УДК 519.8

П. П. Антосяк (Ужгородський нац. ун-т)

АЛГОРИТМ ПОСЛІДОВНОГО АНАЛІЗУ ТА ВІДСІЮВАННЯ ВАРІАНТІВ ДЛЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ВПОРЯДКУВАННЯ АЛЬТЕРНАТИВ

In this paper procedures of sequential analysis and sifting of unviable variants are investigated. Based on modified procedure W and general algorithm of sequential analysis for the problems of discrete optimization, algorithm of finding of solution of the linear ordering problem are constructed.

У статті досліджено роботу процедур послідовного аналізу та відсіювання безперспективних варіантів за обмеженнями та за обмеженням на цільову функцію. На основі модифікованої процедури W і загальної схеми послідовного аналізу для задач дискретної оптимізації розроблено алгоритм знаходження розв'язку задачі лінійного впорядкування альтернатив.

Вступ. Задача лінійного впорядкування альтернатив (ЗЛВА) — це NP-складна задача комбінаторної оптимізації з широким застосуванням: у колективному прийнятті рішень, економіці, археології і календарному плануванні [1]. Розробці ефективних алгоритмів розв'язання цієї задачі присвячено багато робіт [2–5].

Постановка задачі. ЗЛВА можна сформулювати наступним чином. Розглянемо множину альтернатив $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ і перестановку $\pi : A \to A$. Кожна перестановка $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ однозначно визначає деяке лінійне впорядкування альтернатив. Позначимо через $e_{ij},\ i, j \in N = \{1, \dots, n\}$ ціну розміщення альтернативи A_i перед альтернативою A_j у лінійному порядку, а через E квадратну матрицю цін порядку n. Тоді ЗЛВА полягає у знаходженні такої перестановки π, при якій досягається максимальна сумарна ціна

$$E(\pi) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} e_{\pi_i \pi_j}. \tag{1}$$

Очевидно, що (1) є сумою елементів над головною діагоналлю матриці P, елементи p_{ij} якої є результатом перестановки π рядків і стовпців матриці E, тобто $P = XEX^T$, де X матриця, що відповідає перестановці π [1].

Як і у випадку більшості задач комбінаторної оптимізації, ЗЛВА має багато альтернативних формулювань. У роботі [2] задача лінійного впорядкування розглядається у еквівалентній постановці задачі лінійного програмування з булевими змінними.

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} d_{ij} x_{ij} \to \max, \tag{2}$$

$$x_{ij} + x_{jk} - x_{ik} \leqslant 1, \quad 1 \leqslant i < j < k \leqslant n, \tag{3}$$

$$-x_{ij} - x_{jk} + x_{ik} \leqslant 0, \quad 1 \leqslant i < j < k \leqslant n, \tag{4}$$

$$x_{ij} \in X_{ij}, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n, \tag{5}$$

де $d_{ij} = e_{ij} - e_{ji}$, $X_{ij} = \{0, 1\}$ — множини можливих варіантів значень компоненти x_{ij}, $X = \prod\limits_{j>i} X_{ij}$ — множина всіх можливих варіантів.

Процедури послідовного аналізу для ЗЛВА. Для задач дискретної оптимізації основою схем послідовного аналізу та відсіювання варіантів без по крокового конструювання розв'язку є процедура W [6] послідовного відсіву (виключення з розгляду, взагалі кажучи, на поточному кроці) значень змінних. Процедура W в свою чергу складається з двох процедур W_1 та W_2. Конкретизуємо їх для нашого випадку.

