

УДК 519.21

А. М. Тегза (Ужгородський нац. ун-т)

ОЦІНКИ СУБГАУССОВОГО СТАНДАРТУ ТА ПОБУДОВА МОДЕЛІ ГАУССОВОГО СТАЦІОНАРНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ У ПРОСТОРІ $C([0, T])$.

We constructed model of Gaussian processes, which approximates these processes with given accuracy and reliability in $C([0, T])$.

Одержано деякі оцінки субгауссового стандарту, за якими побудовано загальну модель гауссового стаціонарного процесу, яка наближає цей процес з заданою точністю і надійністю в $C([0, T])$.

Вступ. Всі необхідні відомості з теорії субгауссових випадкових величин містяться у книгах [1], [2]. Основні принципи побудови моделей гауссових випадкових процесів та полів можна знайти в книзі [3]. У роботі одержано деякі оцінки субгауссового стандарту і побудовано загальну модель гауссового стаціонарного процесу, яка наближає цей процес з заданою точністю і надійністю в $C([0, T])$.

Робота складається з трьох розділів. У першому розділі описано всі необхідні відомості з теорії субгауссових процесів. У другому — одержано деякі оцінки субгауссового стандарту для моделі гауссового стаціонарного процесу. У третьому — для часткового випадку побудовано модель із заданою точністю та надійністю.

1. Властивості $Sub(\Omega)$ простору. Нехай $\{\Omega, \mathcal{B}, P\}$ стандартний ймовірнісний простір. Нагадаємо (див. [1]), що центровану випадкову величину ξ будемо називати субгауссовою, якщо знайдеться таке $a \geq 0$, що для всіх $\lambda \in R$ виконується нерівність

$$E \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\left\{\frac{a^2\lambda^2}{2}\right\}.$$

Клас усіх субгауссових випадкових величин позначають $Sub(\Omega)$. Простір $Sub(\Omega)$ є банаховим простором відносно норми $\tau(\xi)$ [1].

Нехай $X = \{X(t), t \in \mathcal{T}\}$ гауссовий випадковий процес. Припустимо, що виконується умова Дадлі:

$$I(\varepsilon_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varepsilon_0} \sqrt{H(\varepsilon)} d\varepsilon < \infty,$$

де $H(\varepsilon) = H_\rho(\mathcal{T}, \varepsilon)$ — метрична ентропія множини \mathcal{T} відносно субгауссового відхилення $\rho(t, s)$, тоді справедливим буде таке співвідношення [1]

$$P\left\{\sup_{t \in \mathcal{T}} |X(t)| \geq \delta\right\} \leq 2 \exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_0^2} \left(\delta - \sqrt{8\delta I(\varepsilon_0)}\right)^2\right\}.$$

Нехай $\mathcal{T} = [0, T]$ і $\sup_{|t-s|<h} \tau(X(t) - X(s)) \leq \sigma(h)$, де $\sigma(h) \geq 0$ є неперервною монотонно спадною функцією, такою що $\sigma(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Тоді

$$I(\varepsilon_0) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varepsilon_0} \left(\ln\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)} + 1\right)\right)^{1/2} d\varepsilon.$$

2. Деякі оцінки для загальної моделі гауссового стаціонарного процесу.

Нехай $X = \{X(t), t \in \mathcal{T}\}$ – гауссів стаціонарний дійсний центрований неперервний в середньому квадратичному випадковий процес з коваріаційною функцією

$$EX(t + \tau)X(t) = r(\tau) = \int_0^{\infty} \cos \lambda \tau dF(\lambda),$$

де $F(\lambda)$ – неперервна спектральна функція процесу.

