 2 [1] доказано, что, если* $g \in GL\,(n, R)$ *и* $gB_1^2 = B_1^2g$, *то* $[g, d_k] \subset diag\,(R_2, R_{n-2})$, *где* $d_k = 1 - 2e_{kk}$ *- диагональная матрица с* -1 *на месте* (k, k) *и 1 на остальных диагональных местах.*

Это утверждение следует из того, что $2g \in diag\,(R_2, R_{n-2})$ *и* $2g^{-1} \in diag\,(R_2, R_{n-2})$. *Поэтому* $g2e_{kk}g^{-1} \in diag\,(R_2, 0)$ *и* $[g, d_k] \in diag\,(R_2, E)$ *, где* $1 \le k \le 2$. *Если* $2 < k \le n$ *, то* $g2e_{kk}g^{-1} \in (0, R_{n-2})$ *и* $[g, d_k] \in diag\,(E, R_{n-2})$.

В частности $[g, d_kd_e] \in diag\,(R_2, R_{n-2})$ *для произвольных* $1 \le k \ne l \le n$.

Замечание 3. *Введем обозначение*
$$t_{12}\,(r) = diag\left(\begin{pmatrix} E & rE \\ 0 & E \end{pmatrix}, E\right),\ t_{21}\,(r) = diag\left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ rE & E \end{pmatrix}, E\right)$$
где r *- элемент кольца,* E *– означает единичную формальную матрицу соответствующих размеров. Если формальная матрица* X *тех же размеров, что и формальные трансвекции* $t_{12}\,(r)$ *,* $t_{21}\,(r)$ *и коммутирует с ними, то* $X = diag\,(x_0, x_0, *)$ *, где* $rx_0 = x_0r$.

Замечание 4. *Пусть* l *- произвольная формальная* $2{\times}2$ *матрица* $a^l = lal^{-1}$, $A = diag\,(a, E)$, $A^l = diag\left(a^l, E\right)$, $XA = AX$ *и* $XA^l = A^lX$, $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$.

Тогда

$(a-E)\,x_2=0$, $(a-E)\,(l^{-1}-E)\,x_2=0$, $x_3\,(a-E)=0$, $x_3\,(l-E)\,(a-E)=0$.

В частности, если в качестве l *выбрать* $t=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, *то* $(a-E)\,(t^{-1}-E)=\begin{pmatrix}0&-1\\0&-1\end{pmatrix}$ *и* $(t-E)\,(a-E)=\begin{pmatrix}1&-2\\0&0\end{pmatrix}$. *Поэтому из равенств*

$$\begin{pmatrix}-1&-1\\1&-2\end{pmatrix}x_2=0 \text{ и } \begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}x_2=0$$

следует, что $x_2=0$. *Аналогично доказывается, что* $x_3=0$. *При этом* x_1 *коммутирует с* a *и* tat^{-1}.

Лемма 4. *Пусть* a, b *- элементы некоторого ассоциативного кольца* K *с 1,* $3\in K^*$ *такие, что* $b^2=1$, $a^2+a+1=0$, $bab^{-1}=a^2$, $e=(1-a)\,(1-b)\,3^{-1}$. *Тогда*

$$e^2=e\ ,\ eae=(1-e)\,a^2\,(1-e)=0.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что $b\,(1-b)=-\,(1-b)$ и

$(1-b)\,(1-a)\,(1-b)\ =\ (1-a-b+ba)\,(1-b)\ =\ \left(1-a+1-a^2\right)(1-b)\ =\ 3\,(1-b)$.

Поэтому $(3e)^2=(1-a)\,3\,(1-b)=9e$ и $e^2=e$.

Аналогично доказывается, что

$$(1-b)\,a\,(1-a)\,(1-b)=(a-a^2-ba+ba^2)\,(1-b)=(a-a^2+a^2-a)\,(1-b)=0.$$

Поэтому $9eae=(1-a)\,(1-b)\,a\,(1-a)\,(1-b)=0$ и $eae=0$. Следовательно $ea^2e=e\,(-1-a)\,e=-e$.

Легко видеть, что $(1-b)\,a^2+a^2\,(1-b)=2a^2-(a+a^2)\,b=2a^2+b$. Поэтому $3\,(ea^2+a^2e)=(1-a)\,((1-b)\,a^2+a^2\,(1-b))=(1-a)\,(2a^2+b)$.

Тем самым доказано, что

$$\begin{aligned}3\,(1-e)\,a^2\,(1-e)&=3a^2-3\,(ea^2+a^2e)+3ea^2e=3a^2-(1-a)\,(2a^2+b)-3e=\\&=3a^2-(1-a)\,(2a^2+b+1-b)=3a^2-(1-a)\,(2a^2+1)=0\end{aligned}$$

и $(1-e)\,a^2\,(1-e)=0$.

Из леммы 4 следует, что $ae=(1-e)\,ae$ и $a^2\,(1-e)=ea^2\,(1-e)$.

2. Изображение эндоморфизмов формальными матрицами

Лемма 5. *Пусть* K *- ассоциативное кольцо с 1,* $3\in K^*$, W *- левый* K *– модуль,* a, b *– элементы* $GL\,(W)$ *такие, что* $a^3=b^2=1$, $bab^{-1}=a^{-1}$, $a\neq 1$. *Тогда существует изоморфизм модулей* $g:W\to W_g$, *который индуцирует изоморфизм* $\Lambda_g:GL\,(W)\to GL\,(W_g)$ *такой, что элементы* $\Lambda_g a$, $\Lambda_g b$ *можно изобразить формальными матрицами*

$$\Lambda_g a=diag\left(\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix},1\right),\ \Lambda_g b=diag\left(\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\alpha+\beta&-\alpha\end{pmatrix},\gamma\right),$$

где $\alpha,\beta\in EndL$, $\gamma\in EndP$, $\alpha\beta=\beta\alpha$, $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=1$, $\gamma^2=1$, $W_g=L\oplus L\oplus P$.

В частности, если $W=R\,(a)$, *то* $\Lambda_g a=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$, $\Lambda_g b=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\alpha+\beta&-\alpha\end{pmatrix}$.

