

УДК 517.95

О. Ю. Чмир (Львівський держ. ун-т безпеки життєдіяльності)

**ХАРАКТЕР СТЕПЕНЕВИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ РОЗВ'ЯЗКУ  
ПЕРШОЇ УЗАГАЛЬНЕНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ  
РІВНЯННЯ  $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = |u|^{\beta_0} t^\gamma$**

Using the Schauder method the character power singularities of the solution the first generalized boundary value problem for equation  $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = |u|^{\beta_0} t^\gamma$  near boundary of domain are investigated. The sufficient conditions of solvability of the problem are obtained.

Використовуючи принцип Шаудера, досліджено характер степеневих особливостей розв'язку першої узагальненої крайової задачі для рівняння  $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = |u|^{\beta_0} t^\gamma$  біля межі області. Встановлено достатні умови розв'язності цієї задачі.

**Вступ.** В багатьох працях наведено результати про існування та поведінку розв'язків лінійних та півлінійних еліптичних та параболічних рівнянь на межі області, коли функції задані на межі області є узагальненими (див., наприклад, [1] та бібліографію, а також [2, 3]).

Використовуючи дослідження проведені у статті [4] для нелінійних еліптичних крайових задач при заданих на межі функціях із сильними степеневими особливостями, продовжено вивчення нелінійних крайових задач для рівняння теплопровідності в узагальнених функціях. Так, зокрема, у статті [5] досліджено характер степеневих особливостей розв'язку першої узагальненої крайової задачі для рівняння теплопровідності у класі узагальнених функцій.

У працях [6]- [8], досліджується існування розв'язків крайових задач для напівлінійних параболічних рівнянь та систем рівнянь вигляду  $(u_i)_t - \Delta u_i = f(u_1, \dots, u_n)$  як локальних ([6]), так і глобальних ([7]), їх властивості.

У даній статті розглянуто першу узагальнену крайову задачу для рівняння  $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = |u|^{\beta_0} t^\gamma$ , де  $\beta_0 \in (0, 1)$ ,  $\gamma \in (-1, 0)$ , коли задані на межі функції є узагальненими певного порядку сингулярності. Доведено існування її розв'язку у певному класі функцій із сильними степеневими особливостями, залежному від показників нелінійності у рівнянні та порядків сингулярностей узагальнених функцій на межі області. Зокрема, отримано умови зв'язку порядків сингулярностей узагальнених функцій на межі області з показниками нелінійності правої частини рівняння. Для доведення розв'язності використано метод зведення такої задачі до інтегрального рівняння у певному ваговому функційному просторі, а також застосовано теорему Шаудера про нерухому точку.

**1. Основні позначення та формулювання задачі.**

Нехай  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega$  – обмежена область в  $\mathbb{R}^n$  з межею  $S = \partial\Omega$  класу  $C^\infty$ ,  $Q = \Omega \times (0, T]$ ,  $\Sigma = S \times (0, T]$ ,  $0 < T < +\infty$ .

Використовуватимемо позначення:

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} - \text{евклідова відстань в } \mathbb{R}^n, P = (x, t), M = (y, \tau),$$

$$d(x, t; y, \tau) = \sqrt{\|x - y\|^2 + |t - \tau|} - \text{параболічна відстань в } \mathbb{R}^{n+1};$$

$$\eta - \text{мультиіндекс з компонентами } (\eta_1, \dots, \eta_n), \eta_i \in \mathbb{Z}_+, i = \overline{1, n}, |\eta| = \eta_1 + \dots + \eta_n$$

$$- \text{довжина мультиіндексу } \eta, D_x^\eta = \frac{\partial^{|\eta|}}{\partial x_1^{\eta_1} \dots \partial x_n^{\eta_n}}.$$

Нехай  $\varepsilon_0 > 0$  – таке задане число, що паралельна до  $S$  поверхня  $S_{\varepsilon_0}$  є класу  $C^\infty$  та надалі вважатимемо, що  $\varepsilon_0 \leq 1$ . Через  $\tilde{\varrho}(\sigma)$  позначатимемо нескінченно диференційовну невід'ємну функцію, яка має порядок  $\sigma$  при  $\sigma \rightarrow 0$ .

Нехай  $\varrho_1(x)$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ , – нескінченно диференційовна невід'ємна функція, яка додатна в  $\Omega$ , має порядок відстані  $d(x)$  від точки  $x$  до  $S$  біля  $S$  та  $\varrho_1(x) \leq 1$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ , наприклад  $\varrho_1(x) = \begin{cases} \tilde{\varrho}(d(x)), & d(x) \leq \frac{\varepsilon_0}{2}, \\ 1, & d(x) \geq \varepsilon_0; \end{cases}$

функція  $\varrho_2(t) = \begin{cases} \tilde{\varrho}(t), & t \leq \frac{\varepsilon_0}{2}, \\ 1, & t \geq \varepsilon_0, \end{cases}$  володіє властивостями функції  $\tilde{\varrho}(\sigma)$  і, крім того,  $0 < \varrho_2(t) \leq 1$ ,  $t \in (0, T]$ .

Нехай  $\varrho(x, t) = \begin{cases} \min[\varrho_1(x), \sqrt{\varrho_2(t)}], & d(x) < \varepsilon_0, \text{ або } t < \varepsilon_0, \\ 1, & d(x) \geq \varepsilon_0, t \geq \varepsilon_0, \end{cases}$

$0 \leq \varrho(x, t) \leq 1$ ,  $(x, t) \in \bar{Q}$ , звідки

$\varrho(x, t) = \begin{cases} \varrho_1(x) & \text{при } d(x) \rightarrow 0, \\ \sqrt{\varrho_2(t)} & \text{при } t \rightarrow 0, \\ 1, & \text{всередині області } Q, \text{ а саме при } d(x) \geq \varepsilon_0 \text{ та } t \geq \varepsilon_0. \end{cases}$

Далі використовуватимемо, що

$$M_1 \sigma \leq \tilde{\varrho}(\sigma) \leq M_2 \sigma, \text{ при } \sigma \leq \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad (1)$$

де  $M_1, M_2$  – додатні числа.

Нехай  $Q^1 = \{(x, t) \in Q : \varrho(x, t) = \varrho_1(x) \text{ та } d(x) \leq \frac{\varepsilon_0}{2}\}$ ,  
 $Q^2 = \{(x, t) \in Q : \varrho(x, t) = \sqrt{\varrho_2(t)} \text{ та } t \leq \frac{\varepsilon_0}{2}\}$ ,  $Q^3 = Q \setminus \{Q^1 \cup Q^2\}$ .

Нехай  $D(\bar{Q}) = C^\infty(\bar{Q})$ ,  $D(\bar{\Sigma}) = C^\infty(\bar{\Sigma})$ ,  $D(\bar{\Omega}) = C^\infty(\bar{\Omega})$ ;

$D^0(\bar{Q}) = \{\varphi \in D(\bar{Q}) : \frac{\partial^k}{\partial t^k} \varphi|_{t=T} = 0, k = 0, 1, \dots\}$ ,

$D^0(\bar{\Sigma}) = \{\varphi \in D(\bar{\Sigma}) : \frac{\partial^k}{\partial t^k} \varphi|_{t=T} = 0, k = 0, 1, \dots\}$ ,

$D_0(\bar{\Omega}) = \{\varphi \in D(\bar{\Omega}) : \varphi|_S = 0\}$ ,  $\nu$  – орт внутрішньої нормалі до  $S$ .

Надалі позначатимемо через  $(D^0(\bar{\Sigma}))'$ ,  $(D_0(\bar{\Omega}))'$  – простори лінійних неперервних функціоналів відповідно на просторах функцій  $D^0(\bar{\Sigma})$ ,  $D_0(\bar{\Omega})$ , через  $(\varphi, F)_1$  – значення узагальненої функції  $F \in (D^0(\bar{\Sigma}))'$  на основній функції  $\varphi \in D^0(\bar{\Sigma})$ , через  $(\varphi, F)_2$  – значення  $F \in (D_0(\bar{\Omega}))'$  на  $\varphi \in D_0(\bar{\Omega})$ , а під  $s(F)$  розумітимемо порядок сингулярності узагальненої функції  $F$  ([9, с. 123]).

Розглянемо першу узагальнену крайову задачу

$$Lu(x, t) \equiv \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \Delta u(x, t) = f_0(x, t, u(x, t)), \quad (x, t) \in Q, \quad (2)$$

$$u|_{\Sigma} = F_1(x, t), \quad (x, t) \in \Sigma, \quad (3)$$

$$u|_{t=0} = F_2(x), \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

**Припущення 1.** *Нехай функції  $f_0$ ,  $F_1$  та  $F_2$  задовольняють умови:*

- 1) *функція  $f_0(x, t, v)$  визначена в  $Q \times (-\infty, +\infty)$ ,*
- 2)  *$F_1 \in (D^0(\bar{\Sigma}))'$ ,  $0 \leq s(F_1) \leq q_1$ ,*
- 3)  *$F_2 \in (D_0(\bar{\Omega}))'$ ,  $0 \leq s(F_2) \leq q_2$ .*

При  $k \in \mathbb{R}$  введемо функційні простори:

$X_k(\bar{Q}) = \{\psi \in D^0(\bar{Q}) : \psi(\cdot, 0) \in D_0(\bar{\Omega}), \psi|_{\bar{\Sigma}} = 0,$

$L^* \psi(x, t) = O(\varrho^k(x, t)), \varrho(x, t) \rightarrow 0\}$ ,

де  $L^*$  – оператор, формально спряжений до  $L$ ,  $L^*v = -(\frac{\partial v}{\partial t} + \Delta^*v)$ ,  
 $\mathcal{M}_k(Q) = \{v : \|v\|_k = \int_Q \varrho^k(x, t) |v(x, t)| dxdt < +\infty\}$ .

Нехай  $\mathcal{M}_{k,C}(Q) = \{v \in \mathcal{M}_k(Q) : \|v\|_k \leq C\}$  – куля радіуса  $C$  у просторі  $\mathcal{M}_k(Q)$ .

Припустимо, що  $k > k_0 = \max\{q_1; q_2 - 1\} + n$ . Зауважимо, що  $k_0 \geq n - 1$  при  $q_1 \geq 0, q_2 \geq 0$ .

**Означення 1.** Розв'язком задачі (2)-(4) називається функція  $u \in \mathcal{M}_k(Q)$  така, що

$$\int_Q L^* \psi \cdot u dxdt = \int_Q f_0(x, t, u(x, t)) \cdot \psi(x, t) dxdt + \left(\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial \nu}, F_1(x, t)\right)_1 + \\ + (\psi(\cdot, 0), F_2(\cdot))_2 \quad \text{для довільної } \psi \in X_k(\bar{Q}).$$

Позначимо через  $G(x, t; y, \tau)$  функцію Гріна першої крайової задачі для рівняння теплопровідності, яка визначена в точках  $(x, t; y, \tau) \in \bar{Q} \times \bar{Q}$  при  $(x, t) \neq (y, \tau)$ . Існування її та ряд властивостей одержуємо із [10, 11]. З цих результатів випливає, що

- 1)  $G(x, t; y, \tau) = 0$  при  $t < \tau$ ;
- 2) для будь-яких мультиіндексів  $\eta, \eta_0$   
 $|\frac{\partial^{\eta_0}}{\partial t^{\eta_0}} D_x^\eta G(x, t; y, \tau)| \leq \hat{C}_{\eta, \eta_0} [d(x, t; y, \tau)]^{-n-|\eta|-2\eta_0}$ , де  $\hat{C}_{\eta, \eta_0}$  – додатні сталі;
- 3) для довільних  $\eta, |\eta| < 2$ , існують додатні сталі  $\hat{C}'_\eta$  такі, що  
 $\int_Q |D_x^\eta G(x, t; y, \tau)| dxdt \leq \hat{C}'_\eta$  для довільних  $(y, \tau) \in \bar{Q}$ .

Подібно до результатів [2, 12, 13] доводимо таку властивість функції  $G$ .

