

УДК 512.44

В. Б. Трошкі (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

## ВИКОРИСТАННЯ МАТРИЦЬ З ВИПАДКОВИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ В СТИСКАЮЧОМУ ЗОНДУВАННІ

In this paper we showed that random matrices, whose entries are from some Orlicz space  $L_U(\Omega)$ , satisfy the Restricted Isometry Property, which is one of the basic concepts in the theory of compressive sensing.

В даній роботі встановлено, що матриці елементи яких належать певним просторам Орліча  $L_U(\Omega)$  задовільняють обмеженим властивостям ізометрії, що є одним з основних понять в стискаючому зондуванні.

### Вступ

Випадкові матриці широко використовуються в стискаючому зондуванні для кодування вектора  $x \in R^N$ , який ми отримали внаслідок вимірювання  $y = Ax$ , де  $A$  - це  $n \times N$  випадкова матриця норма кожного стовпця якої дорівнює одиниці. Початки дана теорія бере в роботах Кашина [1], Горнаєва і Глускіна [2], однак більш стрімкий та сучасний її розвиток почався з робіт Донаго [3].

Будемо казати, що матриця  $A$  задовільняє обмеженим властивостям ізометрії порядку  $K$  якщо існує  $\delta \in (0; 1)$  таке, що для довільного  $x \in \Sigma_K$  виконується  $(1 - \delta)\|x\|_2^2 \leq \|Ax\|_2^2 \leq (1 + \delta)\|x\|_2^2$ , де  $\Sigma_K$  - це множина всіх векторів з  $R^N$ , які містять не більше ніж  $K$  ненульових координат.

На даний час доведено, що матриці з гауссовим, субгауссовим та строго субгауссовими елементами задовільняють обмежені властивості ізометрії (див. [4] та [5]). В роботі [6] було встановлено обмежені властивості ізометрії для матриць елементами яких є випадкові величини з просторів Орліча  $L_{U_{1\alpha}}(\Omega)$ , де

$$U_{1\alpha}(x) = \begin{cases} \left(\frac{e\alpha}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} x^2, & \text{при } |x| \leq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \\ \exp\{|x|^\alpha\}, & \text{при } |x| > \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \end{cases} \quad \text{коли } 0 < \alpha < 1, \quad (1)$$

В даній роботі розглянутий простір Орліча  $L_{U_\alpha}(\Omega)$ , де  $U_\alpha(x) = \exp\{|x|^\alpha\} - 1$  при  $1 < \alpha \leq 2$  та доведено, що матриці з елементами з цього простору задовільняють обмеженим властивостям ізометрії.

### Необхідні відомості

**Означення 1.** [7] Неперервна парна опукла функція  $U = \{U(x), x \in \mathbb{R}\}$  називається  $C$ -функцією Орліча, якщо  $U(0) = 0$  та  $U(x)$  монотонно зростає при  $x > 0$ .

**Означення 2.** [7] Нехай  $U$  - довільна  $C$ -функція. Простором Орліча випадкових величин  $L_U(\Omega)$  називається сім'я випадкових величин, що для кожної  $\xi \in L_U(\Omega)$  існує така константа  $r_\xi > 0$ , що

$$\mathbf{E}U\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) < \infty.$$

Простір Орліча - це простір Банаха з нормою

$$\|\xi\|_U = \inf \left\{ r > 0; \mathbf{E}U\left(\frac{\xi}{r}\right) \leq 1 \right\}.$$

**Означення 3.** Для простору Орліча  $L_U(\Omega)$  виконується умова **H**, якщо для будь-яких центрованих незалежних випадкових величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  з простору  $L_U(\Omega)$  справедлива нерівність:

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_U^2 \leq C_U \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_U^2.$$

де  $C_U$  – деяка абсолютна константа.