Доказательство. Обозначим $R\,(a)=(a-1)\,W$ и $P\,(a)=\ker\,(a-1)$. Тогда $R\,(a^{-1})=R\,(a)$, $P\,(a^{-1})=P\,(a)$ и $bR\,(a)=R\,(bab^{-1})=R\,(a)$, $bP\,(a)=P\,(bab^{-1})=P\,(a)$.

Следовательно, подмодули $R(a)$ и $P(a)$ являются инвариантными относительно a и b. Более того, $R(a)=\{\nu\in W\,|(a^2+a+1)\,v=0\}$, $P(a)=\{\nu\in W\,|av=v\}$, $W=R(a)\oplus P(a)$. Ясно, что $a^2+a+1=0$ на подмодуле $R(a)$ и $a=1$ на подмодуле $P(a)$.

Пусть $e=(1-a)(1-b)\,3^{-1}$, где 1 означает единицу группы $GL(W)$. Очевидно, что подмодули $R(a)$ и $P(a)$ являются инвариантными относительно e. Сужение элементов $a,\;\; b,\; e$ на подмодуле $R(a)$ удовлетворяют лемму 5 и $eP(a)\subseteq(1-a)\,P(a)=0$, $eP(a)=0$. Согласно лемме 4 $e^2=e$ - идемпотент на $R(a)$ и $e^2=e=0$ на $P(a)$. Это означает, что $e^2=e$ - идемпотент кольца $EndW$, который определяет разложение модуля W

$W=R(a)\oplus P(a)=eR(a)\oplus(1-e)\,R(a)\oplus P(a)$, где $R(a)=eR(a)\oplus(1-e)\,R(a)$.

Обозначим $L=eR(a)$, $P=P(a)$. Поскольку $a\neq 1$, то $R(a)\neq 0$. В соответствии с леммой 4 $aeR(a)\subseteq(1-e)\,R(a)$ и $a^2(1-e)\,R(a)\subseteq eR(a)$, $(1-e)\,R(a)\subseteq aeR(a)$. Следовательно, $(1-e)\,R(a)=aeR(a)=aL$.

Тем самым доказано, что $R(a)=L\oplus aL$, $L\neq 0$, $W=L\oplus aL\oplus P$.

Пусть $W_g=L\oplus L\oplus P$ и $g:W\to W_g$ - изоморфизм модулей, который определен по правилу $g(l_1+al_2+p)=l_1+l_2+p$, где $l_i\in L$, $1\le i\le 2$, $p\in P$, а $\Lambda_g:GL(W)\to GL(W_g)$ - индуцированный gгрупповой изоморфизм.

Это означает, что элементы кольца $End(W_g)$ можно изобразить формальными 3x3 матрицами

$\Lambda_g a=diag\left(\begin{pmatrix}0 & a_1\\ 1 & a_2\end{pmatrix},1\right)$, $\Lambda_g b=diag\left(\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix},\gamma\right)$.

Учитывая равенство $(1+a+a^2)\,R(a)=0$ получаем, что $a_1=a_2=-1$. Из равенства $ba=a^{-1}b$ следует, что $b_3=b_2$, $b_4=-b_1$ а из равенства $b^2=1$ получаем, что $b_1b_2=b_2b_1$, $b_1^2+b_1b_2+b_2^2=1$.

Обозначим $\alpha=b_1$ и $\beta=b_2$. Тогда

$\Lambda_g a=diag\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix},1\right)$, $\Lambda_g b=diag\left(\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha+\beta & -\alpha\end{pmatrix},\gamma\right)$

где $\alpha,\beta\in EndL$, $\gamma\in EndP$, $\alpha\beta=\beta\alpha$, $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=1$, $\gamma^2=1$.

Замечание 5. *Если G - группа такая, что $E(n,R)\subseteq G\subseteq GL(n,R)$, где R - ассоциативное кольцо с 1, $n\ge 3$ и $\Lambda:G\to GL(W)$ - произвольный нееденичный на $E(n,R)$ гомоморфизм, то в группе $GL(W)$ в качестве элементов $a,\ b,$ фигурирующих в лемме 5 можно выбрать, если $n\ge 3$*

$a=\Lambda diag\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix},1,...,1\right)$, $b=\Lambda diag\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},-1,1,...,1\right)$

или в случае $n\ge 4$

$a=\Lambda diag\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix},1,...,1\right)$, $b=\Lambda diag\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},1,...,1\right)$.

Лемма 5 означает, что нееденичный элемент a группы $GL(W)$, удовлетворяющий равенство $a^2+a+1=0$, при наличии $b,\;\; b^2=1$, $bab^{-1}=a^2$, можно изобразить формальной матрицей $diag\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix},E\right)$.

Пусть a,b - элементы группы $GL(W)$ такие, что $a^m=1$, $b^m=1$, $ab=ba$, $m\in K^*$. Тогда $(ab)^m=1$, $ab\,(R(a)\bigcap R(b))=R(a)\bigcap R(b)$ и

$$R(a)\bigcap R(b)=R(a)\bigcap R(b)\bigcap R(ab)\oplus R(a)\bigcap R(b)\bigcap P(ab)\ .$$

Как доказано в следствии 1 [1] в случае $m = 2$

$$R(a) \bigcap R(b) = R(a) \bigcap P(ab) = R(b) \bigcap P(ab) \subseteq P(ab) \ .$$

Поэтому $R(a) \bigcap R(b) \bigcap R(ab) = 0$.

В случае $m = 3$ оказывается $(b-a)\,v = 0$, если $v \in R(a) \bigcap R(b) \bigcap R(ab)$ и $(b-a^2)\,v = 0$, если $v \in R(a) \bigcap R(b) \bigcap P(ab)$.

Действительно, если $v \in R(a) \bigcap R(b) \bigcap R(ab)$, то

$$\left(a^2 + a + 1\right) v = \left(b^2 + b + 1\right) v = \left((ab)^2 + ab + 1\right) v = 0$$

Следовательно,

$$(a+b+1)\,(a-b) = (a^2 - b^2 + a - b)\,v = 0 \text{ и } (a^2 + ab + a)\,(a-b)\,v = 0.$$

Поэтому $(ab-1)\,(a-b)\,v = 0$.