**Лема 1.** Нехай  $(x, t) \in Q, r_1 > -1, r_1 + 2r_2 > -2$ . Тоді

$$\int_Q G(x, t; y, \tau) \cdot \varrho^{r_1}(y, \tau) \cdot \tau^{r_2} dyd\tau = \begin{cases} O([\varrho_1(x)]^{r_1+1-n} + 1) & \text{при } d(x) \rightarrow 0, \\ O([\varrho_2(t)]^{\frac{r_1+2r_2+2-n}{2}} + 1) & \text{при } t \rightarrow 0, \\ O(1) & \text{всередині області } Q. \end{cases}$$

**Зауваження 1.** З теореми 2 [3] випливає, що розв'язок задачі (2)-(4) є розв'язком у просторі  $\mathcal{M}_k(Q)$  інтегрального рівняння

$$u(x, t) = \int_0^t d\tau \int_\Omega G(x, t; y, \tau) \cdot f_0(y, \tau, u(y, \tau)) dy + \left(\frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y}, F_1(y, \tau)\right)_1 + \\ + (G(x, t; y, 0), F_2(y))_2 \quad (5)$$

і навпаки.

$$\text{Позначимо } (Hv)(x, t) = \int_0^t d\tau \int_\Omega G(x, t; y, \tau) \cdot f_0(y, \tau, v(y, \tau)) dy, \\ h(x, t) = g_1(x, t) + g_2(x, t) = \left(\frac{\partial G(x, t; y, \tau)}{\partial \nu_y}, F_1(y, \tau)\right)_1 + (G(x, t; y, 0), F_2(y))_2, \\ (H_1v)(x, t) = (Hv)(x, t) + h(x, t).$$

Рівняння (5) набуде вигляду  $u(x, t) = (Hu)(x, t) + h(x, t)$ .

Використовуючи теорему Шаудера [14, с. 291], у [5] показано існування сталої  $C > 0$  такої, що оператор  $H_1$  відображає  $\mathcal{M}_{k,C}(Q)$  в себе, є неперервним оператором на  $\mathcal{M}_{k,C}(Q)$  та доведено

**Теорема 1.** Нехай виконуються припущення 1,  $k > k_0$ , функція  $f_0$  задовольняє умови: існують сталі  $\zeta \in (0, 1)$ ,  $M_3 > 0$ ,  $M_4 > 0$ ,  $C_0 > 0$  такі, що для довільної сталої  $C > C_0$  та для довільних  $v, w \in \mathcal{M}_{k, C}(Q)$

$$\int_Q |f_0(y, \tau, v(y, \tau))| dy d\tau \leq M_3 \|v\|_k^\zeta, \quad (6)$$

$$\int_Q |f_0(y, \tau, v(y, \tau)) - f_0(y, \tau, w(y, \tau))| dy d\tau \leq M_4 \|v - w\|_k^\zeta. \quad (7)$$

Тоді існує розв'язок задачі (2)-(4) в просторі  $\mathcal{M}_k(Q)$ .

**Наслідок 1.** Нехай виконуються припущення 1,  $k > k_0$ ,  $f_0(x, t, v) = |v|^{\beta_0} t^\gamma$ . Тоді для всіх  $\beta_0 \in (0, \frac{1}{k+1})$ ,  $\gamma \in (-1 + \frac{\beta_0(k+2)}{2}, 0)$  існує розв'язок задачі (2)-(4) у просторі  $\mathcal{M}_k(Q)$ .

**Доведення.** Покажемо, що функція  $f_0(x, t, v) = |v|^{\beta_0} t^\gamma$  задовольняють умови теореми 1. Використовуючи нерівність Гельдера, матимемо

$$\begin{aligned} \int_Q |v(y, \tau)|^{\beta_0} \tau^\gamma dy d\tau &= \int_Q (\varrho^k(y, \tau) \cdot |v(y, \tau)|)^{\beta_0} \tau^\gamma [\varrho(y, \tau)]^{-k\beta_0} dy d\tau \leq \\ &\leq \left( \int_Q \varrho^k(y, \tau) \cdot |v(y, \tau)| dy d\tau \right)^{\beta_0} \cdot \left( \int_Q (\tau^\gamma [\varrho(y, \tau)]^{-k\beta_0})^{\frac{1}{1-\beta_0}} dy d\tau \right)^{1-\beta_0} \leq \\ &\leq \|v\|_k^{\beta_0} \left( \int_Q \tau^{\frac{\gamma}{1-\beta_0}} [\varrho(y, \tau)]^{-\frac{k\beta_0}{1-\beta_0}} dy d\tau \right)^{1-\beta_0}. \end{aligned}$$

Розглянемо  $I = \int_Q \tau^{\frac{\gamma}{1-\beta_0}} [\varrho(y, \tau)]^{-\frac{k\beta_0}{1-\beta_0}} dy d\tau$ . Відповідно до розбиття області  $Q = Q^1 \cup Q^2 \cup Q^3$  матимемо  $I = I_1 + I_2 + I_3$ , де в  $I_1$  інтегрування є за областю  $Q^1$ , в  $I_2$  – за  $Q^2$ , а в  $I_3$  – за  $Q^3$ . Розглянемо кожен інтеграл окремо.

Використовуючи властивості функції  $\varrho_1(y)$  та (1), матимемо

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{Q^1} \tau^{\frac{\gamma}{1-\beta_0}} [\varrho_1(y)]^{-\frac{k\beta_0}{1-\beta_0}} dy d\tau \leq M_1^{-\frac{k\beta_0}{1-\beta_0}} \int_{Q^1} \tau^{\frac{\gamma}{1-\beta_0}} \cdot [d(y)]^{-\frac{k\beta_0}{1-\beta_0}} dy d\tau \leq \\ &\leq C_1 \int_{Q^1} [d(y)]^{-\frac{k\beta_0}{1-\beta_0}} dy d\tau, \text{ де } C_1 - \text{ додатна стала. Інтеграл в останній рівності збі-} \\ &\text{гається при } -\frac{k\beta_0}{1-\beta_0} > -1. \end{aligned}$$

Використовуючи властивості функції  $\varrho_2(\tau)$  та (1), матимемо

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{Q^2} \tau^{\frac{\gamma}{1-\beta_0}} [\varrho_2(\tau)]^{-\frac{k\beta_0}{2(1-\beta_0)}} dy d\tau \leq M_1^{-\frac{k\beta_0}{2(1-\beta_0)}} \int_{Q^2} \tau^{\frac{\gamma}{1-\beta_0}} \cdot \tau^{-\frac{k\beta_0}{2(1-\beta_0)}} dy d\tau \leq \\ &\leq C_2 \int_{Q^2} \tau^{\frac{\gamma}{1-\beta_0} - \frac{k\beta_0}{2(1-\beta_0)}} dy d\tau, \text{ де } C_2 - \text{ додатна стала. Інтеграл в останній рівності} \\ &\text{збігається при } \frac{2\gamma - k\beta_0}{2(1-\beta_0)} > -1. \end{aligned}$$

$I_3 = \int_{Q^3} \tau^{\frac{\gamma}{1-\beta_0}} dy d\tau \leq \varepsilon_0^{\frac{\gamma}{1-\beta_0}} \int_{Q^3} dy d\tau < +\infty$ .

Таким чином, при  $\beta_0 \in (0, \frac{1}{k+1})$ ,  $\gamma \in (-1 + \frac{\beta_0(k+2)}{2}, 0)$  функція  $f_0$  задовольняє умову (6).

Використовуючи формулу  $|a^\mu - b^\mu| \leq |a - b|^\mu$  при  $a, b > 0$ ,  $\mu \in (0, 1)$  та нерівність Гельдера, оцінюємо

$$\int_Q ||v(y, \tau)|^{\beta_0} \cdot \tau^\gamma - |w(y, \tau)|^{\beta_0} \cdot \tau^\gamma| dyd\tau \leq ||v - w||_k^{\beta_0} \left( \int_Q \tau^{\frac{\gamma}{1-\beta_0}} [\varrho(y, \tau)]^{-\frac{k\beta_0}{1-\beta_0}} dyd\tau \right)^{1-\beta_0},$$

де інтеграл збігається при  $\beta_0 \in (0, \frac{1}{k+1})$ ,  $\gamma \in (-1 + \frac{\beta_0(k+2)}{2}, 0)$ . Отже, виконується умова (7).

Якщо  $\beta_0$  та  $\gamma$  відомі, то можна отримати простори  $\mathcal{M}_k(Q)$ , для яких існує розв'язок  $u \in \mathcal{M}_k(Q)$  задачі (2)-(4).

**Зауваження 2.** Нехай виконуються припущення 1 на функції  $F_1, F_2$ ,  $f_0(x, t, v) = |v|^{\beta_0} t^\gamma$ , де  $\beta_0 \in (0, \frac{1}{n+1})$ ,  $\gamma \in (\frac{n\beta_0-2(1-\beta_0)}{2}, \frac{\beta_0-1}{2}]$ . Тоді існує розв'язок задачі (2)-(4) у просторі  $\mathcal{M}_k(Q)$  при  $\max\{q_1, q_2 - 1\} + n < k < \frac{2\gamma+2(1-\beta_0)}{\beta_0}$ .

**Зауваження 3.** Нехай виконуються припущення 1 на функції  $F_1, F_2$ ,  $f_0(x, t, v) = |v|^{\beta_0} t^\gamma$ , де  $\beta_0 \in (0, \frac{1}{n+1})$ ,  $\gamma \in (\frac{\beta_0-1}{2}; 0]$ . Тоді існує розв'язок задачі (2)-(4) у просторі  $\mathcal{M}_k(Q)$  при  $\max\{q_1, q_2 - 1\} + n < k < -1 + \frac{1}{\beta_0}$ .

Використовуючи властивості узагальнених функцій скінченного порядку сингулярності [9, с. 123-134] та оцінки похідних функції Гріна, з [5], одержуємо такі леми.

**Лема 2.** Нехай виконуються припущення 1 на функції  $F_1, F_2$ ,  $k > k_0$ . Тоді

$$1) \ g_1(x, t) = \begin{cases} O([\varrho_1(x)]^{-(n+q_1+1)}) & \text{при } (x, t) \in Q^1; \\ O([\varrho_2(t)]^{-\frac{n+q_1+1}{2}}) & \text{при } (x, t) \in Q^2; \\ O(1) & \text{при } (x, t) \in Q^3; \end{cases}$$

$$g_2(x, t) = \begin{cases} O([\varrho_1(x)]^{-(n+q_2)}) & \text{при } (x, t) \in Q^1; \\ O([\varrho_2(t)]^{-\frac{n+q_2}{2}}) & \text{при } (x, t) \in Q^2; \\ O(1) & \text{при } (x, t) \in Q^3; \end{cases}$$

2)  $h \in \mathcal{M}_k(Q)$ , а саме, існує додатна стала  $M_5$  така, що  $||h||_k = M_5 < +\infty$ .

**Лема 3.** Нехай  $r \geq 0$ . Тоді для довільного  $\varepsilon > 0$  існує  $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$  таке, що для довільної підобласті  $V \subset Q$ , міра якої  $m(V)$  менша за  $\eta$ , і будь-якої точки  $(y, \tau) \in \bar{Q}$  виконується нерівність  $\int_V \varrho^r(x, t) \cdot |G(x, t; y, \tau)| dxdt < \varepsilon$ .

## 2. Характер степеневих особливостей розв'язку першої узагальненої крайової задачі для рівняння теплопровідності.

При  $\mu \in \mathbb{R}_- \cup \{0\}$  введемо функційний простір:

$$\mathcal{M}_\mu(Q, \partial Q) = \{v \in C(Q) : [\varrho(y, \tau)]^{-\mu} v(y, \tau) \in C(\bar{Q}); \quad (||v; \partial Q||_\mu = \max\{ \sup_{(y,\tau) \in \bar{Q}^1} [\varrho_1(y)]^{-\mu} |v(y, \tau)|; \sup_{(y,\tau) \in \bar{Q}^2} [\varrho_2(\tau)]^{-\frac{\mu}{2}} |v(y, \tau)|; \sup_{(y,\tau) \in \bar{Q}^3} |v(y, \tau)|\} < +\infty)\}.$$

Оскільки для  $v \in \mathcal{M}_\mu(Q, \partial Q)$  при  $k + \mu > -1$

$$||v||_k = \int_Q \varrho^k(y, \tau) |v(y, \tau)| dyd\tau \leq \left[ \int_{Q^1} \varrho_1^{k+\mu}(y) \sup_{(y,\tau) \in \bar{Q}^1} (\varrho_1^{-\mu}(y) |v(y, \tau)|) dyd\tau + \int_{Q^2} \varrho_2^{\frac{k+\mu}{2}}(\tau) \sup_{(y,\tau) \in \bar{Q}^2} (\varrho_2^{-\frac{\mu}{2}}(\tau) |v(y, \tau)|) dyd\tau + \int_{Q^3} \sup_{(y,\tau) \in \bar{Q}^3} |v(y, \tau)| dyd\tau \right] =$$

$$= \tilde{C}_1'' \int_{Q^1} [\varrho_1(y)]^{k+\mu} dyd\tau + \tilde{C}_2'' \int_{Q^2} [\varrho_2(\tau)]^{\frac{k+\mu}{2}} dyd\tau + \tilde{C}_3'' \int_{Q^3} dyd\tau \leq \hat{C} \cdot (\tilde{C}_1'' + \tilde{C}_2'' + \tilde{C}_3'') <$$

$$< +\infty, \text{ де } \hat{C} - \text{додатна стала, } \tilde{C}_i'' = \tilde{C}_i''(v) < +\infty, i = \bar{1}, \bar{3}, \text{ то } \mathcal{M}_\mu(Q, \partial Q) \subset \mathcal{M}_k(Q) \text{ при } k > -\mu - 1.$$

Нехай  $\mathcal{M}_{\mu, \tilde{C}}(Q, \partial Q) = \{v \in \mathcal{M}_\mu(Q, \partial Q) : ||v; \partial Q||_\mu \leq \tilde{C}\}$  - замкнена куля радіуса  $\tilde{C}$  у просторі  $\mathcal{M}_\mu(Q, \partial Q)$ .