Випадковий процес $X(t)$ має зображення

$$X(t) = \int_0^{\infty} \cos \lambda t d\eta_1(\lambda) + \int_0^{\infty} \sin \lambda t d\eta_2(\lambda),$$

де $\eta_1(\lambda)$, $\eta_2(\lambda)$ незалежні центровані гауссові випадкові процеси з незалежними приростами. Представимо $X(t)$ як

$$X(t) = X_{\Lambda}(t) + X^{\Lambda}(t),$$

$$\text{де } X_{\Lambda}(t) = \int_0^{\Lambda} \cos \lambda t d\eta_1(\lambda) + \int_0^{\Lambda} \sin \lambda t d\eta_2(\lambda),$$

$$X^{\Lambda}(t) = \int_{\Lambda}^{\infty} \cos \lambda t d\eta_1(\lambda) + \int_{\Lambda}^{\infty} \sin \lambda t d\eta_2(\lambda).$$

За модель процесу $X(t)$ візьмемо

$$X_{\Lambda}^M(t) = \sum_{k=0}^M (\eta_{k1} \cos \zeta_k t + \eta_{k2} \sin \zeta_k t), \quad (1)$$

де $\Lambda = \{\lambda_0, \dots, \lambda_M\}$ таке розбиття множини $[0, \infty]$, що $\lambda_0 = 0$, $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, $\lambda_{M+1} = \infty$; η_{k1} , η_{k2} , ζ_k незалежні випадкові величини такі, що $E\eta_{k1} = E\eta_{k2} = 0$,

$$E\eta_{k1}^2 = E\eta_{k2}^2 = F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k) = b_k^2, \quad k = 1, \dots, M,$$

ζ_k – випадкові величини, що приймають значення на відрізках $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ та мають такі функції розподілу

$$P\{\zeta_k < \lambda\} = F_k(\lambda) = \frac{F(\lambda) - F(\lambda_k)}{F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)}.$$

Покажемо за яких умов треба вибирати розбиття Λ , щоб для моделі X_{Λ}^M існував центрований гауссовий процес $X(t)$, який би вона наближала в просторі $C([0, T])$ із заданими точністю та надійністю.

Позначимо

$$\begin{aligned} \eta_{\Lambda}(t) &= X(t) - X_{\Lambda}^M(t) \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} \left[\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos \lambda t - \cos \zeta_k t) d\eta_1(\lambda) + \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin \lambda t - \sin \zeta_k t) d\eta_2(\lambda) \right] \\ &\quad + \int_{\lambda_M}^{\infty} (\cos \lambda t - \cos \zeta_M t) d\eta_1(\lambda) + \int_{\lambda_M}^{\infty} (\sin \lambda t - \sin \zeta_M t) d\eta_2(\lambda). \quad (2) \end{aligned}$$

Справедливі наступні теореми.

Теорема 1. *Якщо $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |u - \lambda|^{2\alpha} dF(\lambda) dF(u) < \infty$ при $0 < \alpha \leq 1$, то для субгауссового процесу $\eta_{\Lambda}(t)$ має місце така оцінка*

$$\tau(\eta_{\Lambda}(t)) \leq \frac{t^{\alpha}}{2^{\alpha-2}} \left(\left(\frac{\Lambda}{M} \right)^{2\alpha} F(\Lambda) + \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} |u - \lambda|^{2\alpha} dF(\lambda) dF(u) \right)^{1/2}.$$

Доведення.

$$\begin{aligned} \tau^2(\eta_{\Lambda}(t)) &\leq \sum_{k=0}^{M-1} \tau^2 \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos \lambda t - \cos \zeta_k t) d\eta_1(\lambda) + \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin \lambda t - \sin \zeta_k t) d\eta_2(\lambda) \right) + \\ &\quad + \tau^2 \left(\int_{\lambda_M}^{\infty} (\cos \lambda t - \cos \zeta_M t) d\eta_1(\lambda) + \int_{\lambda_M}^{\infty} (\sin \lambda t - \sin \zeta_M t) d\eta_2(\lambda) \right). \quad (3) \end{aligned}$$