Учитывая, что $\left((ab)^2 + ab + 1\right)(a-b)\,v = 3\,(a-b)\,v$ получаем, что $(a-b)\,v = 0$.

Очевидно, что если $v \in R(a) \bigcap R(b) \bigcap P(ab)$, то $abv = v$ и $(b-a^2)\,v = 0$.

Тем самым доказано, что a и b на $R(a) \bigcap R(b)$ можно изобразить формальными диагональными матрицами

$$\Lambda_g a = diag\,(X, Y)\,,\ \Lambda_g b = diag\,(X, Y^2)\,.$$

С полученного следует, что на $P = R(a) \bigcap R(b) \oplus P(a) \bigcap P(b)$ элементы a и b можно изобразить формальными матрицами

$$\Lambda_g a = diag\,(X, Y, E)\ ,\ \Lambda_g b = diag\,(X, Y^2, E)\ ,\ \Lambda_g ab = diag\,(X^2, E, E)\ .$$

где E - соответствующая единичная матрица $X^2 + X + E = 0$ и $Y^2 + Y + E = 0$. Понятно, что $X - E$, $X^2 - E$, $Y - E$, $Y^2 - E$ являются обратимыми элементами. Если $F \in GL(W)$ и $FP = P$, $Fab = abF$, то

$$F = diag\,(f, *)\ ,$$

где $fX^2 = X^2 f$, а значит $fX = Xf$.

Это означает, что на P

$$\Lambda_g\,[a, F] = diag\,(E, *)\ ,\ \Lambda_g\,[b, F] = diag\,(E, *)\ .$$

В общем случае, если $a \neq 1$ или $b \neq 1$, то

$$\Lambda_g a = diag\,(Z, E, X, Y, E)\ ,\ \Lambda_g b = diag\,(E, Z, X, Y^2, E)\ ,$$
$$\Lambda_g ab = diag\,(Z, Z, X^2, E, E)$$
$$X^2 + X + E = 0\ ,\ Y^2 + Y + E = 0\ ,\ Z^2 + Z + E = 0\ .$$

Если при этом $F \in GL(W)$ и $Fab = abF$, то $\Lambda_g F = diag\,(Q_1, Q_2)$, где Q_1 коммутирует с $diag\,(Z, Z, X^2)$.

В соответствии с вышеизложенным можно считать, что формальные матрицы X, Y, Z имеют вид $\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & -E \end{pmatrix}$.

3. Вспомогательные утверждения

Пусть $\Lambda : G \to GL(W)$ гомоморфизм с условием (*), где $n \geq 4$, $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$. Обозначим

$$\Lambda diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, E, E\right) = a\ ,\ \Lambda diag\left(E, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, E\right) = b\ ,$$
$$\Lambda diag\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E\right) = c\ ,\ \Lambda diag\left(\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, E\right) = d\ ,$$
$$\Lambda diag\left(\begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix}, E\right) = t\ .$$

Лемма 6. *Пусть W_0 - ненулевой подмодуль W, который инвариантный* *относительно элементов a, b, c, d, t. Тогда $a=b=E$ или $R(a)\bigcap P(b)\neq 0$ на подмодуле W_0 .*

Доказательство. Проведем от противного. Пусть $R(a)\bigcap P(b)|_{W_0}=0$ для неединичных элементов a и b. Согласно лемме 6 [1]

$$W_0=R(a)\bigcap R(b)\oplus P(a)\bigcap P(b)\ .$$

Поскольку

$$R(a)\bigcap R(b)=R(a)\bigcap R(b)\bigcap R(ab)\oplus R(a)\bigcap R(b)\bigcap P(ab)\ ,$$

элемент b совпадает с a на $R(a)\cap R(b)\cap R(ab)$, а также с a^2 на $R(a)\cap R(b)$ $\cap P(ab)$, то согласно сказанному выше существует изоморфизм $g: W_0\to W_g$ такой, что

$$\Lambda_g a=diag\left(\begin{pmatrix}0&-E\\E&-E\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-E\\E&-E\end{pmatrix},E\right),$$

$$\Lambda_g b=diag\left(\begin{pmatrix}0&-E\\E&-E\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-E&E\\-E&0\end{pmatrix},E\right),$$

где W_g - прямая сумма вышеупомянутых подмодулей модуля W_0.

Поэтому

$$\Lambda_g ab=diag\left(\begin{pmatrix}-E&E\\-E&0\end{pmatrix},E,E\right).$$

Поскольку элементы a, b, t коммутируют с ab, $cac^{-1}=a^2$, $cbc^{-1}=b^2$, $dad^{-1}=b$, $dbd^{-1}=a$, то подмодуль $R(a)\bigcap R(b)\bigcap P(ab)\oplus P(a)\bigcap P(b)$ является инвариантным относительно элементов a, b, c, d, t. В таком случае

$$\Lambda_g t=diag(T,*)\ ,$$

где T коммутирует с $\begin{pmatrix}-E&E\\-E&0\end{pmatrix}$, а значит и с $\begin{pmatrix}0&-E\\E&-E\end{pmatrix}$. Поэтому

$$\Lambda_g[a,t]=diag(E,*)\ ,\ \Lambda_g[b,t]=diag(E,*)\ .$$

Обозначим $\Lambda_1=\Lambda_g\Lambda$, $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$ в группе $GL(2,R)$.