**Лема 4.** *Нехай функція  $f_0(x, t, v) = |v|^{\beta_0} t^\gamma$ , де  $\beta_0 \in (0, \frac{1}{n})$ ,  $\gamma \in (\frac{n\beta_0-2}{2}, 0)$  та*

$$\max\left\{-\frac{2(\gamma+1)}{\beta_0}; -\frac{1}{\beta_0}\right\} < \mu \leq \min\left\{\frac{1-n}{1-\beta_0}; \frac{2-n+2\gamma}{1-\beta_0}\right\}, \tag{8}$$

то існує стала  $\tilde{K}_0 > 0$  така, що при всіх  $\tilde{C} > \tilde{K}_0$  оператор  $H$  відображає  $\mathcal{M}_{\mu, \tilde{C}}(Q, \partial Q)$  в себе.

**Доведення.** Знайдемо оцінку  $Hv$  при  $v \in \mathcal{M}_\mu(Q, \partial Q)$ . Маємо

$$|(Hv)(x, t)| \leq \int_0^t d\tau \int_\Omega |G(x, t; y, \tau)| \cdot |v(y, \tau)|^{\beta_0} \tau^\gamma dy.$$

Використовуючи лему 1 при  $\mu\beta_0 > -1$ ,  $\mu\beta_0 + 2\gamma > -2$ , знаходимо

$$\begin{aligned} |(Hv)(x, t)| &\leq \tilde{C}'_{\mu\beta_0} (\tilde{C}_1'')^{\beta_0} \left( [\varrho_1(x)]^{\mu\beta_0+1-n} + 1 \right) \leq \\ &\leq [\varrho_1(x)]^\mu \tilde{C}'_{\mu\beta_0} (\tilde{C}_1'')^{\beta_0} \left( [\varrho_1(x)]^{\mu(\beta_0-1)+1-n} + [\varrho_1(x)]^{-\mu} \right), (x, t) \in Q^1; \\ |(Hv)(x, t)| &\leq \tilde{C}'_{\frac{\mu\beta_0}{2}} (\tilde{C}_2'')^{\beta_0} \left( [\varrho_2(t)]^{\frac{\mu\beta_0+2\gamma+2-n}{2}} + 1 \right) \leq \\ &\leq [\varrho_2(t)]^{\frac{\mu}{2}} \tilde{C}'_{\frac{\mu\beta_0}{2}} (\tilde{C}_2'')^{\beta_0} \left( [\varrho_2(t)]^{\frac{\mu(\beta_0-1)+2\gamma+2-n}{2}} + [\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu}{2}} \right), (x, t) \in Q^2; \\ |(Hv)(x, t)| &\leq \tilde{C}'_0 (\tilde{C}_3'')^{\beta_0}, (x, t) \in Q^3, \text{ де } \tilde{C}'_{\mu\beta_0}, \tilde{C}'_{\frac{\mu\beta_0}{2}}, \tilde{C}'_0 - \text{ додатні сталі.} \end{aligned}$$

При виконанні умов (8)

$$\begin{cases} \mu > \frac{-2(\gamma+1)}{\beta_0} \\ \mu > -\frac{1}{\beta_0} \\ \mu \leq -\frac{n-1}{1-\beta_0} \\ \mu \leq -\frac{n-2-2\gamma}{1-\beta_0} \end{cases}$$

знаходимо  $\|Hv; \partial Q\|_\mu \leq R_1$ ,  $(x, t) \in \bar{Q}$ , де  $R_1 = \tilde{C}' (\max_{1 \leq i \leq 3} \tilde{C}_i'')^{\beta_0}$ ,

$$\tilde{C}' = \max\{\tilde{C}'_{\mu\beta_0}, \tilde{C}'_{\frac{\mu\beta_0}{2}}, \tilde{C}'_0\}.$$

Зауважимо, що при  $\beta_0 \in (0, 1)$ , існує стала  $\tilde{K}_0 > 0$  така, що  $R_1 \leq \max_{1 \leq i \leq 3} \tilde{C}_i'' = \tilde{C}$  при  $\tilde{C} > \tilde{K}_0$ . Отже, за умов (8) при  $\beta_0 \in (0, \frac{1}{n})$ ,  $\gamma \in (-1, 0)$ ,  $\tilde{C} > \tilde{K}_0$  оператор  $H : \mathcal{M}_{\mu, \tilde{C}}(Q, \partial Q) \rightarrow \mathcal{M}_{\mu, \tilde{C}}(Q, \partial Q)$ .

Використовуючи властивості функції Гріна, узагальнених функцій та лему 2, у [5] доведено

**Лема 5.** *Нехай виконуються припущення 1 щодо функцій  $F_1, F_2$  та  $\mu \leq -k_0 - 1$ . Тоді  $h \in \mathcal{M}_{\mu, \tilde{C}}(Q, \partial Q)$ , а саме, існує додатна стала  $R_2$  така, що  $\|h; \partial Q\|_\mu \leq R_2 < +\infty$ .*

**Лема 6.** *Нехай  $\beta_0 \in (0, \frac{1}{n})$ ,  $\gamma \in (\frac{n\beta_0-2}{2}, 0)$  та*

$\max\{-\frac{2(\gamma+1)}{\beta_0}; -\frac{1}{\beta_0}\} < \mu < \min\{\frac{1-n}{1-\beta_0}; \frac{2-n+2\gamma}{1-\beta_0}\}$ . Тоді для довільного  $\varepsilon > 0$  існує  $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$  таке, що для довільної підобласті  $V \subset Q$ , міра якої  $m(V) < \eta$ , для довільних  $(x, t) \in Q^1 \cup Q^2$  виконується

$$[\varrho_1(x)]^{-\mu} \int_{V \cap Q^1} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \tau^\gamma |G(x, t; y, \tau)| dy d\tau < \varepsilon, \tag{9}$$

$$[\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu}{2}} \int_{V \cap Q^1} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \tau^\gamma |G(x, t; y, \tau)| dy d\tau < \varepsilon, \tag{10}$$

$$[\varrho_1(x)]^{-\mu} \int_{V \cap Q^2} [\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0}{2}} \tau^\gamma |G(x, t; y, \tau)| dy d\tau < \varepsilon, \quad (11)$$

$$[\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu}{2}} \int_{V \cap Q^2} [\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0}{2}} \tau^\gamma |G(x, t; y, \tau)| dy d\tau < \varepsilon \quad (12)$$

та для довільних  $(x, t) \in \overline{Q}$  виконується

$$\int_{V \cap Q^3} |G(x, t; y, \tau)| dy d\tau < \varepsilon. \quad (13)$$

**Доведення.** Доведемо виконання (9). Нехай  $V$  – довільна підобласть в  $Q$ ,  $(x, t) \in \overline{Q^1}$  – довільна точка, а  $\sigma \in (0, \frac{\varepsilon_0}{2})$  – яке-небудь число. Враховуючи властивості функції Гріна та лему 1 при  $\mu\beta_0 > -1$ ,  $\mu\beta_0 + 2\gamma > -2$ , матимемо

$$\begin{aligned} & [\varrho_1(x)]^{-\mu} \int_{(y, \tau) \in \{V \cap Q^1: \varrho_1(y) < \sigma\}} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \tau^\gamma |G(x, t; y, \tau)| dy d\tau \leq \tilde{C}'_{\mu\beta_0} [\varrho_1(x)]^{-\mu} \times \\ & \times (1 + [\varrho_1(x)]^{\mu\beta_0+1-n}) \leq \tilde{C}'_{\mu\beta_0} (\sigma^{-\mu} + \sigma^{\mu(\beta_0-1)+1-n}) \leq 2\tilde{C}'_{\mu\beta_0} \sigma^{\mu(\beta_0-1)+1-n}. \end{aligned} \quad (14)$$

Зауважимо, що  $\mu(\beta_0 - 1) + 1 - n > 0$ .

Нехай  $\varepsilon \in (0, 1)$  – довільно вибране. Зафіксуємо його. З (14) випливає, що при  $\sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon) = \min\left\{\left(\frac{\varepsilon}{4\tilde{C}'_{\mu\beta_0}}\right)^{\frac{1}{\mu(\beta_0-1)+1-n}}, \frac{\varepsilon_0}{2}\right\}$  одержуємо

$$[\varrho_1(x)]^{-\mu} \int_{(y, \tau) \in \{V \cap Q^1: \varrho_1(y) < \sigma_0\}} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \tau^\gamma \cdot |G(x, t; y, \tau)| dy d\tau < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Враховуючи оцінки функції Гріна і те, що в області  $Q^1$   $\varrho(y, \tau) = \varrho_1(y)$  та  $\|x - y\|^2 + |t - \tau| \geq \|x - y\|^2 \geq d^2(y) \geq C' \varrho_1^2(y)$ , де  $C' > 0$ , при довільній підобласті  $V$  області  $Q$  таких, що  $m(V) < \frac{\varepsilon}{2\hat{C}''} \cdot \sigma_0^{-\mu\beta_0+n}$ ,  $\hat{C}''$  – додатна стала та  $(x, t) \in \overline{Q^1}$  матимемо  $[\varrho_1(x)]^{-\mu} \int_{(y, \tau) \in \{V \cap Q^1: \varrho_1(y) \geq \sigma_0\}} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \tau^\gamma |G(x, t; y, \tau)| dy d\tau \leq$

$$\leq \hat{C}_0 (C')^{-n} [\varrho_1(x)]^{-\mu} \int_{(y, \tau) \in \{V \cap Q^1: \varrho_1(y) \geq \sigma_0\}} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0-n} \tau^\gamma dy d\tau \leq \frac{\hat{C}''}{\sigma_0^{-\mu\beta_0+n}} m(V) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ а}$$

отже, існує  $\eta_1 = \eta_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2\hat{C}''} \cdot \sigma_0^{-\mu\beta_0+n} = \frac{\varepsilon}{2\hat{C}''} \left(\min\left\{\left(\frac{\varepsilon}{4\tilde{C}'_{\mu\beta_0}}\right)^{\frac{1}{\mu(\beta_0-1)+1-n}}, \frac{\varepsilon_0}{2}\right\}\right)^{-\mu\beta_0+n}$

таке, що при  $m(V) < \eta_1(\varepsilon)$  та  $(x, t) \in \overline{Q^1}$  випливає

$$\begin{aligned} & [\varrho_1(x)]^{-\mu} \int_{(y, \tau) \in V \cap Q^1} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \tau^\gamma |G(x, t; y, \tau)| dy d\tau \leq \\ & \leq [\varrho_1(x)]^{-\mu} \int_{(y, \tau) \in \{V \cap Q^1: \varrho_1(y) < \sigma_0\}} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \tau^\gamma |G(x, t; y, \tau)| dy d\tau + \\ & + [\varrho_1(x)]^{-\mu} \int_{(y, \tau) \in \{V \cap Q^1: \varrho_1(y) \geq \sigma_0\}} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \tau^\gamma |G(x, t; y, \tau)| dy d\tau < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

З подібних міркувань, одержуємо (10).