Оцінимо перший доданок у (3):

$$\begin{aligned} &\tau^2 \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos \lambda t - \cos \zeta_k t) d\eta_1(\lambda) + \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin \lambda t - \sin \zeta_k t) d\eta_2(\lambda) \right) \leq \\ &\leq \left(\tau \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos \lambda t - \cos \zeta_k t) d\eta_1(\lambda) \right) + \tau \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin \lambda t - \sin \zeta_k t) d\eta_2(\lambda) \right) \right)^2. \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau^2 \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos \lambda t - \cos \zeta_k t) d\eta_1(\lambda) \right) &\leq \theta_1^2 \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos \lambda t - \cos \zeta_k t) d\eta_1(\lambda) \right) \leq \\
&\leq \sup_{m \geq 1} \left[\frac{1}{\Delta_{2m}} E \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos \lambda t - \cos \zeta_k t) d\eta_1(\lambda) \right)^{2m} \right]^{\frac{1}{m}} \leq \\
&\leq \sup_{m \geq 1} \left[4^m E \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left| \sin \frac{t(\zeta_k - \lambda)}{2} \right|^2 dF(\lambda) \right)^m \right]^{\frac{1}{m}} = \\
&= \sup_{m \geq 1} \left[4^m b_k^{2m} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left| \sin \frac{t(u - \lambda)}{2} \right|^2 dF_k(u) \right)^m dF_k(\lambda) \right) \right]^{\frac{1}{m}} = \\
&= \sup_{m \geq 1} 4b_k^2 \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left| \sin \frac{t(u - \lambda)}{2} \right|^2 dF_k(u) \right)^m dF_k(\lambda) \right)^{\frac{1}{m}} \leq \\
&\leq \sup_{m \geq 1} 4b_k^2 \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \frac{t^{2\alpha m} |u - \lambda|^{2\alpha m}}{4^{\alpha m}} dF_k(u) dF_k(\lambda) \right)^{\frac{1}{m}} \leq \\
&\leq \frac{t^{2\alpha} |\lambda_{k+1} - \lambda_k|^{2\alpha}}{4^{\alpha-1}} (F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)) = I_k,
\end{aligned}$$

де $\alpha \in [0, 1]$.

Аналогічно отримаємо

$$\tau^2 \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin \lambda t - \sin \zeta_k t) d\eta_2(\lambda) \right) \leq I_k.$$

Оцінимо другий доданок у (3):

$$\begin{aligned}
\tau^2 \left(\int_{\lambda_M}^{\infty} (\cos \lambda t - \cos \zeta_M t) d\eta_1(\lambda) \right) &\leq \theta_1^2 \left(\int_{\lambda_M}^{\infty} (\cos \lambda t - \cos \zeta_M t) d\eta_1(\lambda) \right) \leq \\
&\leq \sup_{m \geq 1} \left[\frac{1}{\Delta_{2m}} E \left(\int_{\lambda_M}^{\infty} (\cos \lambda t - \cos \zeta_M t) d\eta_1(\lambda) \right)^{2m} \right]^{\frac{1}{m}} \leq \\
&\leq \sup_{m \geq 1} \left[E \left(\int_{\lambda_M}^{\infty} \left| 2 \sin \frac{t(\lambda - \zeta_M)}{2} \right|^2 dF(\lambda) \right)^m \right]^{\frac{1}{m}} \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{m \geq 1} \left[\int_{\lambda_M}^{\infty} \left(\int_{\lambda_M}^{\infty} \frac{|t(u-\lambda)|^{2\alpha}}{4^{\alpha-1}} dF(\lambda) \right)^m dF(u) \right]^{\frac{1}{m}} \leq \\ &\leq \sup_{m \geq 1} \left(\int_{\lambda_M}^{\infty} \int_{\lambda_M}^{\infty} \frac{t^{2m\alpha} |u-\lambda|^{2m\alpha}}{4^{(\alpha-1)m}} dF(\lambda) dF(u) \right)^{\frac{1}{m}} \leq \int_{\lambda_M}^{\infty} \int_{\lambda_M}^{\infty} \frac{t^{2\alpha}}{4^{\alpha-1}} |u-\lambda|^{2\alpha} dF(\lambda) dF(u). \end{aligned}$$