Тогда на подмодуле W_0 имеет место равенство

$$\Lambda_1 diag\left(A,A^2,E\right)=\Lambda_g ab^2=diag(E,*)\ ,$$

а также коммутаторное равенство

$$\Lambda_1 diag\left(\begin{pmatrix}E&A-E\\0&E\end{pmatrix},E,E\right)=\Lambda_1 diag\left(\left[\begin{pmatrix}A&\\&E\end{pmatrix},\begin{pmatrix}E&E\\0&E\end{pmatrix}\right],E,E\right)=$$

$$=\Lambda_g[a,t]=diag(E,*)$$

Аналогично на W_0 имеет место равенство

$$\Lambda_1 diag\left(\begin{pmatrix}E&0\\A-E&E\end{pmatrix},E,E\right)=diag(E,*)\ .$$

По условию (*) существуют натуральные числа s_1 и s_2 , которые обратимы в кольце K и матрица $h\in GL(n,R)$, $n\geq 4$ такая, что

$$\Lambda_1 h=diag\left(T^{s_1},E,E\right)\ ,\ \text{где}\ T=\begin{pmatrix}E&E\\0&E\end{pmatrix}$$

и h^{s_2} коммутирует с

$$diag\left(A,A^2,E\right)\ ,\ diag\left(\begin{pmatrix}E&A-E\\0&E\end{pmatrix},E\right)\ ,\ diag\left(\begin{pmatrix}E&0\\A-E&0\end{pmatrix},E\right).$$

Поэтому h^{s_2} коммутирует с $diag\,(A-E, A^2-E, 0)$, $diag\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & A-E \\ 0 & 0 \end{array}\right), 0\right)$, $diag\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ A-E & 0 \end{array}\right), 0\right)$. Непосредственная проверка показывает, что в таком случае h^{s_2} коммутирует с матрицей $diag\,(A-E, 0, 0)$ и, как следствие, с матрицей $diag\,(A, E, E)$.

Следовательно, на подмодуле W_0

$$\Lambda_1 h^{s_2} = diag\,(T^{s_1 s_2}, E, E)$$

коммутирует с $\Lambda_1 diag\,(A, E, E) = diag\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & -E \\ E & -E \end{array}\right), *, *\right)$.

Это означает, что матрицы

$$\left(\begin{array}{cc} E & s_1 s_2 E \\ 0 & E \end{array}\right) \text{ и } \left(\begin{array}{cc} 0 & -E \\ E & -E \end{array}\right)$$

коммутируют. На самом деле это не так. Полученное противоречие показывает, что на подмодуле W_0 имеет место равенство $R\,(a) \bigcap P\,(b) = 0$.

Если в качестве W_0 выбрать модуль W, то, согласно лемме $R\,(a) \bigcap P\,(b) \neq 0$. Это означает, что в лемме 6 [1] подмодуль $L \neq 0$.

Следствие 1. *Пусть W_0 - ненулевой подмодуль W, который инвариантный относительно элементов a, b, c, d, t и $W_0 \bigcap R\,(a) \bigcap P\,(b) = 0$. Тогда $a = b = E$ на подмодуле W_0 .*

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$R\,(a)\,|_{W_0} = (a-E)\,W_0 \subseteq (a-E)\,W = R\,(a)$$

и $R\,(b)\,|_{W_0} \subset R\,(b)$. Поэтому $R\,(a) \bigcap R\,(b)\,|_{W_0} \subset R\,(a) \bigcap R\,(b)$. Поскольку $R\,(a) \bigcap R\,(b)\,|_{W_0} \subset W_0$ и $W_0 \bigcap R\,(a) \bigcap R\,(b) = 0$, то $R\,(a) \bigcap R\,(b)\,|_{W_0} = 0$. В таком случае, согласно лемме 6, $a = b = E$ на подмодуле W_0.

В доказательстве леммы 6 уже использовалось утверждение, что подмодуль $R\,(a) \bigcap R\,(b) \bigcap P\,(ab) \oplus P\,(a) \bigcap P\,(b)$ является инвариантным относительно элементов a, b, c, d, t. Выберем этот подмодуль в качестве подмодуля W_0 модуля W. Поскольку

$$W = R\,(a) \bigcap P\,(b) \oplus R\,(b) \bigcap P\,(a) \oplus R\,(a) \bigcap R\,(b) \oplus P\,(a) \bigcap P\,(b)\ ,$$

то $W_0 \bigcap R\,(a) \bigcap P\,(b) = 0$. Согласно следствию 1 $a = b = E$ на подмодуле W_0 . Практически это означает, что $R\,(a) \bigcap R\,(b) \bigcap P\,(ab) = 0$.

На самом деле имеет место более сильное утверждение $R\,(a) \bigcap R\,(b) = 0$, которое будет доказано позже.

4. Общий вид образов единичных трансвекций

Таким образом, ввиду доказанного неравенства $L \neq 0$, согласно лемме 6 [1], без ограничения общности можно считать, что

$$\Lambda_1 diag\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{array}\right), E, E\right) = diag\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{array}\right), E, *\right),$$

$$\Lambda_1 diag\left(E, \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{array}\right), E\right) = diag\left(E, \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{array}\right), *\right)$$

$$\Lambda_1 diag\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right), E\right) = diag\,(\alpha, \alpha, *)\ ,$$

$$\Lambda_1 diag\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & E \\ E & 0 \end{array}\right), E\right) = diag\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & E \\ E & 0 \end{array}\right), *\right)$$

Пусть d - произвольная матрица группы $GL(2,\zeta R)$ такая, что $diag(d,d) \in E(4,\zeta R)$, где ζR - центр кольца R. Ясно, что матрица $diag(d,d)$ коммутирует с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$.

По условию (*) существуют натуральные числа s_1 и s_2, обратимые в кольце K такие, что

$$\Lambda g = diag\left(\begin{pmatrix} E & s_1E \\ 0 & E \end{pmatrix}, E\right),$$

где $g \in G$ и g^{s_2} коммутирует с

$diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, E\right)$ и $diag\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E\right)$.

Согласно лемме 1,

$$g^{s_2} = diag\left(\begin{pmatrix} xE & yE \\ zE & tE \end{pmatrix}, l\right),$$

где x, y, z, t - элементы кольца R, l- обратимая матрица размера n-4хn-4 над кольцом R. Нетрудно видеть, что матрица g^{s_2} коммутирует с матрицей $diag(d,d,E)$. Поэтому $\Lambda_1 diag(d,d,E)$ коммутирует с матрицей

$$diag\left(\begin{pmatrix} E & s_1s_2E \\ 0 & E \end{pmatrix}, E\right)$$

и учитывая равенство

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & s_1s_2E \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ s_1s_2E & E \end{pmatrix}$$

с матрицей

$$diag\left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ s_1s_2E & E \end{pmatrix}, E\right).$$

Это означает, что

$$\Lambda_1 diag(d,d,E) = diag(*,*,*).$$

Поэтому имеет место равенство

$$\Lambda_1 diag([d,a], E, E) = diag(*, E, *).$$

Аналогично, используя условие (*), находим, что существуют натуральные числа s_1 и s_2 , которые обратимые в кольце K, $h \in G$ такие, что

$$\Lambda_1 h = diag\left(E, \begin{pmatrix} 1 & s_1s_2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E\right)$$

и h^{s_2} коммутирует с матрицами

$$diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, E, E\right) \text{ и } diag\left(\left[d, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right], E, E\right),$$

где k - произвольный элемент кольца K.