Доведемо (11). Нехай  $(x, t) \in \overline{Q^1}$ , тобто  $\varrho_1(x) < [\varrho_2(t)]^{\frac{1}{2}}$ ,  $\sigma \in (0, \frac{\varepsilon_0}{2})$ . Враховуючи оцінки функції Гріна та лему 1 при  $\frac{\mu\beta_0}{2} > -1$ ,  $\mu\beta_0 + 2\gamma > -2$ , матимемо

$$[\varrho_1(x)]^{-\mu} \int_{(y, \tau) \in \{V \cap Q^2: \varrho_2(\tau) < \sigma\}} [\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0}{2}} \tau^\gamma |G(x, t; y, \tau)| dy d\tau \leq \tilde{C}'_{\frac{\mu\beta_0}{2}} [\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu}{2}} \times$$

$$\times (1 + [\varrho_2(t)]^{\frac{\mu\beta_0+2\gamma+2-n}{2}}) \leq \tilde{C}'_{\frac{\mu\beta_0}{2}} (\sigma^{-\frac{\mu}{2}} + \sigma^{\frac{(\beta_0-1)\mu+2\gamma+2-n}{2}}) \leq 2\tilde{C}'_{\frac{\mu\beta_0}{2}} \sigma^{\frac{(\beta_0-1)\mu+2\gamma+2-n}{2}}. \quad (15)$$

Зауважимо, що  $\frac{(\beta_0-1)\mu+2\gamma+2-n}{2} > 0$ .

З (15) випливає, що при  $\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon) = \min\left\{\left(\frac{\varepsilon}{4\tilde{C}'_{\frac{\mu\beta_0}{2}}}\right)^{\frac{2}{\mu(\beta_0-1)+2\gamma+2-n}}, \frac{\varepsilon_0}{2}\right\}$  одержуємо 
$$[\varrho_1(x)]^{-\mu} \int_{(y,\tau) \in \{V \cap Q^2: \varrho_2(\tau) < \sigma_1\}} [\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0}{2}} \tau^\gamma |G(x, t; y, \tau)| dy d\tau < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Враховуючи оцінки функції Гріна і те, що в області  $Q^2$   $\varrho(y, \tau) = [\varrho_2(\tau)]^{\frac{1}{2}} \leq \varrho_1(y)$  та  $\|x - y\|^2 + |t - \tau| \geq d^2(y) \geq C' \varrho_1^2(y) \geq C'' \varrho_2(\tau)$ , де  $C'' > 0$ , при довільній  $V \subset Q$  такій, що  $m(V) < \frac{\varepsilon}{2\tilde{C}''' \sigma_1^{\frac{-\mu\beta_0+n-2\gamma}{2}}}$  та  $(x, t) \in \overline{Q^1}$  матимемо

$$\begin{aligned} & [\varrho_1(x)]^{-\mu} \int_{(y,\tau) \in \{V \cap Q^2: \varrho_2(\tau) \geq \sigma_1\}} [\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0}{2}} \tau^\gamma |G(x, t; y, \tau)| dy d\tau \leq \\ & \leq \hat{C}_0 (C'')^{-\frac{n}{2}} [\varrho_1(x)]^{-\mu} \int_{(y,\tau) \in \{V \cap Q^2: \varrho_2(\tau) \geq \sigma_1\}} [\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0-n}{2}} \tau^\gamma dy d\tau \leq \\ & \leq \hat{C}''' \int_{(y,\tau) \in \{V \cap Q^2: \varrho_2(\tau) \geq \sigma_1\}} [\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0-n+2\gamma}{2}} dy d\tau \leq \frac{\hat{C}'''}{\sigma_1^{\frac{-\mu\beta_0+n-2\gamma}{2}}} m(V) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ а отже, існує} \end{aligned}$$

$$\eta_2 = \eta_2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2\hat{C}''' \sigma_1^{\frac{-\mu\beta_0+n-2\gamma}{2}}} = \frac{\varepsilon}{2\hat{C}'''} \left( \min\left\{\left(\frac{\varepsilon}{4\tilde{C}'_{\frac{\mu\beta_0}{2}}}\right)^{\frac{2}{\mu(\beta_0-1)+2\gamma+2-n}}, \frac{\varepsilon_0}{2}\right\} \right)^{\frac{-\mu\beta_0+n-2\gamma}{2}} \text{ таке,}$$

що при  $m(V) < \eta_2(\varepsilon)$  та  $(x, t) \in \overline{Q^1}$  випливає

$$\begin{aligned} & [\varrho_1(x)]^{-\mu} \int_{(y,\tau) \in V \cap Q^2} [\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0}{2}} \tau^\gamma |G(x, t; y, \tau)| dy d\tau \leq \\ & \leq [\varrho_1(x)]^{-\mu} \int_{(y,\tau) \in \{V \cap Q^2: \varrho_2(\tau) < \sigma_1\}} [\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0}{2}} \tau^\gamma |G(x, t; y, \tau)| dy d\tau + \\ & + [\varrho_1(x)]^{-\mu} \int_{(y,\tau) \in \{V \cap Q^2: \varrho_2(\tau) \geq \sigma_1\}} [\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0}{2}} \tau^\gamma |G(x, t; y, \tau)| dy d\tau < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

З подібних міркувань, одержуємо (12).

За властивостями функції Гріна та рівномірної збіжності інтегралів за заданим  $\varepsilon > 0$  можна вказати  $\eta_3 = \eta_3(\varepsilon) > 0$  ( $\eta_3$  не залежить від точки  $(x, t) \in \overline{Q}$ ) таке, що для довільної підобласті  $V \subset Q$ , міра якої  $m(V) < \eta_3$  виконується (13). При  $\eta < \min\{\eta_1; \eta_2; \eta_3\}$  виконуються всі оцінки (9)-(13).

**Теорема 2.** *Нехай виконуються припущення 1, функція  $f_0(x, t, v) = |v|^{\beta_0} t^\gamma$ , де  $\beta_0 \in (0, \frac{1}{n+1})$ ,  $\max\{-(1 - \beta_0); \frac{n\beta_0-2}{2}\} < \gamma < 0$ ,*

$$\max\{q_1, q_2 - 1\} < \min\left\{\frac{1}{\beta_0}; \frac{2(\gamma+1)}{\beta_0}\right\} - n - 1,$$

$\max\left\{-\frac{2(\gamma+1)}{\beta_0}; -\frac{1}{\beta_0}; -k-1\right\} < \mu \leq \min\left\{\frac{2-n+2\gamma}{1-\beta_0}; \frac{2\gamma}{1-\beta_0}; -k_0-1\right\}$ . Тоді існує розв'язок  $u \in \mathcal{M}_\mu(Q, \partial Q)$  задачі (2)-(4), який при  $\mu > -k - 1$  належить до простору  $\mathcal{M}_k(Q)$ , де  $\max\{q_1, q_2 - 1\} + n < k < \min\left\{-1 + \frac{1}{\beta_0}; \frac{2\gamma+2(1-\beta_0)}{2}\right\}$ .

**Доведення.** Використаємо теорему Шаудера. З умов теореми щодо  $\mu$  випливає виконання умов лем 4, 5 щодо  $\mu$ . З оцінок, одержаних при доведенні лем 4 та 5, випливає існування сталої  $\tilde{K}_0 > 0$  такої, що для довільних  $v \in \mathcal{M}_{\mu, \tilde{C}}(Q, \partial Q)$  та  $\beta_0 \in (0, 1)$  матимемо  $\|H_1 v; \partial Q\|_\mu \leq \tilde{C}' (\max_{1 \leq i \leq 3} \tilde{C}_i'')^{\beta_0} + R_2 \leq \tilde{C}$  при  $\tilde{C} > \tilde{K}_0$ .

Звідси та із лем 4, 5 одержуємо, що при  $\beta_0 \in (0; \frac{1}{n})$ ,  $\tilde{C} > \tilde{K}_0$  оператор  $H_1 : \mathcal{M}_{\mu, \tilde{C}}(Q, \partial Q) \rightarrow \mathcal{M}_{\mu, \tilde{C}}(Q, \partial Q)$ , а множина  $\{H_1 v : v \in \mathcal{M}_{\mu, \tilde{C}}(Q, \partial Q)\}$  – рівномірно обмежена.

Покажемо, що множина  $\{H_1 v : v \in \mathcal{M}_{\mu, \tilde{C}}(Q, \partial Q)\}$  – одностайно неперерв-



на, тобто для довільного  $\varepsilon > 0$  існує  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  таке, що для довільних  $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\|z\| < \delta$ ,  $|z_0| < \delta$  та довільних  $v \in \mathcal{M}_{\mu, \tilde{C}}(Q, \partial Q)$

$$\begin{aligned} & \| (H_1 v)(x+z, t+z_0) - (H_1 v)(x, t); \partial Q \|_{\mu} \leq \\ & \leq \max \left\{ \sup_{(x,t) \in \overline{Q^1}} |[\varrho_1(x+z)]^{-\mu} (Hv)(x+z, t+z_0) - [\varrho_1(x)]^{-\mu} (Hv)(x, t)|; \right. \\ & \quad \sup_{(x,t) \in \overline{Q^2}} |[\varrho_2(t+z_0)]^{-\frac{\mu}{2}} (Hv)(x+z, t+z_0) - [\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu}{2}} (Hv)(x, t)|; \\ & \quad \left. \sup_{(x,t) \in \overline{Q^3}} |(Hv)(x+z, t+z_0) - (Hv)(x, t)| \right\} + \\ & + \max \left\{ \sup_{(x,t) \in \overline{Q^1}} |[\varrho_1(x+z)]^{-\mu} h(x+z, t+z_0) - [\varrho_1(x)]^{-\mu} h(x, t)|; \right. \\ & \quad \left. \sup_{(x,t) \in \overline{Q^2}} |[\varrho_2(t+z_0)]^{-\frac{\mu}{2}} h(x+z, t+z_0) - [\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu}{2}} h(x, t)|; \right. \\ & \quad \left. \sup_{(x,t) \in \overline{Q^3}} |h(x+z, t+z_0) - h(x, t)| \right\} < \varepsilon \end{aligned}$$

Вважаємо  $[\varrho_1(x+z)]^{-\mu} = 0$ ,  $[\varrho_2(t+z_0)]^{-\frac{\mu}{2}} = 0$ ,  
 $[\varrho_1(x+z)]^{-\mu} G(x+z, t+z_0; y, \tau) = 0$ ,  $[\varrho_2(t+z_0)]^{-\frac{\mu}{2}} G(x+z, t+z_0; y, \tau) = 0$ ,  
 $[\varrho_1(x+z)]^{-\mu} (Hv)(x+z, t+z_0) = 0$ ,  $[\varrho_2(t+z_0)]^{-\frac{\mu}{2}} (Hv)(x+z, t+z_0) = 0$ ,  
 $[\varrho_1(x+z)]^{-\mu} h(x+z, t+z_0) = 0$ ,  $[\varrho_2(t+z_0)]^{-\frac{\mu}{2}} h(x+z, t+z_0) = 0$ , якщо  $(x+z, t+z_0) \notin Q$ .

Зафіксуємо  $\varepsilon > 0$ . З леми 5 випливає, що  $[\varrho_1(x)]^{-\mu} \cdot h(x, t) \in C(\overline{Q})$ ,  
 $[\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu}{2}} \cdot h(x, t) \in C(\overline{Q})$ . Тому існує  $\delta' = \delta'(\varepsilon) > 0$  таке, що для довільних  
 $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\|z\| < \delta'$ ,  $|z_0| < \delta'$  виконується

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \sup_{(x,t) \in \overline{Q^1}} |[\varrho_1(x+z)]^{-\mu} h(x+z, t+z_0) - [\varrho_1(x)]^{-\mu} h(x, t)|; \right. \\ & \quad \left. \sup_{(x,t) \in \overline{Q^2}} |[\varrho_2(t+z_0)]^{-\frac{\mu}{2}} h(x+z, t+z_0) - [\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu}{2}} h(x, t)|; \right. \\ & \quad \left. \sup_{(x,t) \in \overline{Q^3}} |h(x+z, t+z_0) - h(x, t)| \right\} < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Розглянемо для довільних  $(x, t) \in \overline{Q^1}$  та довільних  $v \in \mathcal{M}_{\mu, \tilde{C}}(Q, \partial Q)$

$$\begin{aligned} & \mathcal{J}^1(x, t; z, z_0) = |[\varrho_1(x+z)]^{-\mu} (Hv)(x+z, t+z_0) - [\varrho_1(x)]^{-\mu} (Hv)(x, t)| \leq \\ & \leq \int_0^t d\tau \int_{\Omega} |[\varrho_1(x+z)]^{-\mu} G(x+z, t+z_0; y, \tau) - [\varrho_1(x)]^{-\mu} G(x, t; y, \tau)| \cdot |f_0(y, \tau, v(y, \tau))| dy + \\ & + [\varrho_1(x+z)]^{-\mu} \int_t^{t+z_0} d\tau \int_{\Omega} |G(x+z, t+z_0; y, \tau)| \cdot |f_0(y, \tau, v(y, \tau))| dy = \mathcal{J}_1^1(x, t; z, z_0) + \\ & + \mathcal{J}_2^1(x, t; z, z_0). \end{aligned}$$

Нехай  $\widehat{g}_1(x, t; y, \tau) \stackrel{def}{=} [\varrho_1(x)]^{-\mu} G(x, t; y, \tau)$ .