Аналогічно отримаємо

$$\tau^2 \left(\int_{\lambda_M}^{\infty} (\sin \lambda t - \sin \zeta_M t) d\eta_2(\lambda) \right) \leq \int_{\lambda_M}^{\infty} \int_{\lambda_M}^{\infty} \frac{t^{2\alpha}}{4^{\alpha-1}} |u-\lambda|^{2\alpha} dF(\lambda) dF(u).$$

Співставивши (3) і (4), використавши останні нерівності, матимемо

$$\begin{aligned} \tau^2(\eta_{\Lambda}(t)) &\leq \sum_{k=0}^{M-1} \tau^2 \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos \lambda t - \cos \zeta_k t) d\eta_1(\lambda) + \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin \lambda t - \sin \zeta_k t) d\eta_2(\lambda) \right) + \\ &+ \tau^2 \left(\int_{\lambda_M}^{\infty} (\cos \lambda t - \cos \zeta_k t) d\eta_1(\lambda) + \int_{\lambda_M}^{\infty} (\sin \lambda t - \sin \zeta_k t) d\eta_2(\lambda) \right) \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{M-1} \left(\tau \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos \lambda t - \cos \zeta_k t) d\eta_1(\lambda) \right) + \tau \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin \lambda t - \sin \zeta_k t) d\eta_2(\lambda) \right) \right)^2 + \\ &+ \left(\tau \left(\int_{\lambda_M}^{\infty} (\cos \lambda t - \cos \zeta_k t) d\eta_1(\lambda) \right) + \tau \left(\int_{\lambda_M}^{\infty} (\sin \lambda t - \sin \zeta_k t) d\eta_2(\lambda) \right) \right)^2 \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{M-1} 4I_k + 4 \int_{\lambda_M}^{\infty} \int_{\lambda_M}^{\infty} \frac{t^{2\alpha}}{4^{\alpha-1}} |u-\lambda|^{2\alpha} dF(\lambda) dF(u). \end{aligned}$$

Якщо покладемо $\lambda_{k+1} - \lambda_k = \frac{\Lambda}{M}$, то

$$\begin{aligned} \tau(\eta_{\Lambda}(t)) &\leq 2 \left(\sum_{k=0}^{M-1} \frac{t^{2\alpha} |\lambda_{k+1} - \lambda_k|^{2\alpha}}{4^{\alpha-1}} b_k^2 + \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} \frac{(t|u-\lambda|)^{2\alpha}}{4^{\alpha-1}} dF(\lambda) dF(u) \right)^{1/2} = \\ &= \frac{t^{\alpha}}{2^{\alpha-2}} \left(\frac{\Lambda^{2\alpha}}{M^{2\alpha}} F(\Lambda) + \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} |u-\lambda|^{2\alpha} dF(\lambda) dF(u) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Для $\forall t, s \in \mathcal{T}$

$$\begin{aligned} \eta_{\Lambda}(t) - \eta_{\Lambda}(s) &= \sum_{k=0}^{M-1} \left[\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos \lambda t - \cos \zeta_k t - \cos \lambda s + \cos \zeta_k s) d\eta_1(\lambda) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin \lambda t - \sin \zeta_k t - \sin \lambda s + \sin \zeta_k s) d\eta_2(\lambda) \right] + \\ &+ \int_{\lambda_M}^{\infty} (\cos \lambda t - \cos \zeta_M t - \cos \lambda s + \cos \zeta_M s) d\eta_1(\lambda) + \int_{\lambda_M}^{\infty} (\sin \lambda t - \sin \zeta_M t - \sin \lambda s + \sin \zeta_M s) d\eta_2(\lambda). \end{aligned} \quad (5)$$