Позначимо  $L_{U_\alpha}(\Omega)$  – це простір Орліча, що породжений функцією  $U_\alpha(x)$ . Нехай  $U_{1\alpha}(x) = \exp\{|x|^\alpha\}$ ,  $1/2 < \alpha \leq 1$ .  $S_{U_{1\alpha}}(\Omega)$  – сім'я таких випадкових величин  $\xi$ , що існує  $r$  при якому  $EU_{1\alpha}\left(\frac{\xi}{r}\right) < \infty$ . Розглянемо функціонал

$$\ll \xi \gg_{U_{1\alpha}} = \inf \left\{ r > 0; EU_{1\alpha}\left(\frac{\xi}{r}\right) \leq 2 \right\}. \tag{2}$$

**Зауваження 1.** В роботі [8] було доведено, що сім'я  $S_{U_{1\alpha}}(\Omega)$  еквівалентна простору  $L_{U_{1\alpha}}(\Omega)$  та мають місце наступні нерівності

$$\|\xi\|_{U_\alpha} \leq (e^{2/\alpha+2}) \ll \xi \gg_{U_{1\alpha}};$$

$$\ll \xi \gg_{U_{1\alpha}} \leq \|\xi\|_{U_\alpha} (e^{2/\alpha} + 1)^{1/\alpha},$$

тому на далі будемо розглядати саме простір  $L_{U_{1\alpha}}(\Omega)$ .

**Лема 1.** [9] Для простору Орліча  $L_{U_\alpha}(\Omega)$ , де  $U_\alpha(x)$  задана в (1) справджується умова **H** зі сталою

$$C_{\psi,\alpha} = 4 \cdot 9^{\frac{1}{\alpha}} \left( \frac{e^{2/\alpha+2} \left(1 + \frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/\alpha}}{\frac{1}{2^{1/\alpha}} (e^{2/\alpha} + 1)^{-1/\alpha} \alpha^{1/\alpha}} \right)^2.$$

Наступна лема була доведена в роботі [6] для випадку коли  $0 < \alpha \leq 1$  для випадку  $1 < \alpha \leq 2$  доведення аналогічне, тому тут воно опущене.

**Лема 2.** [6] Нехай для симетричної випадкової величини  $\xi$  виконується при  $D > 0, x > 0$

$$P\{|\xi| > x\} \leq R \exp\left\{-\frac{x^\alpha}{D}\right\}, 1 < \alpha \leq 2,$$

$R$  – це деяка стала. Тоді для випадкової величини  $\eta = \xi^2 - E\xi^2$  буде справджуватись:

$$P\{|\eta| > x\} \leq a \exp\left\{-\frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{D}\right\}, \tag{3}$$

де  $a = R \left(1 + \exp\left\{\left(\frac{8R}{\alpha} \Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\}\right)$ .

**Лема 3.** [10, §15] Нехай  $B_n$  – це одинична сфера в  $(R^n, \|\cdot\|^*)$ , де  $\|\cdot\|^*$  – довільна норма. Тоді для довільного  $\varepsilon > 0$  існує множина  $Q_\varepsilon \subset B_n$ , що  $\#(Q_\varepsilon) \leq \left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^n$ , де  $\#(Q_\varepsilon)$  – це число елементів в  $Q_\varepsilon$  і для довільного  $b \in B_n$  існує таке  $q \in Q_\varepsilon$ , що  $\|b - q\|^* \leq \varepsilon$ .

### Обмежені властивості ізометрії

**Теорема 1.** Нехай  $A$  це матриця, що містить  $N$  стовпців і  $n$  рядків,  $n \leq N$ ,  $a_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n}}\xi_{ij}$ , де  $\xi_{ij} \in L_{U_\alpha}(\Omega)$ ,  $\xi_{ij}$  – незалежні, симетричні, однаково розподілені випадкові величини. Нехай  $x \in \mathbf{R}^N$  та для всіх  $i$  та  $j$ ,  $E\xi_{ij}^2 = b$ . Тоді для довільного  $\varepsilon > 0$

$$P\{|\|Ax\|_2^2 - b\|x\|_2^2| > \varepsilon\|x\|_2^2\} \leq 2 \exp\left\{-\frac{n^{\frac{\alpha}{4}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}{(C_1 C_{\psi,\alpha} g n)^{\frac{\alpha}{4}} \sqrt{(1+a)}}\right\},$$

де  $a = R\left(1 + \exp\left\{\left(\frac{8R}{\alpha}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\}\right)$  – це стала з лемми 2,  $C_{\psi,\alpha}$  визначена в лемі 1,  $g = \ll \xi_{ij} \gg_{U_{1\alpha}}^2$ ,  $C_1$  – це деяка стала.