Функція  $f_0(x, t, z)$  визначена в  $Q \times (-\infty, +\infty)$  та має вигляд  
 $f_0(x, t, v) = |v|^{\beta_0} t^{\gamma}$ . Тоді при  $(x, t) \in \overline{Q^1}$  матимемо

$$\begin{aligned} & \mathcal{J}_1^1(x, t; z, z_0) \leq \int_{Q^1} |\widehat{g}_1(x+z, t+z_0; y, \tau) - \widehat{g}_1(x, t; y, \tau)| (\widetilde{C}_1'' [\varrho_1(y)]^{\mu})^{\beta_0} \tau^{\gamma} dy d\tau + \\ & + \int_{Q^2} |\widehat{g}_1(x+z, t+z_0; y, \tau) - \widehat{g}_1(x, t; y, \tau)| (\widetilde{C}_2'' [\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu}{2}})^{\beta_0} \tau^{\gamma} dy d\tau + \\ & + \int_{Q^3} |\widehat{g}_1(x+z, t+z_0; y, \tau) - \widehat{g}_1(x, t; y, \tau)| (\widetilde{C}_3'' )^{\beta_0} \tau^{\gamma} dy d\tau = \\ & = \mathcal{J}_{11}^1(x, t; z, z_0) + \mathcal{J}_{12}^1(x, t; z, z_0) + \mathcal{J}_{13}^1(x, t; z, z_0). \end{aligned}$$

**I<sub>1</sub>.** Нехай  $\eta_{1,1} > 0$  – досить мале і довільне число,  $Q^1_{\eta_{1,1}}$  – підобласть області  $Q^1$  така, що  $dist(Q^1_{\eta_{1,1}}, \Sigma) \geq \eta_{1,1} > 0$ . Розглянемо при  $(x, t) \in \overline{Q^1}$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^1_{11}(x, t; z, z_0) &= \int_{Q^1 \setminus Q^1_{\eta_{1,1}}} |\widehat{g}_1(x+z, t+z_0; y, \tau) - \widehat{g}_1(x, t; y, \tau)| (\widetilde{C}''_1)^{\beta_0} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \tau^\gamma dy d\tau + \\ &+ \int_{Q^1_{\eta_{1,1}}} |\widehat{g}_1(x+z, t+z_0; y, \tau) - \widehat{g}_1(x, t; y, \tau)| (\widetilde{C}''_1)^{\beta_0} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \tau^\gamma dy d\tau = \\ &= \mathcal{J}^1_{111}(x, t; z, z_0) + \mathcal{J}^1_{112}(x, t; z, z_0). \end{aligned}$$

Нехай  $\delta_0 > 0$  – фіксоване число. За заданим  $\delta_0 > 0$  вибираємо число  $\eta_{1,1} < \frac{\varepsilon_0}{2}$  таке, щоб  $m(Q^1 \setminus Q^1_{\eta_{1,1}}) \leq \delta_0$  та  $\eta_{1,1} < \left(\frac{\varepsilon}{24\widetilde{C}''_0 \cdot (\widetilde{C}''_1)^{\beta_0}}\right)^{\frac{1}{\mu\beta_0 - \mu}}$ .

За лемою 6 існує  $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ , існує відповідне  $\eta_{1,1} > 0$  такі, що для довільних  $(x, t) \in \overline{Q^1}$  та  $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  таких, що  $(x+z, t+z_0) \in Q^1$ ,

$$\int_{Q^1 \setminus Q^1_{\eta_{1,1}}} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \tau^\gamma |\widehat{g}_1(x, t; y, \tau)| dy d\tau < \frac{\varepsilon}{48(\widetilde{C}''_1)^{\beta_0}}, \tag{16}$$

$$\int_{Q^1 \setminus Q^1_{\eta_{1,1}}} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \tau^\gamma |\widehat{g}_1(x+z, t+z_0; y, \tau)| dy d\tau < \frac{\varepsilon}{48(\widetilde{C}''_1)^{\beta_0}}, \tag{17}$$

Тоді з (16), (17) при  $(x, t) \in \overline{Q^1}$  матимемо  $\mathcal{J}^1_{111}(x, t; z, z_0) \leq \int_{Q^1 \setminus Q^1_{\eta_{1,1}}} (|\widehat{g}_1(x+z, t+z_0; y, \tau)| + |\widehat{g}_1(x, t; y, \tau)|) (\widetilde{C}''_1)^{\beta_0} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \tau^\gamma dy d\tau \leq \frac{\varepsilon}{24}$ , а отже,

$$\sup_{(x,t) \in \overline{Q^1}} \mathcal{J}^1_{111}(x, t; z, z_0) < \frac{\varepsilon}{24}.$$

Нехай  $\widehat{g}'_{11}(x, t; y, \tau) \stackrel{def}{=} \widehat{g}_1(x, t; y, \tau) (\widetilde{C}''_1)^{\beta_0} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \tau^\gamma$ .

Виберемо  $0 < \eta_{1,2} < \frac{\eta_{1,1}}{2}$ . Для довільної  $(x, t) \in Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}$  та числа  $\eta_{1,2}$  визначимо множини  $U^1_{\eta_{1,2}}(x, t) \stackrel{def}{=} \{(y, \tau) \in Q^1_{\eta_{1,1}} : \|x-y\| \leq \eta_{1,2}, |t-\tau| \leq \eta_{1,2}^2\}$ .

Обчислимо  $m(U^1_{\eta_{1,2}}(x, t)) = \int_{U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)} dy d\tau = \int_{\|x-y\| \leq \eta_{1,2}} dy \int_{|t-\tau| \leq \eta_{1,2}^2} d\tau = 2\sigma_n \eta_{1,2}^{n+2}$ , де  $\sigma_n$  – площа поверхні сфери одиничного радіуса в  $\mathbb{R}^n$ . Якщо вибрати  $\eta_{1,2} < \min\{\frac{\eta_{1,1}}{2}; (\frac{\delta_0}{2\sigma_n})^{\frac{1}{n+2}}\}$ , то  $m(U^1_{\eta_{1,2}}(x, t)) < \delta_0$ . Тоді з (16), (17) для довільних  $(x, t) \in \overline{Q^1}$  та  $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  таких, що  $(x+z, t+z_0) \in Q^1$

$$\int_{U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)} |\widehat{g}'_{11}(x, t; y, \tau)| dy d\tau < \frac{\varepsilon}{72}; \quad \int_{U^1_{\eta_{1,2}}(x,t)} |\widehat{g}'_{11}(x+z, t+z_0; y, \tau)| dy d\tau < \frac{\varepsilon}{72}. \tag{18}$$

Виберемо  $\delta_{1,1} < \min\{\delta_0; \frac{\eta_{1,2}}{2}\}$ . При  $(x, t) \in Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}$ ,  $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\|z\| \leq \delta_{1,1}$  ( $< \frac{1}{4}\eta_{1,1}$ ),  $|z_0| \leq \delta_{1,1}$  ( $< \frac{1}{4}\eta_{1,1}$ ) маємо  $(x+z, t+z_0) \in Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{4}}$ . При  $(x, t) \in Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{4}}$ ,  $(y, \tau) \in Q^1_{\eta_{1,1}} \setminus U^1_{\eta_{1,2}}(x, t)$ ,  $\|x-y\| \geq \eta_{1,2}$ ,  $|t-\tau| \geq \eta_{1,2}^2$ , а отже,  $(x, t) \neq (y, \tau)$ . Тому функція  $\widehat{g}_1(x, t; y, \tau)$  рівномірно неперервна в  $V = \{(x, t; y, \tau) : (x, t) \in \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{4}}}, (y, \tau) \in \overline{Q^1_{\eta_{1,1}} \setminus U^1_{\eta_{1,2}}(x, t)}\}$ . Тоді існує  $\delta_{1,2} = \delta_{1,2}(\varepsilon) \in (0, \delta_{1,1}]$  таке, що для довільних  $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\|z\| < \delta_{1,2}$ ,  $|z_0| < \delta_{1,2}$ ,  $(x, t) \in \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}} \subset \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,1}}{4}}}$ ,  $(y, \tau) \in \overline{Q^1_{\eta_{1,1}} \setminus U^1_{\eta_{1,2}}(x, t)}$  при  $\mu\beta_0 > -1$ , виконується  $|\widehat{g}_1(x+z, t+z_0; y, \tau) - \widehat{g}_1(x, t; y, \tau)| < \frac{\varepsilon}{72A_1}$ , де

$$\begin{aligned}
 A_1^1 &= \int_{Q_{\eta_{1,1}}^1 \setminus U_{\eta_{1,2}}^1(x,t)} (\tilde{C}_1'')^{\beta_0} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \tau^\gamma dy d\tau, \text{ а тоді} \\
 &\int_{Q_{\eta_{1,1}}^1 \setminus U_{\eta_{1,2}}^1(x,t)} |\widehat{g}_{11}'(x+z, t+z_0; y, \tau) - \widehat{g}_{11}'(x, t; y, \tau)| dy d\tau < \\
 &< \frac{\varepsilon}{72A_1^1} \int_{Q_{\eta_{1,1}}^1 \setminus U_{\eta_{1,2}}^1(x,t)} (\tilde{C}_1'')^{\beta_0} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \tau^\gamma dy d\tau \leq \frac{\varepsilon}{72}. \tag{19}
 \end{aligned}$$

Отже, при  $(x, t) \in Q_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}^1$  із (18), (19) випливає існування  $\delta_{1,2} = \delta_{1,2}(\varepsilon) > 0$  такого, що для довільних  $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\|z\| < \delta_{1,2}$ ,  $|z_0| < \delta_{1,2}$   
 $J_{112}^1(x, t; z, z_0) = \int_{Q_{\eta_{1,1}}^1} |\widehat{g}_{11}'(x+z, t+z_0; y, \tau) - \widehat{g}_{11}'(x, t; y, \tau)| dy d\tau \leq$   
 $\leq \int_{U_{\eta_{1,2}}^1(x,t)} |\widehat{g}_{11}'(x, t; y, \tau)| dy d\tau + \int_{U_{\eta_{1,2}}^1(x,t)} |\widehat{g}_{11}'(x+z, t+z_0; y, \tau)| dy d\tau +$   
 $+ \int_{Q_{\eta_{1,1}}^1 \setminus U_{\eta_{1,2}}^1(x,t)} |\widehat{g}_{11}'(x+z, t+z_0; y, \tau) - \widehat{g}_{11}'(x, t; y, \tau)| dy d\tau < \frac{\varepsilon}{24}$ , а отже,  
 $\sup_{(x,t) \in Q_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}^1} J_{112}^1(x, t; z, z_0) < \frac{\varepsilon}{24}$ .

При  $(x, t) \in \overline{Q^1 \setminus Q_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}^1}$ ,  $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\|z\| \leq \delta_{1,1} (< \frac{\eta_{1,1}}{4})$ ,  $|z_0| \leq \delta_{1,1} (< \frac{\eta_{1,1}}{4})$  буде  $(x+z, t+z_0) \in Q^1 \setminus Q_{\frac{3\eta_{1,1}}{4}}^1 \subset Q^1$  або  $(x+z, t+z_0) \notin Q^1$ . За рівномірною неперервністю функції  $\widehat{g}_1(x, t; y, \tau)$  на замкненій множині  $V_1 = (\overline{Q^1 \setminus Q_{\frac{3\eta_{1,1}}{4}}^1}) \times \overline{Q_{\eta_{1,1}}^1}$ , враховуючи, що  $-\mu \geq 0$ ,  $[\varrho_1(x)]^{-\mu} \leq 1$ , одержуємо: існує  $\delta_{1,3} = \delta_{1,3}(\varepsilon) \in (0, \delta_{1,1}]$  таке, що для довільних  $(x, t) \in \overline{Q^1 \setminus Q_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}^1} \subset \overline{Q^1 \setminus Q_{\frac{3\eta_{1,1}}{4}}^1}$ ,  $(y, \tau) \in \overline{Q_{\eta_{1,1}}^1}$ ,  $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\|z\| < \delta_{1,3}$ ,  $|z_0| < \delta_{1,3}$  виконується  $|\widehat{g}_1(x+z, t+z_0; y, \tau) - \widehat{g}_1(x, t; y, \tau)| < \frac{\varepsilon}{24A_2^1}$ , де  $A_2^1 = \int_{Q_{\eta_{1,1}}^1} (\tilde{C}_1'')^{\beta_0} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \tau^\gamma dy d\tau$ ,

звідки  $\sup_{\substack{(x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}^1} \\ (x+z,t+z_0) \in Q^1}} J_{112}^1(x, t; z, z_0) \leq \frac{\varepsilon}{24A_2^1} \int_{Q_{\eta_{1,1}}^1} (\tilde{C}_1'')^{\beta_0} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \tau^\gamma dy d\tau = \frac{\varepsilon}{24}$ .