Теорема 2. Якщо виконуються умови теореми 1, то $\forall t, s \in [0, T]$, $i 0 < \alpha \leq 1$ має місце така оцінка

$$\begin{aligned} \tau(\eta_{\Lambda}(t) - \eta_{\Lambda}(s)) &\leq 8 \frac{|s-t|^{\alpha}}{4^{\alpha}} \left(\frac{\Lambda^{2\alpha}}{M^{2\alpha}} F(\Lambda) (1 + T^{\alpha} \Lambda^{\alpha})^2 + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} 2|u-\lambda|^{2\alpha} dF(\lambda) dF(u) + 2(1-F(\Lambda)) \int_{\Lambda}^{\infty} (2u)^{2\alpha} dF(u) \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Доведення. Введемо позначення:

$$\begin{aligned} \omega_{k1} &= \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos \lambda t - \cos \zeta_k t - \cos \lambda s + \cos \zeta_k s) d\eta_1(\lambda), \\ \omega_{k2} &= \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin \lambda t - \sin \zeta_k t - \sin \lambda s + \sin \zeta_k s) d\eta_2(\lambda), \\ \omega_{M1} &= \int_{\lambda_M}^{\infty} (\cos \lambda t - \cos \zeta_M t - \cos \lambda s + \cos \zeta_M s) d\eta_1(\lambda), \\ \omega_{M2} &= \int_{\lambda_M}^{\infty} (\sin \lambda t - \sin \zeta_M t - \sin \lambda s + \sin \zeta_M s) d\eta_2(\lambda). \end{aligned}$$

З (5) та властивості субгауссового стандарту впливає справедливості оцінок:

$$\begin{aligned} \tau^2(\eta_{\Lambda}(t) - \eta_{\Lambda}(s)) &\leq \sum_{k=0}^{M-1} (\tau(\omega_{k1}) + \tau(\omega_{k2}))^2 + (\tau(\omega_{M1}) + \tau(\omega_{M2}))^2 \leq \\ &\leq 2 \sum_{k=0}^{M-1} (\tau^2(\omega_{k1}) + \tau^2(\omega_{k2})) + 2\tau^2(\omega_{M1}) + 2\tau^2(\omega_{M2}). \end{aligned}$$

Аналогічними до попередньої теореми оцінками, одержимо:

$$\begin{aligned} \tau^2(\omega_{k1}) &\leq 16 \sup_{m \geq 1} \left(E \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\left| \sin \frac{(s-t)(\lambda - \zeta_k)}{4} \right| + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \left| \sin \frac{(s-t)\zeta_k}{2} \right| \cdot \left| \sin \frac{(s+t)(\lambda - \zeta_k)}{4} \right| \right)^2 dF(\lambda) \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} \leq \\ &\leq 16 \left(\frac{|s-t|^\alpha (\lambda_{k+1} - \lambda_k)^\alpha}{4^\alpha} + \frac{|s-t|^\alpha \lambda_{k+1}^\alpha \cdot (s+t)^\alpha (\lambda_{k+1} - \lambda_k)^\alpha}{2^\alpha 4^\alpha} \right)^2 (F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)) \leq \\ &\leq 16(F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)) \frac{|s-t|^{2\alpha} (\lambda_{k+1} - \lambda_k)^{2\alpha}}{4^{2\alpha}} \left(1 + \frac{\lambda_{k+1}^\alpha (2T)^\alpha}{2^\alpha} \right)^2 = J_k. \end{aligned}$$

Аналогічно $\tau^2(\omega_{k2}) \leq J_k$.