**Доведення.** Не зменшуючи загальності можна покласти  $\|x\|_2^2 = 1$ . Тоді для довільного  $\varepsilon > 0$  буде справджуватись

$$\begin{aligned} P\{|\|Ax\|_2^2 - b\|x\|_2^2| > \varepsilon\|x\|_2^2\} &= P\left\{\left|\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^N x_j a_{ij}\right)^2 - b \sum_{j=1}^N x_j^2\right| > \varepsilon\right\} = \\ &= P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^N x_j \xi_{ij}\right)^2 - b \sum_{j=1}^N x_j^2\right| > \varepsilon\right\} = \\ &= P\left\{\left|\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^N x_j \xi_{ij}\right)^2 - nb \sum_{j=1}^N x_j^2\right| > n\varepsilon\right\}. \end{aligned}$$

Оскільки  $b = E\xi_{ij}^2$ , то

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^N x_j \xi_{ij}\right)^2 - \sum_{i=1}^n E\left(\sum_{j=1}^N x_j^2 \xi_{ij}^2\right)\right| > n\varepsilon\right\} &= \\ = P\left\{\left|\sum_{i=1}^n \left(\left(\sum_{j=1}^N x_j \xi_{ij}\right)^2 - E\left(\sum_{j=1}^N x_j \xi_{ij}\right)^2\right)\right| > n\varepsilon\right\}. \end{aligned}$$

Нехай  $\theta_i = \sum_{j=1}^N x_j \xi_{ij}$ . Оскільки простір  $L_{U_\alpha}(\Omega)$  є банаховим, то  $\theta_i \in L_{U_\alpha}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , а тому справджується наступна нерівність

$$P\{|\theta_i| > \varepsilon\} \leq 2 \exp\left\{-\left(\frac{\varepsilon}{\ll \theta_i \gg_{U_{1\alpha}}}\right)^\alpha\right\}.$$

Тоді, згідно лемми 2, для  $\theta_i^2 - E\theta_i^2$  має місце нерівність (3).

Нехай  $\zeta = \sum_{i=1}^n (\theta_i^2 - E\theta_i^2)$ . Оскільки простір Орліча  $L_{U_{1\alpha}}(\Omega)$  є банаховим простором, то  $\zeta \in L_{U_{1\alpha}}(\Omega)$  і для цього простору виконується умова **H** зі сталою  $C_{\psi,\alpha}$  (див. лему 1), а отже

$$P\{|\|Ax\|_2^2 - b\|x\|_2^2| > \varepsilon\} = P\{|\zeta| > n\varepsilon\} \leq 2 \exp\left\{-\left(\frac{n\varepsilon}{\ll \zeta \gg_{U_{1\alpha}}}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\},$$

$$\begin{aligned} \ll \zeta \gg_{U_{1\alpha}}^2 &= \ll \sum_{i=1}^n (\theta_i^2 - E\theta_i^2) \gg_{U_{1\alpha}}^2 \leq (e^{2/\alpha} + 1)^{2/\alpha} \sum_{i=1}^n \|\theta_i^2 - E\theta_i^2\|_{U_{1\alpha}}^2 \leq \\ &\leq (e^{2/\alpha} + 1)^{2/\alpha} C_{\psi,\alpha} \sum_{i=1}^n \|\theta_i^2 - E\theta_i^2\|_{U_{1\alpha}}^2. \end{aligned}$$

З теореми 3.4 книги [7] та леми 2 випливає наступна нерівність  $\|\theta_i^2 - E\theta_i^2\|_{U_{1\alpha}} \leq (1+a)^{\frac{1}{\alpha}} \|\theta_i\|_{U_\alpha}$ . А тоді з наслідку 5.1 та теореми 8.1 роботи [11] випливає, що для простору  $L_{U_\alpha}(\Omega)$  виконується умова зі сталою  $C_1$ , тому

$$\|\theta_i\|_{U_\alpha}^2 = \left\| \sum_{j=1}^N x_j \xi_{ij} \right\|_{U_\alpha}^2 \leq C_1 \sum_{j=1}^N x_j^2 \|\xi_{ij}\|_{U_\alpha}^2 = C_1 g,$$

де  $g = \|\xi_{ij}\|_{U_\alpha}^2$ .

Тоді  $\|\theta_i^2 - E\theta_i^2\|_{U_{1\alpha}} \leq (1+a)^{\frac{2}{\alpha}} \sqrt{g \cdot C_1}$ , а тому  $\ll \zeta \gg_{U_{1\alpha}}^2 \leq C_1 C_{\psi,\alpha} (1+a)^{\frac{2}{\alpha}} gn$ , звідси  $\ll \zeta \gg_{U_{1\frac{\alpha}{2}}} \leq \left( C_1 C_{\psi,\alpha} (1+a)^{\frac{2}{\alpha}} gn \right)^{\frac{1}{2}}$ .