Для тих точок  $(x, t) \in \overline{Q^1 \setminus Q_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}^1}$ ,  $(y, \tau) \in Q_{\eta_{1,1}}^1$ ,  $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\|z\| < \delta_{1,1}$ ,  $|z_0| < \delta_{1,1}$ , для яких  $(x+z, t+z_0) \notin Q^1$ , матимемо  
 $\sup_{\substack{(x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}^1} \\ (x+z,t+z_0) \notin Q^1}} J_{112}^1(x, t; z, z_0) \leq \sup_{\substack{(x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q_{\frac{\eta_{1,1}}{2}}^1} \\ (x+z,t+z_0) \notin Q^1}} \int_{Q_{\eta_{1,1}}^1} |\widehat{g}_1(x, t; y, \tau)| (\tilde{C}_1'')^{\beta_0} \eta_{1,1}^{\mu\beta_0} \tau^\gamma dy d\tau \leq$   
 $\leq \widehat{C}_0' (\tilde{C}_1'')^{\beta_0} \eta_{1,1}^{\mu\beta_0 - \mu} \leq \frac{\varepsilon}{24}$ , де остання нерівність виконується згідно з вибором числа  $\eta_{1,1}$ . Зауважимо, що при  $\mu < 0$  також  $\mu\beta_0 - \mu > 0$ .

Показано, що існує  $\tilde{\delta}_1 = \min\{\delta_{1,2}; \delta_{1,3}\} > 0$  таке, що для довільних  $(x, t) \in \overline{Q^1}$ ,  $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\|z\| < \tilde{\delta}_1$ ,  $|z_0| < \tilde{\delta}_1$   $J_{11}^1(x, t; z, z_0) < \frac{\varepsilon}{12}$ .

**I<sub>2</sub>.** Нехай  $Q_{\eta_{1,3}}^2$  – підобласть області  $Q^2$  така, що  $dist(Q_{\eta_{1,3}}^2, \Sigma) \geq \eta_{1,3} > 0$ . Розглянемо для довільних  $(x, t) \in \overline{Q^1}$   
 $J_{12}^1(x, t; z, z_0) = \int_{Q^2 \setminus Q_{\eta_{1,3}}^2} |\widehat{g}_1(x+z, t+z_0; y, \tau) - \widehat{g}_1(x, t; y, \tau)| (\tilde{C}_2'' [\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu}{2}})^{\beta_0} \tau^\gamma dy d\tau +$

$$+ \int_{Q_{\eta_{1,3}}^2} |\widehat{g}_1(x+z, t+z_0; y, \tau) - \widehat{g}_1(x, t; y, \tau)| (\widetilde{C}_2''[\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu}{2}})^{\beta_0} \tau^\gamma dyd\tau = \\ = J_{121}^1(x, t; z, z_0) + J_{122}^1(x, t; z, z_0).$$

За заданим  $\delta_0 > 0$  вибираємо число  $\eta_{1,3} < \frac{\varepsilon_0}{2}$  таке, щоб  $m(Q^2 \setminus Q_{\eta_{1,3}}^2) \leq \delta_0$  та  $\eta_{1,3} < \left(\frac{\varepsilon}{24\widetilde{C}_0' \cdot (\widetilde{C}_2'')^{\beta_0}}\right)^{\frac{2}{\mu\beta_0 + 2\gamma - 2\mu}}$ .

Використовуючи результати леми 6, одержуємо: існує  $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ , існує відповідне  $\eta_{1,3}$  такі, що для довільних  $(x, t) \in \overline{Q^1}$  та  $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  таких, що  $(x+z, t+z_0) \in Q^1$ , матимемо  $J_{121}^1(x, t; z, z_0) \leq \int_{Q^2 \setminus Q_{\eta_{1,3}}^2} (|\widehat{g}_1(x+z, t+z_0; y, \tau)| +$

$$+ |\widehat{g}_1(x, t; y, \tau)|) (\widetilde{C}_2'')^{\beta_0} [\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0}{2}} \tau^\gamma dyd\tau \leq \frac{\varepsilon}{24}, \text{ а отже, } \sup_{(x,t) \in \overline{Q^1}} J_{121}^1(x, t; z, z_0) < \frac{\varepsilon}{24}.$$

Розглянемо

$$\sup_{(x,t) \in \overline{Q^1}} J_{122}^1(x, t; z, z_0) = \sup\left\{ \sup_{(x,t) \in \overline{Q_{\frac{\eta_{1,3}}{2}}^1}} J_{122}^1(x, t; z, z_0); \sup_{(x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q_{\frac{\eta_{1,3}}{2}}^1}} J_{122}^1(x, t; z, z_0) \right\}.$$

Нехай  $\widehat{g}'_{12}(x, t; y, \tau) \stackrel{def}{=} \widehat{g}_1(x, t; y, \tau) (\widetilde{C}_2'')^{\beta_0} [\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0}{2}} \tau^\gamma$ . Виберемо  $\eta_{1,4} < \frac{\eta_{1,3}}{2}$  та розглянемо  $Q_{\eta_{1,4}}^1 = \{(\xi, \xi_0) \in Q_{\frac{\eta_{1,3}}{2}}^1 : d(\xi, \xi_0; Q_{\eta_{1,3}}^2) < \eta_{1,4}\}$ .

Виберемо  $\eta_{1,5} < \frac{\eta_{1,3}}{2}$ . Для довільної точки  $(x, t) \in Q_{\frac{\eta_{1,3}}{2}}^1 \cap Q_{\eta_{1,4}}^1$  та числа  $\eta_{1,5}$  визначимо множини  $U_{\eta_{1,5}}^2(x, t) \stackrel{def}{=} \{(y, \tau) \in Q_{\eta_{1,3}}^2 : \|x-y\| \leq \eta_{1,5}, |t-\tau| \leq \eta_{1,5}^2\}$ . Подібно, як і в попередньому випадку, можна показати, що  $m(U_{\eta_{1,5}}^2(x, t)) = 2\sigma_n \cdot \eta_{1,5}^{n+2}$ , де  $\sigma_n$  – площа поверхні сфери одиничного радіуса в  $\mathbb{R}^n$ . Якщо вибрати  $\eta_{1,5} < \min\left\{\frac{\eta_{1,3}}{2}; \left(\frac{\delta_0}{2\sigma_n}\right)^{\frac{1}{n+2}}\right\}$ , то  $m(U_{\eta_{1,5}}^2(x, t)) < \delta_0$ . Тоді з леми 6 для довільних  $(x, t) \in Q_{\frac{\eta_{1,3}}{2}}^1 \cap Q_{\eta_{1,4}}^1$  та  $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  таких, що  $(x+z, t+z_0) \in Q^1$  впливає

$$\int_{U_{\eta_{1,5}}^2(x,t)} |\widehat{g}'_{12}(x, t; y, \tau)| dyd\tau < \frac{\varepsilon}{72}; \quad \int_{U_{\eta_{1,5}}^2(x,t)} |\widehat{g}'_{12}(x+z, t+z_0; y, \tau)| dyd\tau < \frac{\varepsilon}{72}. \quad (20)$$

Виберемо  $\delta_{1,4} < \min\{\delta_0; \frac{\eta_{1,5}}{2}\}$ . Функція  $\widehat{g}_1(x, t; y, \tau)$  рівномірно неперервна в області  $V_2 = \{(x, t; y, \tau) : (x, t) \in \overline{Q_{\frac{\eta_{1,3}}{4}}^1} \cap \overline{Q_{\eta_{1,4}}^1}, (y, \tau) \in \overline{Q_{\eta_{1,3}}^2} \setminus \overline{U_{\eta_{1,5}}^2(x, t)}\}$ . Тоді існує  $\delta_{1,5} = \delta_{1,5}(\varepsilon) \in (0, \delta_{1,4})$  таке, що для довільних  $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\|z\| < \delta_{1,5}$ ,  $|z_0| < \delta_{1,5}$ ,  $(x, t) \in \overline{Q_{\frac{\eta_{1,3}}{2}}^1} \cap \overline{Q_{\eta_{1,4}}^1} \subset \overline{Q_{\frac{\eta_{1,3}}{4}}^1} \cap \overline{Q_{\eta_{1,4}}^1}$ ,  $(y, \tau) \in \overline{Q_{\eta_{1,3}}^2} \setminus \overline{U_{\eta_{1,5}}^2(x, t)}$  при  $\mu\beta_0 + 2\gamma > -2$ , виконується  $|\widehat{g}_1(x+z, t+z_0; y, \tau) - \widehat{g}_1(x, t; y, \tau)| < \frac{\varepsilon}{72A_3^1}$ , де

$$A_3^1 = \int_{Q_{\eta_{1,3}}^2 \setminus U_{\eta_{1,5}}^2(x,t)} (\widetilde{C}_2'')^{\beta_0} [\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0}{2}} \tau^\gamma dyd\tau, \text{ а тоді}$$

$$\int_{Q_{\eta_{1,3}}^2 \setminus U_{\eta_{1,5}}^2(x,t)} |\widehat{g}'_{12}(x+z, t+z_0; y, \tau) - \widehat{g}'_{12}(x, t; y, \tau)| dyd\tau \leq \frac{\varepsilon}{72}. \quad (21)$$

Отже, при  $(x, t) \in \overline{Q_{\frac{\eta_{1,3}}{2}}^1} \cap \overline{Q_{\eta_{1,4}}^1}$  із (20), (21) одержуємо: існує  $\delta_{1,5} = \delta_{1,5}(\varepsilon) > 0$  таке, що для довільних  $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\|z\| < \delta_{1,5}$ ,  $|z_0| < \delta_{1,5}$

$$J_{122}^1(x, t; z, z_0) = \int_{Q_{\eta_{1,3}}^2} |\widehat{g}'_{12}(x+z, t+z_0; y, \tau) - \widehat{g}'_{12}(x, t; y, \tau)| dyd\tau \leq$$

$$\leq \int_{U_{\eta_{1,5}}^2(x,t)} |\widehat{g}'_{12}(x,t;y,\tau)| dyd\tau + \int_{U_{\eta_{1,5}}^2(x,t)} |\widehat{g}'_{12}(x+z,t+z_0;y,\tau)| dyd\tau + \\ + \int_{Q_{\eta_{1,3}}^2 \setminus U_{\eta_{1,5}}^2(x,t)} |\widehat{g}'_{12}(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}'_{12}(x,t;y,\tau)| dyd\tau < \frac{\varepsilon}{24}, \text{ а отже,} \\ \sup_{(x,t) \in \overline{Q_{\frac{\eta_{1,3}}{2}}^1} \cap Q_{\eta_{1,4}}^1} J_{122}^1(x,t;z,z_0) < \frac{\varepsilon}{24}.$$

При  $(x,t) \in \overline{Q_{\frac{\eta_{1,3}}{2}}^1} \setminus Q_{\eta_{1,4}}^1$ ,  $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\|z\| \leq \delta_{1,4} (< \frac{1}{4}\eta_{1,3})$ ,  $|z_0| \leq \delta_{1,4}$  ( $< \frac{1}{4}\eta_{1,3}$ ), маємо  $(x+z,t+z_0) \in Q_{\frac{\eta_{1,3}}{4}}^1$ . При  $(x,t) \in \overline{Q_{\frac{\eta_{1,3}}{4}}^1} \setminus Q_{\eta_{1,4}}^1$ ,  $(y,\tau) \in Q_{\eta_{1,3}}^2$ ,  $(x,t) \neq (y,\tau)$ , тому функція  $\widehat{g}_1(x,t;y,\tau)$  – рівномірно неперервна в  $V_3 = \{(x,t;y,\tau) : (x,t) \in \overline{Q_{\frac{\eta_{1,3}}{4}}^1} \setminus Q_{\eta_{1,4}}^1, (y,\tau) \in \overline{Q_{\eta_{1,3}}^2}\}$ . Тоді існує  $\delta_{1,6} = \delta_{1,6}(\varepsilon) \in (0, \delta_{1,4}]$  таке, що для довільних  $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\|z\| < \delta_{1,6}$ ,  $|z_0| < \delta_{1,6}$ ,  $(x,t) \in \overline{Q_{\frac{\eta_{1,3}}{2}}^1} \setminus Q_{\eta_{1,4}}^1 \subset \overline{Q_{\frac{\eta_{1,3}}{4}}^1} \setminus Q_{\eta_{1,4}}^1$ ,  $(y,\tau) \in \overline{Q_{\eta_{1,3}}^2}$  при  $\mu\beta_0 + 2\gamma > -2$ , виконується  $|\widehat{g}_1(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}_1(x,t;y,\tau)| < \frac{\varepsilon}{72A_4^1}$ , де

$$A_4^1 = \int_{Q_{\eta_{1,3}}^2} (\widetilde{C}_2'')^{\beta_0} [\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0}{2}} \tau^\gamma dyd\tau, \text{ а тоді} \\ \sup_{(x,t) \in \overline{Q_{\frac{\eta_{1,3}}{2}}^1} \setminus Q_{\eta_{1,4}}^1} \int_{Q_{\eta_{1,3}}^2} |\widehat{g}'_{12}(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}'_{12}(x,t;y,\tau)| dyd\tau \leq \frac{\varepsilon}{72}.$$