$$\begin{aligned} \tau^2(\omega_{M1}) &\leq \theta_1^2(\omega_{M1}) \leq 16 \sup_{m \geq 1} \left(E \left(\int_{\lambda_M}^{\infty} \left(\left| \sin \frac{(s-t)(\lambda - \zeta_M)}{4} \right| + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \left| \sin \frac{(s-t)\zeta_M}{2} \right| \cdot \left| \sin \frac{(s+t)(\lambda - \zeta_M)}{4} \right| \right)^2 dF(\lambda) \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} \leq \\ &\leq 16 \sup_{m \geq 1} \left(\int_{\lambda_M}^{\infty} \int_{\lambda_M}^{\infty} \left(\left| \sin \frac{(s-t)(\lambda - u)}{4} \right| + \left| \sin \frac{(s-t)\zeta_M}{2} \right| \cdot \left| \sin \frac{(s+t)(\lambda - u)}{4} \right| \right)^{2m} \right. \\ &\quad \left. dF(\lambda) dF(u) \right)^{\frac{1}{m}} \leq 16 \sup_{m \geq 1} \left(\int_{\lambda_M}^{\infty} \int_{\lambda_M}^{\infty} \left(\frac{|s-t|^\alpha |\lambda - u|^\alpha}{4^\alpha} + \frac{|u(s-t)|^\alpha}{2^\alpha} \right)^{2m} dF(\lambda) dF(u) \right)^{\frac{1}{m}} \leq \\ &\leq 16 \int_{\lambda_M}^{\infty} \int_{\lambda_M}^{\infty} \frac{|s-t|^{2\alpha}}{4^{2\alpha}} 2 (|\lambda - u|^{2\alpha} + (2u)^{2\alpha}) dF(\lambda) dF(u) = \\ &= 32 \frac{|s-t|^{2\alpha}}{4^{2\alpha}} \left(\int_{\lambda_M}^{\infty} \int_{\lambda_M}^{\infty} |\lambda - u|^{2\alpha} dF(\lambda) dF(u) + (1 - F(\lambda_M)) \int_{\lambda_M}^{\infty} (2u)^{2\alpha} dF(u) \right). \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} \tau^2(\omega_{M2}) &\leq \theta_1^2(\omega_{M2}) \leq \\ &\leq 32 \frac{|s-t|^{2\alpha}}{4^{2\alpha}} \left(\int_{\lambda_M}^{\infty} \int_{\lambda_M}^{\infty} |\lambda - u|^{2\alpha} dF(\lambda) dF(u) + (1 - F(\lambda_M)) \int_{\lambda_M}^{\infty} (2u)^{2\alpha} dF(u) \right). \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \tau^2(\eta_\Lambda(t) - \eta_\Lambda(s)) &\leq 4 \sum_{k=0}^{M-1} J_k + \\ &+ 128 \frac{|s-t|^{2\alpha}}{4^{2\alpha}} \left[\int_{\lambda_M}^{\infty} \int_{\lambda_M}^{\infty} |\lambda - u|^{2\alpha} dF(\lambda) dF(u) + (1 - F(\lambda_M)) \int_{\lambda_M}^{\infty} (2u)^{2\alpha} dF(u) \right]. \end{aligned}$$

Якщо покласти $\lambda_{k+1} - \lambda_k = \frac{\Lambda}{M}$, то

$$\begin{aligned} \tau^2(\eta_\Lambda(t) - \eta_\Lambda(s)) &\leq \frac{128|s-t|^{2\alpha}}{4^{2\alpha}} \times \\ &\times \left[\frac{\Lambda^{2\alpha}}{2M^{2\alpha}} F(\Lambda)(1 + \Lambda^\alpha T^\alpha)^2 + \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} |u - \lambda|^{2\alpha} dF(\lambda) dF(u) + (1 - F(\Lambda)) \int_{\Lambda}^{\infty} (2u)^{2\alpha} dF(u) \right]. \end{aligned}$$

тобто одержимо (6).

3. Побудова моделі гауссового стаціонарного процесу.