Согласно лемме 5, выбирая в качестве d конкретные матрицы, например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

получаем, что ,

$$h^{s_2} = diag(F, *),$$

где матрица $F \in GL(2,R)$ и F коммутирует с матрицей aи коммутатором $[d,a]$.

Нетрудно видеть, что

$$\left[h^{s_2}, diag\left(E, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, E\right)\right] = diag\left(E, *\right).$$

Это означает, что имеет место равенство

$$\begin{array}{l} \Lambda_1 diag\left(E, *\right) = \left[diag\left(E, \begin{pmatrix} 1 & s_1 s_2 k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E\right), diag\left(E, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, *\right)\right] = \\ = diag\left(E, \left[\begin{pmatrix} 1 & s_1 s_2 k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right], E\right) \end{array}.$$

Из перестановочности матриц $diag\left(d, E\right)$ и $diag\left(E, *\right)$ получаем, что в том случае, когда $d \in E\left(2, \zeta R\right)$, где ζR - центр кольца R, имеют место равенства

$$\Lambda_1 diag\left(d, E, E\right) = \begin{pmatrix} M & 0 & * \\ 0 & N & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix}, \Lambda_1 diag\left(E, d, E\right) = \begin{pmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & M & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что элемент $\Lambda_1 diag\left(d, d, E\right) = diag\left(*, *, *\right)$ - имеет диагональный вид находим, что

$$\Lambda_1 diag\left(d, E, E\right) = diag\left(M, N, *\right), \Lambda_1 diag\left(E, d, E\right) = diag\left(N, M, *\right),$$

где N коммутирует с M и матрицами

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right],$$

где $s = s_1 s_2 k$ - произвольный элемент кольца K.

Введем обозначения

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} m & n \\ -n & m+n \end{pmatrix},$$

где $ns = -sn$, $ms - sm = \left(s + s^2\right) n$. Положив $s = 1$ получаем, что $2n = 0$. Поэтому $ns = sn$ для произвольного элемента s кольца K.

Найдем вид прообраза матрицы $diag\left(\begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix}, E\right)$ при гомоморфизме Λ_1. В соответствии с условием (*) существуют натуральные числа s_1, s_2, которые обратимые в кольце K и матрица g $\in$ G такие, что

$$\Lambda_1 g = diag\left(\begin{pmatrix} E & s_1 E \\ 0 & E \end{pmatrix}, E\right)$$

и g^{s_2} коммутируют с матрицами

$$diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, E\right) \text{ и } diag\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E\right).$$

Поэтому

$$g^{s_2} = diag\left(\begin{pmatrix} xE & yE \\ zE & tE \end{pmatrix}, l\right).$$

Очевидно, что произвольная матрица группы $GL\left(2, \zeta R\right)$ коммутирует с матрицами xE, yE, zE, tE.

Поскольку образы элементов

$$g^{s_2}, \left(g^{s_2}\right)^{diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, E, E\right)}, \left(g^{s_2}\right)^{diag\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, E, E\right)}$$

при гомоморфизме Λ_1 попарно коммутируют, то в соответствии с условием (*) можно считать, что сами эти матрицы попарно коммутируют.

Учитывая, что матрицы $a - E$, $a^2 - E$ являются обратимыми, получаем, что $xy = yt$, $zx = tz$, $yz = zy = 0$. Поэтому

$$\left(g\cdot g^{diag\left(\left(\begin{array}{cc}0&-1\\1&-1\end{array}\right),E,E\right)}\cdot g^{diag\left(\left(\begin{array}{cc}-1&1\\-1&0\end{array}\right),E,E\right)}\right)^{s_2}=diag\left(x^3,t^3,l^3\right).$$

Из полученного равенства следует, что элементы x, t являются обратимыми и ввиду равенства $E+a+a^2=0$ имеет место равенство

$$\Lambda_1 diag\left(x^3,t^3,l^3\right)=E.$$

Поскольку

$$diag\left(\left(\begin{array}{cc}xE&yE\\zE&tE\end{array}\right),l\right)=diag\left(x,t,l\right)\cdot diag\left(\left(\begin{array}{cc}E&x^{-1}y\\t^{-1}z&z\end{array}\right),E\right)$$

является произведением коммутирующих матриц, то

$$\Lambda_1 diag\left(\left(\begin{array}{cc}E&3x^{-1}yE\\3t^{-1}zE&E\end{array}\right),E\right)=\Lambda_1 g^3=diag\left(\left(\begin{array}{cc}E&3s_1s_2E\\0&E\end{array}\right),E\right)$$

Поэтому, без ограничения общности, с самого начала можно считать, что

$$\Lambda_1 diag\left(\left(\begin{array}{cc}E&yE\\zE&E\end{array}\right),E\right)=diag\left(\left(\begin{array}{cc}E&E\\0&E\end{array}\right),E\right),$$

где $yz=zy=0$.

Очевидно, что $\left(\begin{array}{cc}E&yE\\zE&E\end{array}\right)^{-1}=\left(\begin{array}{cc}E&-yE\\-zE&E\end{array}\right)$.