Виберемо довільні індекси $i, j, k \in N$, але такі, що $k > j > i$. Слідуючи загальній схемі послідовного аналізу та відсіву варіантів для задачі з лінійними обмеженнями, отримуємо наступні критерії відсіву по обмеженнях (процедура W_1 на s-у кроці $s \in \{1, \ldots, s_0\}$):

для фіксованих $j > i$, якщо

$$\left[\begin{array}{l} \bar{x}_{ij} > 1 - \min\limits_{X_{jk}^{(s)}} x_{jk} + \max\limits_{X_{ik}^{(s)}} x_{ik}, \\ \bar{x}_{ij} < -\max\limits_{X_{jk}^{(s)}} x_{jk} + \min\limits_{X_{ik}^{(s)}} x_{ik} \end{array}\right. \tag{6}$$

хоча б для одного $k : k > j > i$, то компонента x_{ij} допустимого розв'язку задачі (2)–(5) не може приймати значення, рівне $\bar{x}_{ij} \in X_{ij}^{(s)}$, де $X_{ij}^{(s)}$ — множина можливих варіантів компоненти x_{ij} на кроці s, $s \in \{1, \ldots, s_0\}$;

для фіксованих $k > j$, якщо

$$\left[\begin{array}{l} \bar{x}_{jk} > 1 - \min\limits_{X_{ij}^{(s)}} x_{ij} + \max\limits_{X_{ik}^{(s)}} x_{ik}, \\ \bar{x}_{jk} < -\max\limits_{X_{ij}^{(s)}} x_{ij} + \min\limits_{X_{ik}^{(s)}} x_{ik} \end{array}\right. \tag{7}$$

хоча б для одного $i : k > j > i$, то компонента x_{jk} допустимого розв'язку задачі (2)–(5) не може приймати значення, рівне $\bar{x}_{jk} \in X_{jk}^{(s)}$;

для фіксованих $k > i$, якщо

$$\left[\begin{array}{l} \bar{x}_{ik} > \min\limits_{X_{ij}^{(s)}} x_{ij} + \min\limits_{X_{jk}^{(s)}} x_{jk} - 1, \\ \bar{x}_{ik} < \max\limits_{X_{ij}^{(s)}} x_{ij} + \max\limits_{X_{jk}^{(s)}} x_{jk} \end{array}\right. \tag{8}$$

хоча б для одного $j : k > j > i$, то компонента x_{ik} допустимого розв'язку задачі (2)–(5) не може приймати значення, рівне $\bar{x}_{ik} \in X_{ik}^{(s)}$.

1) Нехай $|X_{ij}^{(s)}| \cdot |X_{jk}^{(s)}| \cdot |X_{ik}^{(s)}| \geqslant 4$. Здійснивши перебір всіх можливих випадків та проаналізувавши їх за відповідними критеріями (6)–(8), не важко переконатися, що відсіву в цій ситуації не буде.

2) Нехай $|X_{ij}^{(s)}| \cdot |X_{jk}^{(s)}| \cdot |X_{ik}^{(s)}| = 2$. Нехай $|X_{ij}^{(s)}| = 2$. Легко бачити, коли $X_{jk}^{(s)} = \{0\}$ і $X_{ik}^{(s)} = \{1\}$, то відбудеться відсів значення $\bar{x}_{ij} = 0$. Аналогічно, якщо $X_{jk}^{(s)} = \{1\}$ і $X_{ik}^{(s)} = \{0\}$, то відбудеться відсів значення $\bar{x}_{ij} = 1$. У випадку, коли $|X_{jk}^{(s)}| = 2$ і якщо $X_{ij}^{(s)} = \{0\}$, $X_{jk}^{(s)} = \{0, 1\}$, $X_{ik}^{(s)} = \{1\}$, то відсіюється значення $\bar{x}_{jk} = 0$, а у випадку $X_{ij}^{(s)} = \{1\}$, $X_{jk}^{(s)} = \{0, 1\}$, $X_{ik}^{(s)} = \{0\}$ буде відсіяно $\bar{x}_{jk} = 1$. При $|X_{ik}^{(s)}| = 2$, коли маємо $X_{ij}^{(s)} = \{0\}$, $X_{jk}^{(s)} = \{0\}$, $X_{ik}^{(s)} = \{0, 1\}$, то за критерієм (8) відсіюється значення $\bar{x}_{ik} = 1$, а якщо $X_{ij}^{(s)} = \{1\}$, $X_{jk}^{(s)} = \{1\}$, $X_{ik}^{(s)} = \{0, 1\}$, тоді

відсіюється $\bar{x}_{ik} = 0$. Аналогічно до попереднього випадку, здійснивши перебір всіх інших можливих ситуацій (які стосуються розглядуваного нами випадку), не важко переконатися, що відсіву за критеріями (6)–(8) більше не буде.