При  $(x,t) \in \overline{Q^1} \setminus \overline{Q_{\frac{\eta_{1,3}}{2}}^1}$ ,  $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\|z\| \leq \delta_{1,4} (< \frac{\eta_{1,3}}{4})$ ,  $|z_0| \leq \delta_{1,4} (< \frac{\eta_{1,3}}{4})$  буде  $(x+z,t+z_0) \in Q^1 \setminus Q_{\frac{3\eta_{1,3}}{4}}^1 \subset Q^1$ , або  $(x+z,t+z_0) \notin Q^1$ . При  $(x,t) \in \overline{Q^1} \setminus \overline{Q_{\frac{3\eta_{1,3}}{4}}^1}$ ,  $(y,\tau) \in Q_{\eta_{1,3}}^2$ ,  $\|x-y\| \geq \frac{\eta_{1,3}}{4}$ ,  $|t-\tau| \geq \eta_{1,3}^2(1 - (\frac{3}{4})^2)$ , а тоді  $(x,t) \neq (y,\tau)$ . Тому за рівномірною неперервністю функції  $\widehat{g}_1(x,t;y,\tau)$  на замкненій множині  $V_4 = (\overline{Q^1} \setminus \overline{Q_{\frac{3\eta_{1,3}}{4}}^1}) \times \overline{Q_{\eta_{1,3}}^2}$ , враховуючи, що  $-\mu \geq 0$ ,  $[\varrho_1(x)]^{-\mu} \leq 1$ , одержуємо: існує  $\delta_{1,7} = \delta_{1,7}(\varepsilon) \in (0, \delta_{1,4}]$  таке, що для довільних  $(x,t) \in (\overline{Q^1} \setminus \overline{Q_{\frac{\eta_{1,3}}{2}}^1}) \subset (\overline{Q^1} \setminus \overline{Q_{\frac{3\eta_{1,3}}{4}}^1})$ ,  $(y,\tau) \in \overline{Q_{\eta_{1,3}}^2}$ ,  $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\|z\| < \delta_{1,7}$ ,  $|z_0| < \delta_{1,7}$ , виконується  $|\widehat{g}_1(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}_1(x,t;y,\tau)| < \frac{\varepsilon}{24A_4^1}$ , звідки

$$\sup_{\substack{(x,t) \in \overline{Q^1} \setminus \overline{Q_{\frac{\eta_{1,3}}{2}}^1} \\ (x+z,t+z_0) \in Q^1}} J_{122}^1(x,t;z,z_0) < \frac{\varepsilon}{24A_4^1} \int_{Q_{\eta_{1,3}}^2} (\widetilde{C}_2'')^{\beta_0} [\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0}{2}} \tau^\gamma dyd\tau = \frac{\varepsilon}{24}.$$

Для тих точок  $(x,t) \in \overline{Q^1} \setminus \overline{Q_{\frac{\eta_{1,3}}{2}}^1}$ ,  $(y,\tau) \in Q_{\eta_{1,3}}^2$ ,  $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\|z\| < \delta_{1,4}$ ,  $|z_0| < \delta_{1,4}$ , для яких  $(x+z,t+z_0) \notin Q^1$ , матимемо

$$\sup_{\substack{(x,t) \in \overline{Q^1} \setminus \overline{Q_{\frac{\eta_{1,3}}{2}}^1} \\ (x+z,t+z_0) \notin Q^1}} J_{122}^1(x,t;z,z_0) \leq \sup_{\substack{(x,t) \in \overline{Q^1} \setminus \overline{Q_{\frac{\eta_{1,3}}{2}}^1} \\ (x+z,t+z_0) \notin Q^1}} \int_{Q_{\eta_{1,3}}^2} |\widehat{g}_1(x,t;y,\tau)| (\widetilde{C}_2'')^{\beta_0} \eta_{1,3}^{\frac{\mu\beta_0}{2}} \tau^\gamma dyd\tau \leq \\ \leq \widehat{C}_0' (\widetilde{C}_2'')^{\beta_0} \eta_{1,3}^{\frac{\mu\beta_0}{2} + \gamma - \mu} \leq \frac{\varepsilon}{24}, \text{ де остання нерівність виконується згідно з вибором} \\ \text{числа } \eta_{1,3}. \text{ Зауважимо, що при } \mu < \frac{2\gamma}{1-\beta_0} \text{ також } \frac{\mu\beta_0}{2} + \gamma - \mu > 0.$$

Показано існування  $\widetilde{\delta}_2 = \min\{\delta_{1,5}; \delta_{1,6}; \delta_{1,7}\} > 0$  такого, що для довільних  $(x,t) \in \overline{Q^1}$ ,  $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\|z\| < \widetilde{\delta}_2$ ,  $|z_0| < \widetilde{\delta}_2$   $J_{12}^1(x,t;z,z_0) < \frac{\varepsilon}{12}$ .

**I<sub>3</sub>.** Розглянемо для довільних  $(x,t) \in \overline{Q^1}$   $J_{13}^1(x,t;z,z_0) = \widetilde{A}_2 \int_{Q^3} |\widehat{g}_1(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widehat{g}_1(x,t;y,\tau)| dyd\tau$ , де  $\widetilde{A}_2 = (\widetilde{C}_3'')^{\beta_0} (\frac{\varepsilon_0}{2})^\gamma$ .

За заданим  $\delta_0 > 0$  вибираємо число  $\eta_{1,6} < \frac{\varepsilon_0}{2}$  таке, щоб  $m(Q^1 \setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{2}}) \leq \delta_0$ . Тоді

$$\sup_{(x,t) \in \overline{Q^1}} J_{13}^1(x,t; z, z_0) = \max \left\{ \sup_{(x,t) \in \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{2}}}} J_{13}^1(x,t; z, z_0); \sup_{(x,t) \in Q^1 \setminus \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{2}}}} J_{13}^1(x,t; z, z_0) \right\}.$$

Вибираємо також  $\eta_{1,6} < \left( \frac{\varepsilon}{12A_2\tilde{C}'_0} \right)^{-\frac{1}{\mu}}$ .

Розглянемо для довільних  $(x,t) \in \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{2}}}$  інтеграл  $J_{13}^1(x,t; z, z_0)$ .

Виберемо  $\delta_{1,8} < \min\{\delta_0, \frac{\eta_{1,6}}{4}\}$ . При  $(x,t) \in \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{2}}}$ ,  $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\|z\| \leq \delta_{1,8}$  ( $< \frac{\eta_{1,6}}{4}$ ),  $|z_0| \leq \delta_{1,8}$  ( $< \frac{\eta_{1,6}}{4}$ ) маємо  $(x+z, t+z_0) \in \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{4}}} \subset Q^1$ . Функція  $\hat{g}_1(x,t; y, \tau)$  – рівномірно неперервна в області  $V_5 = \{(x,t; y, \tau) : (x,t) \in \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{4}}}, (y, \tau) \in \overline{Q^3}\}$ . Тому існує  $\delta_{1,9} = \delta_{1,9}(\varepsilon) \in (0, \delta_{1,8}]$  таке, що для довільних  $(x,t) \in \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{2}}} \subset \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{4}}}$ ,  $(y, \tau) \in \overline{Q^3}$ ,  $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\|z\| < \delta_{1,9}$ ,  $|z_0| < \delta_{1,9}$

$$|\hat{g}_1(x+z, t+z_0; y, \tau) - \hat{g}_1(x, t; y, \tau)| < \frac{\varepsilon}{12m(Q)\tilde{A}_2},$$
 а тоді

$$\sup_{(x,t) \in \overline{Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{2}}}} \tilde{A}_2 \int_{Q^3} |\hat{g}_1(x+z, t+z_0; y, \tau) - \hat{g}_1(x, t; y, \tau)| dy d\tau \leq \frac{\varepsilon \cdot \tilde{A}_2}{12m(Q)\tilde{A}_2} \int_{Q^3} dy d\tau \leq \frac{\varepsilon}{12}.$$

Розглянемо для довільних  $(x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{2}}}$

$$\tilde{A}_2 \int_{Q^3} |\hat{g}_1(x+z, t+z_0; y, \tau) - \hat{g}_1(x, t; y, \tau)| dy d\tau = J_{131}(x,t; z, z_0) + J_{132}(x,t; z, z_0),$$
 де

в  $J_{131}(x,t; z, z_0)$  інтегрування є за  $Q^3_{\eta_{1,6}}$ , в  $J_{132}(x,t; z, z_0)$  – за  $Q^3 \setminus Q^3_{\eta_{1,6}}$ ,  $Q^3_{\eta_{1,6}}$  – підобласть області  $Q^3$  така, що відстань від довільної точки  $(y, \tau) \in Q^3$  до межі області  $Q^3$  більша або рівна  $\eta_{1,6}$ . За заданим  $\delta_0 > 0$  вибираємо число  $\eta_{1,6} < \frac{\varepsilon_0}{2}$  таке, щоб  $m(Q^3 \setminus Q^3_{\eta_{1,6}}) \leq \delta_0$ .

За рівномірною неперервністю функції  $\hat{g}_1(x,t; y, \tau)$  в області  $V_6 = \{(x,t; y, \tau) : (x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{3\eta_{1,6}}{4}}}, (y, \tau) \in \overline{Q^3_{\eta_{1,6}}}\}$  одержуємо: існує

$$\delta_{1,10} = \delta_{1,10}(\varepsilon) \in (0, \delta_{1,8}]$$
 таке, що для довільних  $(x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{2}}} \subset \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{3\eta_{1,6}}{4}}}$ ,

$(y, \tau) \in \overline{Q^3_{\eta_{1,6}}}$ ,  $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\|z\| < \delta_{1,10}$ ,  $|z_0| < \delta_{1,10}$ , виконується

$$|\hat{g}_1(x+z, t+z_0; y, \tau) - \hat{g}_1(x, t; y, \tau)| < \frac{\varepsilon}{12m(Q)\tilde{A}_2},$$
 а тоді

$$\sup_{(x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{2}}}} J_{131}(x,t; z, z_0) \leq \frac{\varepsilon}{12m(Q)\tilde{A}_2} \cdot \tilde{A}_2 \int_{Q^3_{\eta_{1,6}}} dy d\tau \leq \frac{\varepsilon}{12}.$$

За лемою 3 (враховуючи, що  $-\mu \geq 0$ ,  $[\varrho_1(x)]^{-\mu} \leq 1$ ) існує  $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ , існує відповідне  $\eta_{1,6}$  такі, що для довільних  $(x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{2}}}$  та  $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  таких, що  $(x+z, t+z_0) \in Q^1$  матимемо

$$\begin{aligned} \sup_{(x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{2}}}} J_{132}(x,t; z, z_0) &\leq \tilde{A}_2 \sup_{(x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{2}}}} \left( \int_{Q^3 \setminus Q^3_{\eta_{1,6}}} |\hat{g}_1(x+z, t+z_0; y, \tau)| dy d\tau + \right. \\ &+ \left. \int_{Q^3 \setminus Q^3_{\eta_{1,6}}} |\hat{g}_1(x, t; y, \tau)| dy d\tau \right) \leq \frac{\varepsilon}{12A_2} \cdot \tilde{A}_2 \leq \frac{\varepsilon}{12}. \end{aligned}$$

При  $(x,t) \in \overline{Q^1 \setminus Q^1_{\frac{\eta_{1,6}}{2}}}$ ,  $(y, \tau) \in \overline{Q^3}$ ,  $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\|z\| < \delta_{1,8}$ ,  $|z_0| < \delta_{1,8}$ , для яких  $(x+z, t+z_0) \notin Q^1$ , з використанням лема 1 матимемо

$$\sup_{\substack{(x,t) \in \overline{Q^1} \setminus Q_{\eta_{1,6}}^1 \\ (x+z, t+z_0) \notin Q^1}} \mathcal{J}_{13}^1(x, t; z, z_0) \leq \widetilde{A}_2 \eta_{1,6}^{-\mu} \sup_{\substack{(x,t) \in Q^1 \setminus Q_{\eta_{1,6}}^1 \\ (x+z, t+z_0) \notin Q^1}} \int |G(x, t; y, \tau)| dy d\tau \leq \widetilde{C}'_0 \cdot \widetilde{A}_2 \cdot \eta_{1,6}^{-\mu} \leq \frac{\varepsilon}{12},$$

де остання нерівність виконується згідно з вибором числа  $\eta_{1,6}$ .