Покажем, что $n=0$. Для этого подействуем сопряжением элементом $diag\left(d,E,E\right)$, где $d\in E\left(2,\zeta R\right)$ на матрицу $diag\left(\left(\begin{array}{cc}E&yE\\zE&E\end{array}\right),E\right)$. Ясно, что

$$diag\left(\left(\begin{array}{cc}E&yE\\zE&E\end{array}\right),E\right)^{diag(d,E,E)}=diag\left(\left(\begin{array}{cc}E&dyE\\zd^{-1}E&E\end{array}\right),E\right)$$

В таком случае

$$\Lambda_1 diag\left(\left(\begin{array}{cc}E&dyE\\zd^{-1}E&E\end{array}\right),E\right)=diag\left(\left(\begin{array}{cc}E&MN^{-1}\\0&E\end{array}\right),E\right)$$

Следовательно, имеет место равенство

$$\Lambda_1 diag\left(\left(\begin{array}{cc}E&\left(d-E\right)y\\z\left(d^{-1}-E\right)z&E\end{array}\right),E\right)=diag\left(\left(\begin{array}{cc}E&MN^{-1}-E\\0&E\end{array}\right),E\right)$$

Элементы

$$\left(\begin{array}{cc}0&\left(d-E\right)y\\z\left(d^{-1}-E\right)&0\end{array}\right)\text{ и }\left(\begin{array}{cc}d-E&0\\0&0\end{array}\right)$$

коммутируют, если $\left(d-E\right)^2=\left(d^{-1}-E\right)\left(d-E\right)=0$. В качестве такого элемента d можно выбрать матрицу $\left(\begin{array}{cc}1&1\\0&1\end{array}\right)$.

Пусть в дальнейшем в роли d выступает $t=\left(\begin{array}{cc}1&1\\0&1\end{array}\right)$. В таком случае $diag\left(t,E,E\right)=diag\left(M,N,*\right)$ и элементы

$$diag\left(\left(\begin{array}{cc}E&MN^{-1}-E\\0&E\end{array}\right),E\right),\ diag\left(M,N,*\right)$$

также коммутируют. Поэтому

$$M\left(MN^{-1}-E\right)=\left(MN^{-1}-E\right)N.$$

Это означает, что

$$(M-N)^2=0\ .$$

Очевидно, что

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\Lambda_1 diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E, E\right)=diag\,(aM, N, *)\ .$$

Следовательно имеют место равенства

$$\Lambda_1 diag\,(-E, E, E)=diag\,(aM, N, *)^2 \text{ и}$$

$$diag\left(\begin{pmatrix} E & yE \\ zE & E \end{pmatrix}, E\right)^{diag(-E,E,E)}=diag\left(\begin{pmatrix} E & yE \\ zE & E \end{pmatrix}, E\right)^{-1}.$$

После действия гомоморфизма Λ_1 на полученное равенство имеем

$$(aM)^2=-N^2\ .$$

Поскольку $diag\,(-E,E,E)$ коммутирует с $diag\,(F,*)$, то N^2 коммутирует с M. Поэтому $n^2=0$ и $N^2=m^2$. Следовательно,

$$aMaM=-m^2E\ ,\ (M-mE)^2=0\ ,\ M^2-2mM=-m^2E\ ,$$

где m коммутирует с элементами M. Поэтому после сокращения на M получаем, что

$$aMa=M-2mE\ .$$

Из полученного равенства следует, что

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ a+b-2m & 2m-a \end{pmatrix}.$$

Из равенства $MN=NM$ следует, что $am-ma=na$, $bm-mb=bn$. Поскольку

$$am-ma=a\,(a+1)\,n \text{ и } bm-mb=b\,(b+1)\,n\ , \text{ то } a^2n=b^2n=0\ .$$

Нетрудно видеть, что

$$M-N=\begin{pmatrix} a-m & b-n \\ a+b-2m+n & m-a-n \end{pmatrix}.$$

Из равенства $(M-N)^2=0$ следует, что

$$(a-m)\,(b-n)+(b-n)\,(m-a-n)=0.$$

Поэтому $ab-an-mb+mn+bm-ba-bn-nm+na+n^2=0$.

Используя вышеполученные равенства имеем, что

$$ab=ba\ .$$

Поскольку M - обратимая матрица, то существуют элементы u и v в кольце K такие, что

$$au+bv=1\ .$$

Поэтому $abn=(a^2bu+ab^2v)\,n=0$ и $an=(a^2u+abv)\,n=0$, $bn=(abu+b^2v)\,n=0$. Однако, равенства $an=bn=0$ возможные только при $n=0$. Тем самым доказано, что $n=0$, $sm-ms=s\,(s+1)\,n=0$, то есть m - элемент центра кольца K, $m^4=1$.

Кроме этого из равенства $(M-N)^2=0$ следует, что

$$a^2+b^2+ab-2ma-2mb+m^2=0\ .$$

Вычислим

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}M-M\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2m-a-2b & 2a+b-2m \\ a-b & a+2b-2m \end{pmatrix}.$$

Проверим, что полученная матрица обратимая. Поскольку элементы a, b, m попарно коммутируют, то достаточно убедиться в обратимости ее определителя. Несложные вычисления показывают, что определитель вышесказанной матрицы равняется m^2 и, следовательно, является обратимым элементом.

Поэтому элемент

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} M, M \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right] - E = \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} M - M \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} M^{-1}$$

является обратимым.

Кроме этого

$$\Lambda_1 diag\left(-E, E, E\right) = \Lambda_1 diag \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E, E\right)^2 = diag \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} M, N, *\right)^2 = \\ = diag\left(-m^2 E, m^2 E, *\right)$$

Учитывая, что

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -E & \\ & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & \\ & -E \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -E & \\ & E \end{pmatrix}$$

получаем, что

$$\Lambda_1 diag\left(E, -E, E\right) = diag\left(m^2 E, -m^2 E, *\right).$$

В частности,

$$\Lambda_1 diag\left(-E, -E, E\right) = diag\left(-E, -E, *\right).$$

5. Переход к четырехмерному случаю

Лемма 7. *Пусть $\Lambda : G \to GL\left(W\right)$ гомоморфизм группы $E\left(n, R\right) \subseteq G \subseteq GL\left(n, R\right)$, $n \geq 4$ удовлетворяющий условие (*). Тогда $R\left(a\right) \bigcap R\left(b\right) = 0$.*

Доказательство. Высше доказано, что

$$\Lambda_1 diag\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E, E\right) = diag\left(M, mE, q\right),$$

где $q \in GL\left(P\right)$, $P = R\left(a\right) \bigcap R\left(b\right) \oplus P\left(a\right) \bigcap P\left(b\right)$, m - центральный элемент кольца K, $\left[\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & E \end{pmatrix}, M\right] - E$ - обратимая формальная матрица. Кроме этого, без ограничения общности, можно считать, что

$\Lambda_1 diag\left(a, E, E\right) = diag\left(a, E, a, E\right)$, $\Lambda_1 diag\left(E, a, E\right) = diag\left(E, a, a, E\right)$.