3) Нехай $|X_{ij}^{(s)}| = |X_{jk}^{(s)}| = |X_{ik}^{(s)}| = 1$. Якщо $X_{ij}^{(s)} = \{0\}$, $X_{jk}^{(s)} = \{0\}$ і $X_{ik}^{(s)} = \{1\}$, то за відповідним критерієм відсіву, зокрема, отримуємо $X_{ij}^{(s)} = \varnothing$. Якщо $X_{ij}^{(s)} = \{1\}$, $X_{jk}^{(s)} = \{1\}$ і $X_{ik}^{(s)} = \{0\}$, тоді, зокрема, також отримаємо $X_{ij}^{(s)} = \varnothing$. Такі варіанти унеможливлюють побудову жодного повного допустимого варіанту задачі (2)–(5) і описують ситуацію, коли на s-у кроці відбувається аварійне завершення процедури W_1. У всіх інших випадках, очевидно, відсіву не буде.

Із загальної схеми випливає, що критерієм відсіву за обмеженням на цільову функцію (процедура W_2 на s-у кроці ($s = 1, \ldots, s_0$)) буде:

якщо

$$d_{ij}\bar{x}_{ij} < e_s^* - \max_{X^{(s)}/X_{ij}^{(s)}} \left\{ \sum_{\substack{t>k \\ (k \neq i) \vee (t \neq j)}} d_{kt} x_{kt} \right\} =$$

$$= e_s^* - \sum_{\substack{t>k \\ (k \neq i) \vee (t \neq j)}} \max_{X_{kt}^{(s)}} \{d_{kt} x_{kt}\}, \quad (j > i), \qquad (9)$$

то компонента x_{ij} допустимого розв'язку задачі (2)–(5) не може приймати значення, рівне $\bar{x}_{ij}$, де e_s^* деяке значення взяте із проміжку $[\min_{X^{(s-1)}} E(x), \max_{X^{(s-1)}} E(x)]$.

При застосуванні процедури W_2 можливі наступні випадки.

Випадок 1. Не відбулося жодного відсіву. Тоді звуження множини можливих варіантів може відбутися, якщо посилити нерівності (9), що, очевидно, можливо зробити тільки посиленням обмеження на цільову функцію, вибравши, наприклад, значення e_{s+1}^* методом дихотомії із проміжку $[e_s^*, e_{\max}^{(s)}]$, де $e_{\max}^{(s)}$ — максимально можливе значення цільової функції на кроці s.

Випадок 2. Відсів відбувся, але скорочена множина можливих варіантів $X^{(s)}$ є порожньою або ж $X^{(s)} \neq \varnothing$, але на ній не існує жодного допустимого варіанту задачі (2)–(5). В цьому випадку здійснюється аварійне завершення роботи процедури W_2 . Відомо [6], що в цьому випадку будь-який допустимий варіант x_D задачі (2)–(5) задовольняє умові $E(x_D) < e_s^*$. Тоді розширення множини $X^{(s)}$ можна отримати зменшивши величину e_s^*, послаблюючи тим самим додаткове обмеження на цільову функцію, вибираючи $e_{s+1}^* < e_s^*$ за правилом дихотомії із проміжку $[e_{\min}^{(s)}, e_s^*]$, де $e_{\min}^{(s)}$ — мінімально можливе значення цільової функції на кроці s.