Отже,

$$P\{|\zeta| > n\varepsilon\} \leq 2 \exp \left\{ -\frac{(n\varepsilon)^{\frac{\alpha}{2}}}{(C_1 C_{\psi,\alpha} (1+a)^{\frac{2}{\alpha}} gn)^{\frac{\alpha}{4}}} \right\} = 2 \exp \left\{ -\frac{n^{\frac{\alpha}{4}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}{(C_1 C_{\psi,\alpha} gn)^{\frac{\alpha}{4}} \sqrt{1+a}} \right\}.$$

**Лема 4.** Нехай  $A$  це матриця, що містить  $N$  стовпців і  $n$  рядків,  $n \leq N$ ,  $a_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n}} \xi_{ij}$ , де  $\xi_{ij} \in S_{U_{1\alpha}}(\Omega)$ ,  $\xi_{ij}$  – незалежні, симетричні, однаково розподілені випадкові величини. Нехай  $x \in \mathbf{R}^N$  та для всіх  $i$  та  $j$ ,  $E\xi_{ij}^2 = 1$ . Тоді для довільної множини індексів  $T$ , вимірності  $K < n$ ,  $X_T \subset \mathbf{R}^N$  і довільного  $\varepsilon \in (0; 1)$  для всіх  $x \in X_T$  справджується

$$P\{\|\|Ax\|_2^2 - b\|x\|_2^2\| > \varepsilon\|x\|_2^2\} \leq 2 \left(\frac{12}{\varepsilon}\right)^K \exp \left\{ -\frac{n^{\frac{\alpha}{4}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}{(C_1 C_{\psi,\alpha} gn)^{\frac{\alpha}{4}} \sqrt{1+a}} \right\},$$

де  $a = R \left( 1 + \exp \left\{ \left( \frac{8R}{\alpha} \Gamma \left( \frac{2}{\alpha} \right) \right)^{\frac{\alpha}{2}} \right\} \right)$  – це стала з леми 2,  $C_{\psi,\alpha}$  визначена в лемі 1,  $g = \ll \xi_{ij} \gg_{U_{1\alpha}}^2$ ,  $C_1$  – це деяка стала.

**Доведення.** Не зменшуючи загальності будемо вважати, що  $\|x\|_2^2 = 1$ . Це можливо, оскільки  $Ax$  є лінійним перетворенням. Нехай  $A_q = \|\|Aq\|_2^2 - \|q\|_2^2\|$ ,  $q \in \mathbf{R}^N$ . З леми 3 випливає, що ми можемо вибрати скінченну множину точок  $Q_T \subseteq X_T$ ,  $\#(Q_T) \leq \left(\frac{12}{\varepsilon}\right)^K$  таку, що  $\|x - q\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{4}$ , для всіх  $q \in Q_T$  і  $x \in X_T$ . З теореми 1 та з властивостей ймовірності випливає, що всіх  $q \in Q_T$  і  $0 < \varepsilon < 1$  виконуються наступні співвідношення

$$\begin{aligned} P \left\{ \overline{\bigcap_{q \in Q_T} \{q : A_q < \varepsilon\}} \right\} &= P \left\{ \bigcup_{q \in Q_T} \overline{\{q : A_q < \varepsilon\}} \right\} = P \left\{ \bigcup_{q \in Q_T} \{q : A_q > \varepsilon\} \right\} \leq \\ &\leq \sum_{q \in Q_T} P\{\{q : A_q < \varepsilon\}\} \leq 2 \left(\frac{12}{\varepsilon}\right)^K \exp \left\{ -\frac{n^{\frac{\alpha}{4}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}{(C_1 C_{\psi,\alpha} gn)^{\frac{\alpha}{4}} \sqrt{1+a}} \right\}. \end{aligned}$$

Тоді

$$P \left\{ \bigcap_{q \in Q_T} \{q : A_q < \varepsilon\} \right\} = 1 - P \left\{ \bigcup_{q \in Q_T} \overline{\{q : A_q < \varepsilon\}} \right\} \geq \\ \geq 1 - 2 \left( \frac{12}{\varepsilon} \right)^K \exp \left\{ - \frac{n^{\frac{\alpha}{4}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}{(C_1 C_{\psi, \alpha} g n)^{\frac{\alpha}{4}} \sqrt{1+a}} \right\}.$$