Учитывая, что элементы

$$diag\left(t, E, E\right) \text{ и } diag\left(E, t, E\right), \text{ где } t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

коммутируют, получаем, что q коммутирует с $diag\left(a, E\right)$. Поэтому

$$\Lambda_1 diag\left(\left[a, t\right], E, E\right) = diag\left(\left[a, M\right], E, E, E\right)$$

Из аналогичных рассуждений следует, что

$$\Lambda_1 diag\left(E, \left[a, t\right], E\right) = diag\left(E, \left[a, M\right], E, E\right).$$

Тем самым доказано, что

$$\Lambda_1 diag\left(\left[a, t\right], \left[a, t\right], E\right) = diag\left(\left[a, M\right], \left[aM\right], E, E\right).$$

Учитывая, что $diag\left(t, E\right)$ коммутирует с $diag\left(\left[a, t\right], \left[a, t\right], E\right)$ получаем, что $\Lambda_1 diag\left(a, E\right)$ коммутирует с $diag\left(\left[a, M\right] - E, \left[a, M\right] - E, 0, 0\right)$. Поэтому подмодуль P является инвариантным относительно $\Lambda_1 diag\,(a,E)$. Согласно следствию 1 на подмодуле P элементы $\Lambda_g a$, $\Lambda_g b$ являются единичными, $R\,(a) \bigcap R\,(b) = 0$. Согласно формуле

$$[t_{ij}t_{ij}\,(-1)\,, t_{jk}\,(1)\,, t_{ij}\,(1)] = t_{ik}\,(-1)\ ,$$

из [1], где $1 \le i,j,k \le n$ - попарно различные числа,

$$t_{ij} = t_{ij}\,(-1)\,t_{ji}\,(1)\,t_{ij}\,(-1) = t_{ji}\,(1)\,t_{ij}\,(-1)\,t_{ji}\,(1)$$

на подмодуле P имеют место равенства

$$\Lambda_1 diag\,(t_{ij}\,(1)) = E$$

для всех $1 \le i \ne j \le 4$.

Тем самым доказано, что для всех $1 \le i \ne j \le 4$

$$\Lambda_1 diag\,(t_{ij}\,(1)\,, E) \in diag\,((EndL)_4\,, E)\ ,$$

где $W_g = L \oplus L \oplus L \oplus L \oplus P$.

Это означает, что достаточно рассмотреть случай, когда $P = 0$, $W_g = L \oplus L \oplus L \oplus L$ и гомоморфизм Λ_1 отображает группу $E\,(4,R) \subseteq G \subseteq GL\,(4,R)$ в кольцо формальных 4x4 матриц над кольцом $EndL$ и является гомоморфизмом с условием (*). После переобозначения получаем, что

$$\Lambda_1 diag\,(t_{12}\,(1)\,, E) = mdiag\,(M,E)\ ,\ \Lambda_1 diag\,(a,E) = diag\,(a,E)\ ,$$

$$\Lambda_1 diag\,(b,b) = diag\,(\alpha,\alpha)\ ,\ \Lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix},$$

где m - центральный элемент кольца $EndL$,

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ x+y-2 & 2-x \end{pmatrix},\ t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$m^4 = 1\ ,\ xy = yx\ ,\ x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0\ .$$

6. Завершение нахождения образов единичных трансвекций

По аналогии с отысканием прообраза матрицы $diag\left(\begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix}, E\right)$ найдем образ матрицы $\begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix}$ при гомоморфизме Λ_1 .

Предположим, что

$$\Lambda_1 t_{13}\,(1)\,t_{24}\,(1) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

где $A,\ B,\ C,\ D$ - элементы кольца $(EndL)_2$.

Поскольку элементы $diag\,(t,t)$ и $diag\,(a,a)$ коммутируют с $t_{13}\,(1)\,t_{24}\,(1)$, то M и a коммутируют с элементами $A,\ B,\ C,\ D$. Ввиду того, что элементы

$$t_{13}\,(1)\,t_{24}\,(1) = \begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix},\ t_{13}\,(1)\,t_{24}\,(1)^{diag(a,E)} = \begin{pmatrix} E & a \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

$$t_{13}\,(1)\,t_{24}\,(1)^{diag\left(a^2,E\right)} = \begin{pmatrix} E & a^2 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

попарно коммутируют, получаем равенство

$$\begin{pmatrix} A & aB \\ Ca^2 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & aB \\ Ca^2 & D \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $a - E$ - обратимая матрица, находим равенства

$$BC = CB = 0\ ,\ CA = DC\ ,\ AB = BD,\ A^2B = BD^2,\ CA^2 = D^2C.$$

Поскольку $a^2 + a + E = 0$, то

$$E = \Lambda_1 \begin{pmatrix} E & E + a + a^2 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & aB \\ Ca^2 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & a^2B \\ Ca & D \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} A^3 & 0 \\ 0 & D^3 \end{pmatrix} .$$

Следовательно, $A^3 = D^3 = E$ и

$$\Lambda_1 \begin{pmatrix} E & -E \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^2 & -AB \\ -DC & D^2 \end{pmatrix} .$$

Тем самым доказано, что

$$\Lambda_1 t_{14}(1) = \Lambda_1 [t_{12}(1), t_{13}(1) t_{24}(1)] = \left[\begin{pmatrix} M & \\ & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} A & MB \\ CM^{-1} & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^2 & -AB \\ -DC & D^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & X \\ Y & E \end{pmatrix} ,$$

где $X = (M - E) A^2 B$, $Y = (M^{-1} - E) D^2 C$, $XY = YX = 0$, M коммутирует с X и Y

$$\Lambda_1 t_{24}(1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \Lambda_1 t_{14}(1) \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & aX \\ Ya^2 & E \end{pmatrix} .$$

Из равенства $[t_{12}(1), t_{24}(1)] = t_{14}(1)$ следует, что $t_{12}(1) t_{24}(1) t_{12}(-1) = t_{14}(1) t_{24}(1)$.