Твердження 1. *Для ЗЛВА в результаті роботи процедури W_2 не може бути відсіяним значення $x_{ij}^{(\max)} = arg \max_{X_{ij}^{(s-1)}} \{d_{ij} x_{ij}\}$, $\forall\ i, j \in N$, $j > i$ та $\forall\ s \in \{1, \ldots, s_0\}$.*

Доведення. Припустимо протилежне. Нехай $\bar{S} \subseteq \{1, \ldots, s_0\}$ множина всіх кроків для яких справедливе наше припущення. І нехай $\tilde{s} = arg \min_{s \in \bar{S}} s$ перший із цих кроків (саме на цьому кроці W_2 вперше зробить відсів за припущенням), на якому знайдеться хоча б одна пара індексів $j > i$ така, що

$$d_{ij}x_{ij}^{(\max)} < e_{\tilde{s}}^* - \sum_{\substack{t>k \\ (k\neq i)\vee(t\neq j)}} \max_{X_{kt}^{(\tilde{s})}}\{d_{kt}x_{kt}\}. \tag{10}$$

Нехай $N_i^{(\tilde{s})}$, $N_j^{(\tilde{s})}$ — множини, що повністю описують всі пари індексів $j > i$, $i \in N_i^{(\tilde{s})}$, $j \in N_i^{(\tilde{s})}$, для яких на кроці $\tilde{s}$ виконується (10). Візьмемо спочатку першу із таких пар $j_{\tilde{s}} > i_{\tilde{s}}$ (саме для цієї пари W_2 вперше зробить відсів за припущенням), тобто $i_{\tilde{s}} = arg \min\limits_{i \in N_i^{(\tilde{s})}} i$ та $j_{\tilde{s}} = arg \min\limits_{j \in N_j^{(\tilde{s})}} j$. В цьому випадку правило вибору $\tilde{s}$ та пари $j_{\tilde{s}} > i_{\tilde{s}}$ дає змогу переписати нерівність (10) у наступному еквівалентному вигляді:

$$\max_{X_{i_{\tilde{s}}j_{\tilde{s}}}^{(\tilde{s}-1)}}\{d_{ij}x_{ij}\} + \sum_{\substack{t>k \\ (k\neq i_{\tilde{s}})\vee(t\neq j_{\tilde{s}})}} \max_{X_{kt}^{(\tilde{s}-1)}}\{d_{kt}x_{kt}\} < e_{\tilde{s}}^*,$$

звідки отримуємо співвідношення

$$e_{\max}^{(\tilde{s})} < e_{\tilde{s}}^*. \tag{11}$$

Але (11) суперечить правилу вибору на довільному кроці s значення e_s^* із проміжку $[e_{\min}^{(s)}, e_{\max}^{(s)}]$. Проводячи аналогічні міркування, через скінченну кількість кроків спочатку переконуємося у неможливості нашого припущення для кроку $\tilde{s}$, а потім послідовно провівши аналогічні міркування для інших кроків приходимо до правильності твердження.

Наслідок 1. *Для ЗЛВА не може виникнути перша ситуація описана у випадку 2.*

Наслідок 2. *Для ЗЛВА відсів значень компоненти x_{ij} за обмеженням на цільову функцію може відбутися лише у випадку, коли $|X_{ij}^{(s-1)}| = 2$, причому відсіяним може бути лише значення $x_{ij}^{(\min)} = arg \min\limits_{X_{ij}^{(s-1)}}\{d_{ij}x_{ij}\}$, $\forall\ i, j \in N$, $j > i$ та $\forall\ s \in \{1, \ldots, s_0\}$.*

Наслідок 3. *Для ЗЛВА умова відсіву по цільовій функції може бути переписана у наступному еквівалентному вигляді:*

якщо

$$d_{ij}x_{ij}^{(\min)} < e_s^* - e_{\max}^{(s)} + \max_{X_{ij}^{(s-1)}}\{d_{ij}x_{ij}\}, \tag{12}$$

то компонента x_{ij} допустимого розв'язку задачі (2)–(5) не може приймати значення, рівне $x_{ij}^{(\min)}$.