Теорема 3. *Якщо випадковий процес $X_\Lambda^M(t)$ має розбиття Λ таке, що виконується нерівність:*

$$2 \exp \left\{ -\frac{1}{2\varepsilon_0^2} (\delta - \sqrt{8\delta I(\varepsilon_0)})^2 \right\} \leq \beta \quad (7)$$

при $\delta > 8I(\varepsilon_0)$, де

$$I(\varepsilon_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varepsilon_0} \left(\ln \left(\frac{T 8^{\frac{1}{\alpha}-1} K^{\frac{1}{\alpha}}}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}} d\varepsilon,$$

$$K = \left[\frac{\Lambda^{2\alpha}}{M^{2\alpha}} F(\Lambda)(1 + \Lambda^\alpha T^\alpha)^2 + 2 \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} |u - \lambda|^{2\alpha} dF(\lambda) dF(u) + 2(1 - F(\Lambda)) \int_{\Lambda}^{\infty} (2u)^{2\alpha} dF(u) \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\varepsilon_0 = \frac{T^\alpha}{2^{\alpha-2}} \left(\frac{\Lambda^{2\alpha}}{M^{2\alpha}} F(\Lambda) + \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} |u - \lambda|^{2\alpha} dF(\lambda) dF(u) \right)^{\frac{1}{2}}$$

тоді модель наближатиметься до гауссового випадкового процесу $X(t)$ у просторі $C([0, T])$ з надійністю $1 - \beta$, $0 < \beta < 1$ та точністю $\delta > 0$.

Доведення. З ентропійної характеристики випадкових процесів матимемо:

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - X_\Lambda^M(t)| \geq \delta \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\frac{1}{2\varepsilon_0^2} (\delta - \sqrt{8\delta I(\varepsilon_0)})^2 \right\}$$

З теореми 2 випливає, що

$$\sigma(h) = \sup_{|t-s|<h} \tau(\eta_\Lambda(t) - \eta_\Lambda(s)) \leq 8 \frac{h^\alpha}{4^\alpha} K,$$

де

$$K = \left[\frac{\Lambda^{2\alpha}}{M^{2\alpha}} F(\Lambda)(1 + \Lambda^\alpha T^\alpha)^2 + 2 \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} |u - \lambda|^{2\alpha} dF(\lambda) dF(u) + 2(1 - F(\Lambda)) \int_{\Lambda}^{\infty} (2u)^{2\alpha} dF(u) \right]^{1/2}.$$

Тоді

$$\sigma^{(-1)}(h) = 4 \left(\frac{h}{8K} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

А, отже,

$$I(\varepsilon_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varepsilon_0} \left(\ln \left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)} + 1 \right) \right)^{1/2} d\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varepsilon_0} \left(\ln \left(\frac{T 8^{\frac{1}{\alpha}-1} K^{\frac{1}{\alpha}}}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}} + 1 \right) \right)^{1/2} d\varepsilon,$$

де $\varepsilon_0 = \sup_{0 \leq t \leq T} \tau(\eta_\Lambda(t))$ визначено у теоремі 1.

Згідно означення наближення моделі процесу з заданими точністю і надійністю у нормі простору $C([0, T])$, модель $X_\Lambda^M(t)$ наближатиметься до гауссового випадкового процесу $X(t)$ у просторі $C([0, T])$ з надійністю $1 - \beta$, $0 < \beta < 1$ та точністю $\delta > 0$, якщо виконуватиметься умова (7).

Чим меншим вибирати значення α , тим повільніше буде збігатись інтеграл $I(\varepsilon_0)$, тому для простоти обчислень в якості часткового випадку розглянемо $\alpha = 1$ та $F(\lambda) = 1 - e^{-\lambda}$, $T = 1$. Тоді одержимо