Поэтому

$$\begin{pmatrix} E & MaX \\ Ya^2M^{-1} & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & (a+E)X \\ Y(a^2+E) & Ya^2X + E \end{pmatrix} .$$

Следовательно,

$$Ya^2X = 0 , \; YaX = -Y(1+a^2)X = 0 , \; 0 = (Ma - a - E)X = (M+a)aX .$$

Аналогично

$$\Lambda_1 t_{23}(1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \Lambda_1 t_{14}(-1) \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & -aXa^2 \\ -aYa^2 & E \end{pmatrix} ,$$

$$\Lambda_1 t_{13}(1) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \Lambda_1 t_{14}(-1) \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & -Xa^2 \\ -aY & E \end{pmatrix} .$$

Тем самым доказано, что

$$\Lambda_1 t_{13}(1) t_{24}(1) = \begin{pmatrix} E - aXaY & aX - Xa^2 \\ Ya^2 - aY & E \end{pmatrix} .$$

Поэтому $A = E - aXaY$, $B = aX - Xa^2$, $C = Ya^2 - aY$, $D = E$. Ясно, что $(A-E)^2 = 0$. Из равенства $A^3 = E$ следует, что $A = E$, а значит $XaY = 0$ и $Xa^2Y = X(-1-a)Y = 0$, $X = (M-E)B$, $Y = (M^{-1} - E)C$, $MX = X$, $MY = Y$, $Y = -(M-E)C$, $X^2 = 0$, $XaX = X$, $Xa^2X = -X$, $Y^2 = 0$, $YaY = Y$, $Ya^2Y = -Y$.

Тем самым доказано, что

$$(\Lambda_1 t_{ij}(1) - E)(\Lambda_1 t_{pq}(1) - E) = 0$$

для всех $1 \le i, p \le 2$, $3 \le j, q \le 4$.

Действуя сопряжением на эти равенства получаем, что они имеют место для всех $1 \le i, j, p, q \le 4$, где $i \ne j$, $j \ne p$, $p \ne q$, $q \ne i$. Из этого утверждения, как показано в [2], уже следует описание гомоморфизмов. Однако, мы покажем, как воспользовавшись вышеизложенным, можно непосредственно завершить описание гомоморфизмов матричных групп над ассоциативными кольцами.

Из равенства $\Lambda_1 t_{12}(1) = diag(mM, mE)$ следует, что

$$\Lambda_1 t_{34}(1) = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} diag(mM, mE) \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} = diag(mE, mM) .$$

Сопрягая равенство $(\Lambda_1 t_{13}(-1) - 1)(\Lambda_1 t_{34}(-1) - 1) = 0$ матрицей

$$\Lambda_1 diag\left(1, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 1\right)$$

получаем, что $(\Lambda_1 t_{12}(1) - 1)(\Lambda_1 t_{34}(1) - 1) = 0$,

$$(mE - E)(mM - E) = 0 \ .$$

Поскольку

$$mM - E = \begin{pmatrix} mx - 1 & my \\ mx + my - 2m & 2m - mx - 1 \end{pmatrix},$$

то $(m-1)y = 0$ и $(m-1)(x-2) = 0$. Умножая равенство $x^2 - 2x + y^2 + xy - 2y + 1 = 0$ на $m - 1$ получаем, что $m = 1$,
$\Lambda_1 t_{12}(1) = diag(M, E)$, $\Lambda_1 diag(-E, E) = diag(-E, E)$, $\Lambda_1 t_{34}(1) = diag(E, M)$,
где $M = \begin{pmatrix} x & y \\ x + y - 2 & 2 - x \end{pmatrix}$, $(M - E)^2 = 0$, $M + M^{-1} = 2E$.

Из равенства

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

следует, что

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & B \\ C & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -C \\ -B & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & B \\ C & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Поэтому $E = B^2 + C^2$, $B - B^3 = BC^2 = 0$, $B - C = E$, $X + Y = M - E$.

Полученное равенство означает, что $B^2 = B$ является идемпотентом.

Тем самым доказано, что

$$\Lambda_1 t_{13}(1)\, t_{24}(1) = \begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix} B + \begin{pmatrix} E & 0 \\ -E & E \end{pmatrix} (E - B)\,.$$

Ясно, что $X = (M - E)B$, $Y = -(M - E)C = (M - E)(E - B)$ и B коммутирует с a и M. По условию (*) существует центральный идемпотент e такой, что $B = diag(e, e)$. Поскольку имеет место разложение еденицы в суму идемпотентов

$$E = a(M - E) - (M - E)a^2$$

которое индуцирует 4-х мерное разложение модуля W, то точностью до сопряжения,

$$\Lambda_1 t_{ij}(1) = t_{ij}(1)\, e + t_{ji}(-1)(1 - e)$$

для всех $1 \le i \ne j \le 4$.

Следовательно, с точностью до сопряжения, имеет место общая формула образов единичных трансвекций

$$\Lambda_1 t_{ij}(1) = diag\left((t_{ij}(1)\, e + t_{ji}(-1)(1 - e)), e_1\right),$$

где $e^2 = e$, $e_1^2 = e_1$ для всех $1 \le i \ne j \le n$.

Лемма 7 и следствие 2 работы [1] завершают описание гомоморфизмов с условием (*).

Список использованной литературы

1. Петечук В.М., Петечук Ю.В. Гомоморфизмы матричных групп над ассоциативными кольцами. Часть I // Наук. вiсник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. i iнформ. - 2014. - Вип. 25. №2 - С. 152- 171 .
2. Golubchik I.Z. Izomorphism of the General Linear Group $GL_n(R)$, $n \ge 4$ over on associative Ring // Contemporary Mathematics. - 1992. - Vol. 131. - Part 1. - P. 123-136.

Получено 10.02.2015