Показано, що існує  $\widetilde{\delta}_3 = \min\{\delta_{1,9}; \delta_{1,10}\} > 0$  таке, що для довільних  $(x, t) \in \overline{Q^1}$ ,  $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\|z\| < \widetilde{\delta}_3$ ,  $|z_0| < \widetilde{\delta}_3$   $\mathcal{J}_{13}^1(x, t; z, z_0) < \frac{\varepsilon}{12}$ .

Розглянемо

$$\mathcal{J}_2^1(x, t; z, z_0) = [\varrho_1(x+z)]^{-\mu} \int_t^{t+z_0} d\tau \int_{\Omega} |G(x+z, t+z_0; y, \tau)| \cdot |f_0(y, \tau, v(y, \tau))| dy.$$

Проводячи подібні міркування та враховуючи, що  $m(\Omega \times (t, t+z_0)) = m(\Omega) \cdot |z_0|$ , за лемою 6 одержуємо: існує  $\widetilde{\delta}_4 = \widetilde{\delta}_4(\varepsilon) > 0$  таке, що для довільних  $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\|z\| < \widetilde{\delta}_4$ ,  $|z_0| < \widetilde{\delta}_4$  та довільних  $v \in \mathcal{M}_{\mu, \widetilde{C}}(Q, \partial Q)$   $\sup_{(x,t) \in \overline{Q^1}} \mathcal{J}_2^1(x, t; z, z_0) < \frac{\varepsilon}{4}$ .

Отже, існує  $\widehat{\delta}_1 = \min\{\widetilde{\delta}_1; \widetilde{\delta}_2; \widetilde{\delta}_3; \widetilde{\delta}_4\} > 0$  таке, що для довільних  $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\|z\| < \widehat{\delta}_1$ ,  $|z_0| < \widehat{\delta}_1$  виконується  $\sup_{(x,t) \in \overline{Q^1}} \mathcal{J}^1(x, t; z, z_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Подібно проводимо оцінки інтегралів при  $(x, t) \in \overline{Q^2}$  та  $(x, t) \in \overline{Q^3}$  і доводимо існування  $\widehat{\delta}_2, \widehat{\delta}_3 > 0$  таких, що для довільних  $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\|z\| < \min\{\widehat{\delta}_2; \widehat{\delta}_3\}$ ,  $|z_0| < \min\{\widehat{\delta}_2; \widehat{\delta}_3\}$  виконується  $\sup_{(x,t) \in \overline{Q^2}} \mathcal{J}^2(x, t; z, z_0) < \frac{\varepsilon}{2}$  та  $\sup_{(x,t) \in \overline{Q^3}} \mathcal{J}^3(x, t; z, z_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Зауважимо, що при оцінюванні інтеграла  $\mathcal{J}^2$ , коли  $(x, t) \in \overline{Q^2}$ ,  $(y, \tau) \in Q^1$  виникає додаткова умова  $\mu\beta_0 - \frac{\mu}{2} > 0$ , а коли  $(x, t) \in \overline{Q^2}$ ,  $(y, \tau) \in Q^2$  – умова  $\frac{\mu\beta_0}{2} + \gamma - \frac{\mu}{2} > 0$ .

Отже, множина  $\{H_1 v : v \in \mathcal{M}_{\mu, \widetilde{C}}(Q, \partial Q)\}$  – одностайно неперервна. Таким чином, оператор  $H_1$  є компактним на  $\mathcal{M}_{\mu, \widetilde{C}}(Q, \partial Q)$ .

Покажемо, що  $H_1$  – неперервний оператор на  $\mathcal{M}_{\mu, \widetilde{C}}(Q, \partial Q)$ .

Знайдемо оцінку  $H_1 v - H_1 w$  при  $v, w \in \mathcal{M}_{\mu, \widetilde{C}}(Q, \partial Q)$ . Маємо

$$\begin{aligned} |H_1 v - H_1 w| &\leq \int_0^t d\tau \int_{\Omega} |G(x, t; y, \tau)| \cdot ||v(y, \tau)|^{\beta_0} - |w(y, \tau)|^{\beta_0}| \cdot \tau^\gamma dy. \text{ Використовуючи} \\ &\text{лему 1 при } \mu\beta_0 > -1, \mu\beta_0 + 2\gamma > -2, \text{ знаходимо} \\ &\int_0^t d\tau \int_{\Omega} |G(x, t; y, \tau)| \cdot ||v(y, \tau)|^{\beta_0} - |w(y, \tau)|^{\beta_0}| \tau^\gamma dy \leq \int_0^t d\tau \int_{\Omega} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} |G(x, t; y, \tau)| \times \\ &\times \left( \sup_{(y,\tau) \in \overline{Q^1}} [\varrho_1(y)]^{-\mu} ||v(y, \tau)| - |w(y, \tau)|| \right)^{\beta_0} \tau^\gamma dy \leq ||v - w; \partial Q||_{\mu}^{\beta_0} \int_0^t d\tau \int_{\Omega} [\varrho_1(y)]^{\mu\beta_0} \times \\ &\times |G(x, t; y, \tau)| \tau^\gamma dy \leq ||v - w; \partial Q||_{\mu}^{\beta_0} \widetilde{C}'_{\mu\beta_0} \left( [\varrho_1(x)]^{\mu\beta_0+1-n} + 1 \right), (x, t) \in Q^1; \\ &\int_0^t d\tau \int_{\Omega} |G(x, t; y, \tau)| \cdot ||v(y, \tau)|^{\beta_0} - |w(y, \tau)|^{\beta_0}| \tau^\gamma dy \leq \int_0^t d\tau \int_{\Omega} [\varrho_2(\tau)]^{\frac{\mu\beta_0}{2}} |G(x, t; y, \tau)| \times \\ &\times \left( \sup_{(y,\tau) \in \overline{Q^2}} [\varrho_2(\tau)]^{-\frac{\mu}{2}} ||v(y, \tau)| - |w(y, \tau)|| \right)^{\beta_0} \tau^\gamma dy \leq \\ &\leq ||v - w; \partial Q||_{\mu}^{\beta_0} \widetilde{C}'_{\frac{\mu\beta_0}{2}} \left( [\varrho_2(t)]^{\frac{\mu\beta_0+2\gamma+2-n}{2}} + 1 \right), (x, t) \in Q^2; \\ &\int_0^t d\tau \int_{\Omega} |G(x, t; y, \tau)| \cdot ||v(y, \tau)|^{\beta_0} - |w(y, \tau)|^{\beta_0}| \cdot \tau^\gamma dy \leq \int_0^t d\tau \int_{\Omega} |G(x, t; y, \tau)| \times \\ &\times \left( \sup_{(y,\tau) \in \overline{Q^3}} |v(y, \tau) - w(y, \tau)| \right)^{\beta_0} \cdot \tau^\gamma dy \leq \widetilde{C}'_0 ||v - w; \partial Q||_{\mu}^{\beta_0}, (x, t) \in Q^3. \end{aligned}$$

При  $v, w \in \mathcal{M}_{\mu, \widetilde{C}}(Q, \partial Q)$  одержуємо

$$\begin{aligned} \|H_1 v - H_1 w; \partial Q\|_\mu &= \max\left\{ \sup_{(x,t) \in \overline{Q^1}} [\varrho_1(x)]^{-\mu} |H_1 v - H_1 w|; \sup_{(x,t) \in \overline{Q^2}} [\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu}{2}} |H_1 v - H_1 w|; \right. \\ &\left. \sup_{(x,t) \in \overline{Q^3}} |H_1 v - H_1 w| \right\} \leq \|v - w\|; \partial Q\|_\mu^{\beta_0} \max\left\{ \sup_{(x,t) \in \overline{Q^1}} \tilde{C}'_{\mu\beta_0} \left( [\varrho_1(x)]^{\mu(\beta_0-1)+1-n} + [\varrho_1(x)]^{-\mu} \right); \right. \\ &\left. \sup_{(x,t) \in \overline{Q^2}} \tilde{C}'_{\mu\beta_0} \left( [\varrho_2(t)]^{\frac{\mu(\beta_0-1)+2\gamma+2-n}{2}} + [\varrho_2(t)]^{-\frac{\mu}{2}} \right); \tilde{C}'_0 \right\}. \end{aligned}$$

Звідси, враховуючи умови на  $\mu$  випливає, що  $H_1$  неперервний оператор в  $\mathcal{M}_{\mu, \tilde{C}}(Q, \partial Q)$ . За теоремою Шаудера та за умов лем 4, 5, 6, рівняння (5) має розв'язок  $u \in \mathcal{M}_\mu(Q, \partial Q)$ .

З нерівності на  $\mu$ , одержуємо умови  $\max\{q_1, q_2 - 1\} < \frac{1}{\beta_0} - n - 1$ ,  $\max\{q_1, q_2 - 1\} < \frac{2(\gamma+1)}{\beta_0} - n - 1$ , які зв'язують порядки сингулярностей крайових, початкової функцій із виглядом функції у правій частині рівняння (2).

**Висновок.** У статті розглянуто крайову задачу для рівняння  $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = |u|^{\beta_0} t^\gamma$ , де  $\beta_0 \in (0, 1)$ ,  $\gamma \in (-1, 0)$ , коли задані на межі функції є узагальненими з просторів типу  $D'$ . Використовуючи властивості функції Гріна цієї задачі та теорему Шаудера про нерухому точку, встановлено характер поведінки розв'язку цієї задачі біля межі області.

### Список використаної літератури

1. Лопушанська Г.П. Крайові задачі у просторі узагальнених функцій  $D'$ . – Л.: Вид-во Львів. нац. ун-ту ім. І. Франка, 2002. – 285 с.
2. Лопушанська Г. П. Про розв'язок параболічної граничної задачі із сильними степеневими особливостями в правих частинах // Математичні Студії. – 2001. – **15**, № 2. – С. 179–190.
3. Чмир О.Ю. Про формулювання узагальненої крайової задачі для півлінійного параболічного рівняння // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 134–143.
4. Lopushanska H. Solutions with strong power singularities to nonlinear elliptic boundary value problems // Матем. вісник НТШ. – 2006. – Т. 3. – С. 247–260.
5. Лопушанська Г.П., Чмир О.Ю. Узагальнені крайові значення розв'язків рівняння  $u_t = \Delta u + F_0(x, t, u)$  // Математичні Студії. – 2004. – **22**, № 1. – С. 45–56.
6. Sun Ren-bin. Local existence and blow-up for degenerate parabolic systems // J. Xiamen Univ. Natur. Sci. – 2003. – **42**, № 2. – р. 148–149.
7. Duan Zhi-wen, Zhou Li. Global and blow-up solutions for non-linear degenerate parabolic system // Math. Meth. Appl. Sci. – 2003. – **26**, № 7. – р. 557–587.
8. Voccardo L., Gallouët Th. Non-linear elliptic and parabolic equations involving measure data // J. Funct. Anal. – 1989. – Vol. 87. – р. 149–169.
9. Шилов Г.Е. Математический анализ. – М.: Наука. – 1965. – 328 с.
10. Ивасишен С.Д. Матрицы Грина параболических граничных задач. – К.: Выща школа. – 1990. – 200 с.
11. Эйдельман С.Д. Параболические системы. – М.: Наука. – 1964. – 443с.
12. Ивасишен С.Д. О композиции параболических ядер // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 1. – С. 35–45.
13. Лопушанська Г.П., Чмир О.Ю. Про деякі властивості спряжених операторів Гріна параболічної крайової задачі // Наук. вісник Чернів. ун-ту: зб. наук. пр. Математика. Чернівці ЧДУ. – 2004. – Вип. 191-192. – С. 82–88.
14. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

Одержано 25.03.2015