$$\begin{aligned} I(\varepsilon_0) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varepsilon_0} \sqrt{\ln \left(1 + \frac{K}{\varepsilon} \right)} d\varepsilon \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varepsilon_0} \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{\varepsilon}} d\varepsilon = \sqrt{2K\varepsilon_0} = \\ &= 2 \left[\left(\frac{\Lambda^2}{M^2} (1 - e^{-\Lambda})(1 + \Lambda)^2 + 2 \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} (u - \lambda)^2 e^{-\lambda} e^{-u} d\lambda du + 2e^{-\Lambda} \int_{\Lambda}^{\infty} (2u)^2 e^{-u} du \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{\Lambda^2}{M^2} (1 - e^{-\Lambda}) + \int_{\Lambda}^{\infty} \int_{\Lambda}^{\infty} (u - \lambda)^2 e^{-\lambda} e^{-u} d\lambda du \right) \right]^{1/4} \end{aligned}$$

Розв'язавши відповідні невластні інтеграли, матимемо

$$\begin{aligned} I(\varepsilon_0) &\leq \frac{2}{M} \left[(\Lambda^2(1 - e^{-\Lambda})(1 + \Lambda)^2 + 4M^2 e^{-2\Lambda}(2\Lambda^2 + 4\Lambda + 5)) \times \right. \\ &\quad \left. \times (\Lambda^2(1 - e^{-\Lambda}) + 2M^2 e^{-2\Lambda}) \right]^{1/4}. \end{aligned}$$

Далі розв'язуємо нерівність (7) відносно M . При $\delta = 0.1$, $\beta = 0.1$, $\Lambda = 50$ отримаємо $M = 61940$.

Підставляючи число M у модель (1) і комп'ютерно моделюючи випадкові величини η_{k1} , η_{k2} , ζ_k при $k = \bar{0}, M$, одержимо графік (мал.1).

Висновок. Маючи оцінки субгауссового стандарту, одержані у теоремах 1 і 2, та використовуючи ентропійні характеристики випадкових процесів комп'ютерно змодельовано гауссовий стаціонарний випадковий процес з заданою точністю та надійністю в $C([0, T])$.

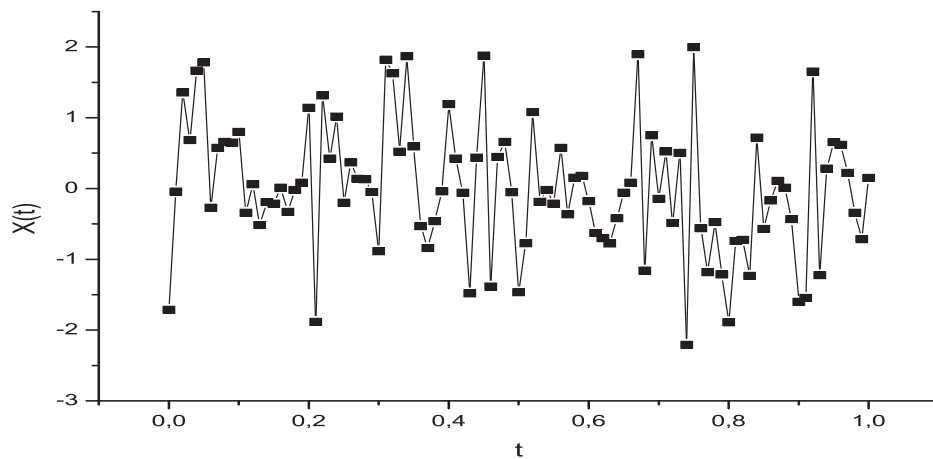


Рис. 1. Загальна модель гауссового стаціонарного випадкового процесу з спектральною функцією $F(\lambda) = 1 - e^{-\lambda}$.

Список використаної літератури

1. *Buldygin V.V and Kozachenko Yu.V.* Metric Characterization of Random Variables and Random processes. – Rhode: American Mathematical Society.– 2000.
2. *Козаченко Ю.В. Пашко А.О.* Моделювання випадкових процесів. – К: Київський університет.– 1999.– 223с.
3. *Ермаков С.М., Михайлов Г.А.* Курс статистического моделирования – Москва, “Наука”, 1982. – 184с.

Одержано 15.04.2015