Виберемо  $\min_{q \in Q_T} \|x - q\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{4}$ . Оскільки виконується  $\|Aq\|_2^2 \leq (1 + \varepsilon) \|q\|_2^2$ , то

$$\|Aq\|_2 \leq \sqrt{1 + \varepsilon} \|q\|_2. \quad (4)$$

Нехай  $\varepsilon_1$  – це таке найменше число, що

$$\|Ax\|_2 \leq (1 + \varepsilon_1) \|x\|_2. \quad (5)$$

Має місце нерівність  $\|Ax\|_2 \leq \|Aq\|_2 + \|A(x - q)\|_2$ . З нерівності (4), при  $\|q\|_2 = 1$  випливає, що  $\|Aq\|_2 \leq \sqrt{1 + \varepsilon}$ . З (5) матимемо, що  $\|A(x - q)\|_2 \leq (1 + \varepsilon_1) \|x - q\|_2 \leq (1 + \varepsilon_1) \frac{\varepsilon}{4}$ . Тоді

$$\|Ax\|_2 \leq \sqrt{1 + \varepsilon} + (1 + \varepsilon_1) \frac{\varepsilon}{4} \leq 1 + \varepsilon + (1 + \varepsilon_1) \frac{\varepsilon}{4}.$$

Оскільки  $\varepsilon_1$  – найменше, то  $\varepsilon_1 \leq \varepsilon + (1 + \varepsilon_1) \frac{\varepsilon}{4}$ . Звідси  $\varepsilon_1 \leq \frac{3\varepsilon}{4 - \varepsilon}$ . Врахувавши, що  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  отримаємо, що  $\frac{3}{4 - \varepsilon} \leq 1$ , а тому  $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$ .

Аналогічно можна показати, що  $\|Ax\|_2 \geq 1 - \varepsilon$  для всіх  $x \in X_T$ .

**Теорема 2.** Нехай  $A$  це матриця, що містить  $N$  стовпців і  $n$  рядків,  $n \leq N$ ,  $a_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n}} \xi_{ij}$ , де  $\xi_{ij} \in SU_{1\alpha}(\Omega)$ ,  $\xi_{ij}$  – незалежні, симетричні, однаково розподілені випадкові величини. Нехай  $x \in \mathbf{R}^N$ , та для всіх  $i$  та  $j$ ,  $E\xi_{ij}^2 = 1$ . Тоді для всіх  $x \in \Sigma_K$  справджується

$$P \{ |\|Ax\|_2^2 - \|x\|_2^2| \geq \varepsilon \|x\|_2^2 \} \leq \\ \leq 2 \exp \left\{ K \ln \left( \frac{12eN}{\varepsilon K} \right) - \frac{n^{\frac{\alpha}{4}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}{(C_1 C_{\psi, \alpha} g n)^{\frac{\alpha}{4}} \sqrt{1+a}} \right\}$$

для довільного  $K$ ,  $1 \leq K < \frac{(\sqrt{n\varepsilon})^{\frac{\alpha}{2}}}{(C_1 C_{\psi, \alpha} g n)^{\frac{\alpha}{4}} \sqrt{(1+a) \ln \left( \frac{12eN}{\varepsilon K} \right)}}$  і  $0 < \varepsilon < 1$ , де  $C_{\psi, \alpha}$  визначена в лемі 1,  $g = \ll \xi_{ij} \gg_{U_{1\alpha}}^2$ ,  $a = R \left( 1 + \exp \left\{ \left( \frac{8R}{\alpha} \Gamma \left( \frac{2}{\alpha} \right) \right)^{\frac{\alpha}{2}} \right\} \right)$  – це стала з лемі 2,  $C_1$  – це деяка стала.