Із (12) отримуємо:

$$e_{\max}^{(s)} + \min_{X_{ij}^{(s-1)}}\{d_{ij}x_{ij}\} - \max_{X_{ij}^{(s-1)}}\{d_{ij}x_{ij}\} < e_s^*, \tag{13}$$

Із вигляду (13) випливає, що при заданому значенні e_s^*, якщо відсіюється значення $x_{i_1j_1}^{(\min)}$ і виконується

$$\min_{X_{i_1j_1}^{(s-1)}}\{d_{i_1j_1}x_{i_1j_1}\} - \max_{X_{i_1j_1}^{(s-1)}}\{d_{i_1j_1}x_{i_1j_1}\} \geq \min_{X_{i_2j_2}^{(s-1)}}\{d_{i_2j_2}x_{i_2j_2}\} - \max_{X_{i_2j_2}^{(s-1)}}\{d_{i_2j_2}x_{i_2j_2}\},$$

то відсіяним буде також значення $x^{(\min)}_{i_2 j_2}$. Тоді для того, щоб не виникла друга ситуація випадку 2 необхідно, щоб, зокрема, допустимим був відсів всіх значень $x^{(\min)}_{i^* j^*}$, де

$$(i^*, j^*) \in Arg \min_{(i,j):i<j} \{ \min_{X_{ij}^{(s-1)}} \{d_{ij} x_{ij}\} - \max_{X_{ij}^{(s-1)}} \{d_{ij} x_{ij}\}\}.$$

Відмітимо, що відсіву всіх таких значень можна домогтися ввівши строге обмеження на цільову функцію $E(x) > e^*_s$ і вибираючи

$$e^*_s = e^{(s)}_{\max} + \min_{(i,j):i<j} \{ \min_{X_{ij}^{(s-1)}} \{d_{ij} x_{ij}\} - \max_{X_{ij}^{(s-1)}} \{d_{ij} x_{ij}\}\}.$$

Алгоритм.

Крок 1. Обчислення значень $e^{(s)}_{\max}$ та e^*_s. Перехід до наступного кроку.

Крок 2. Застосування процедури W_2, тобто відсів всіх значень $x^{(\min)}_{i^* j^*}$, де

$$(i^*, j^*) \in Arg \max_{(i,j):\begin{cases} i<j \\ |X_{ij}^{(s-1)}|=2 \end{cases}} |e_{ij} - e_{ji}|.$$

Перехід до наступного кроку.

Крок 3. Застосування процедури W_1. При аварійному завершенні процедури W_1 здійснюється відновлення всіх відсіяних на поточному та попередньому кроці значень і завершення роботи алгоритму. Інакше, якщо $\prod_{j>i} |X_{ij}^{(s)}| = 1$, то кінець алгоритму, інакше — перехід до кроку 1.

Висновок. Запропонований алгоритм є простим з точки зору реалізації. Якщо знайдений варіант розв'язку $\hat{x}$ задовольняє умову $E(\hat{x}) > e^*_{s_0}$, то він є оптимальним варіантом [6]. Якщо $E(\hat{x}) \le e^*_{s_0}$, то варіант $\hat{x}$ можна вибрати в якості наближеного розв'язку. В разі аварійного завершення процедури W_1 отримуємо скорочення множини можливих варіантів.

1. *Reinelt G.* The linear ordering problem: algorithms and applications. Research and Exposition in Mathematics.– Berlin, Germany: Heldermann Verlag, 1985.
2. *Grötschel M., Jünger M., Reinelt G.* A cutting plane algorithm for the linear ordering problem // Operations Research. – 1984.– vol. 2.– № 6.– pp. 1195-1220.
3. *Chanas S., Kobylański P.* A new heuristic algorithm solving the linear ordering problem// Computational Optimization and Applications. – 1996.– vol. 6.– pp. 191-205.
4. *Laguna M., Martí R., Campos V.* Intensification and diversification with elite tabu search solutions for the linear ordering problem// Computers & Operations Research. –1999. – vol. 26, pp. 1217-1230.
5. *Campos V., Glover F., Laguna M., Martí R.* An experimental evaluation of a scatter search for the linear ordering problem// Journal of Global Optimization. – 2001. – vol. 21. – № 4. – pp. 397-414.
6. *Волкович В.Л., Волошин А.Ф.* Об одной схеме метода последовательного анализа и отсеивания вариантов//Кибернетика. – 1978. – №4. – С. 98-105.

Одержано 16.06.2009