**Доведення.** З лемі 4 випливає, що для довільного  $x \in X_T$ , де  $T$  – це множина індексів вимірності  $K < n$ ,  $X_T \subset \mathbf{R}^N$  буде справедливим

$$P \{ |\|Ax\|_2^2 - \|x\|_2^2| \geq \varepsilon \|x\|_2^2 \} \leq 2 \left( \frac{12}{\varepsilon} \right)^K \exp \left\{ - \frac{n^{\frac{\alpha}{4}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}{(C_1 C_{\psi, \alpha} g n)^{\frac{\alpha}{4}} \sqrt{1+a}} \right\}.$$

Врахувавши, що  $C_N^K \leq \left( \frac{eN}{K} \right)^K$  отримаємо, що для довільного  $x \in \Sigma_K$ , буде справедливим

$$P \{ |\|Ax\|_2^2 - \|x\|_2^2| \geq \varepsilon \|x\|_2^2 \} \leq 2 \left( \frac{eN}{K} \right)^K 2 \left( \frac{12}{\varepsilon} \right)^K \exp \left\{ - \frac{n^{\frac{\alpha}{4}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}{(C_1 C_{\psi, \alpha} g n)^{\frac{\alpha}{4}} \sqrt{1+a}} \right\} = \\ = 2 \exp \left\{ K \ln \left( \frac{12eN}{\varepsilon K} \right) - \frac{n^{\frac{\alpha}{4}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}{(C_1 C_{\psi, \alpha} g n)^{\frac{\alpha}{4}} \sqrt{1+a}} \right\}.$$

Звідси випливає, що при  $1 \leq K < \frac{(\sqrt{n\varepsilon})^{\frac{\alpha}{2}}}{(C_{S, \frac{\alpha}{2}} \tilde{C}_{Sg})^{\frac{\alpha}{4}} (1+a) \ln(\frac{12eN}{\varepsilon K})}$  і  $0 < \varepsilon < 1$  матриця  $A$  задовільняє обмеженим властивостям ізометрії з ймовірністю більшою за

$$p_n = 1 - 2 \exp \left\{ K \ln \left( \frac{12eN}{\varepsilon K} \right) - \frac{n^{\frac{\alpha}{4}} \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}{(C_1 C_{\psi, \alpha} g n)^{\frac{\alpha}{4}} \sqrt{1+a}} \right\}.$$

Зауважимо також, що  $p_n \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ .

### Висновки

В даній роботі запропоновано в якості матриці вимірювань в стискаючому зондуванні використовувати матриці, елементами яких є випадкові величини з простору Орліча  $L_{U_\alpha}(\Omega)$ , де  $U_\alpha(x) = \exp\{|x|^\alpha\} - 1$  при  $1 < \alpha \leq 2$ . Також доведено, що такі матриці задовільняють обмеженим властивостям ізометрії.

### Список використаної літератури

1. B. Kashin, *The widths of certain finite dimensional sets and classes of smooth functions*, Izvestia Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. **41** (1977), 334–351.
2. A. Garnaev, E. Gluskin, *The widths of a Euclidean ball*, Dokl. AN SSSR **277** (1984), 1048–1052.
3. D. Donoho, *Compressed sensing*, IEEE Trans. Inf. Theory **52** (2006), №4, 1289–1306.
4. R. Baraniuk, M. Davenport, R. DeVore, M. Wakin *A Simple Proof of the Restricted Isometry Property for Random Matrices*, Business Media (2008).
5. R. DeVore, G. Petrova, P. Wojtaszczyk, *Instance-optimality in probability with an  $l_1$ -minimization decoder*, Applied and Computational Harmonic Analysis **27** (2009), 275–288.
6. Трошкі В.Б. *Обмежені властивості ізометрії для матриць, елементи яких є випадкові величини з певних просторів Орліча  $L_U(\Omega)$*  Теорія ймовір. та матем. статист. – 2014. – Вип. 91. – С. 179-189.
7. V. Buldygin, Yu. Kozachenko *Metric characterization of random variables and random processes*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
8. Ю. Козаченко, Ю. Млавець *Простори Банаха випадкових величин  $F_\psi(\Omega)$* , Теорія ймовірностей та математична статистика **86** (2012), 92–107.
9. Ю. Млавець, *Зв'язок просторів Орліча випадкових величин з просторами  $F_\psi(\Omega)$* , Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. математ. і інформ. **25** (2014), №1, 77-84.
10. G. Lorentz, M. von Golitschek, Yu. Makovoz *Constructive Approximation: Advanced Problems*, Grundlehren Math. Wiss., Springer-Verlag, Berlin (1996).
11. R. Guiliano Antonini, Yu. Kozachenko, T. Nikitina, *Spaces of  $\varphi$ -subgaussian random variables*, *Memorie di Matematica e Applicazioni* XXVII (1), 95–124 (2003).

Одержано 18.01.2015