УДК 519.853.6

М.Д. Бабич (Український держ. ун-т фінансів та міжнародної торгівлі)
О.М. Гецко (Ужгородский нац. ун-т)

ПРО ОДИН МЕТОД НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

We consider approach to the reduction of nonlinear optimal control problem to problem of global solving of corresponding system of nonlinear scalar equations.

Розглядається підхід щодо зведення нелінійної задачі оптимального керування до задачі глобального розв'язування відповідної системи нелінійних скалярних рівнянь.

Вступ. Важливими задачами, що часто виникають в результаті дослідження складних математичних моделей різних природничих явищ і технологічних процесів є задачі оптимізації. На математичній мові такі задачі формулюються як задачі відшукання екстремуму (мінімуму, максимуму або обох разом) деякої функції або функціонала $\varphi(\overline{u})$, що характеризує собою якість (ціну) керування $\overline{u}$ із заданої множини U деякого простору. Оскільки задача максимізації функціоналу $\varphi(u)$ на множині U еквівалентна задачі мінімізації функціоналу $-\varphi(u)$ на тій же множині U, тому надалі обмежимось розглядом задач мінімізації.

Різним аспектам моделювання, дослідження і чисельного розв'язування таких задач присвячено багато робіт [1].

В даній роботі розглядаються деякі нелінійні задачі оптимізації, що зводяться до глобального розв'язування відповідних систем нелінійних скалярних рівнянь (СНСР).

Задача безумовної оптимізації. Нехай $\varphi(\overline{u})$ — скалярна функція векторного аргументу $\overline{u} = (u_1, u_2, ..., u_n) \in E_n$ — n-вимірного евклідового простору. Поставимо задачу: знайти точку $\overline{u}^* = (u_1^*, u_2^*, ..., u_n^*) \in E_n$, в якій функція $\varphi(\overline{u})$ набуває мінімального значення, тобто

$$\varphi^* = \varphi(\overline{u}^*) \leq \varphi(\overline{u}), \forall \overline{u} \in E_n. \tag{1}$$

Зауважимо, що умові (1) може задовольняти множина точок U^*, яка називається множиною розв'язків. Задачу безумовної мінімізації функції $\varphi(\overline{u})$ запишемо у вигляді:

$$\varphi^* = \min \varphi(\overline{u}), \forall \overline{u} \in E_n. \tag{2}$$

Якщо функція $\varphi(\overline{u})$ диференційовна за всіма змінними u_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$, тоді задача (2) зводиться до задачі глобального розв'язування СНСР виду

$$\frac{\partial \varphi(\bar{u})}{\partial u_i} = 0, \left(i = \overline{1,n}\right), \tag{3}$$

що характеризує необхідну умову екстремуму функції $\varphi(\overline{u})$. На розв'язках системи (3) обчислюються значення функції $\varphi(\overline{u})$ і відбираються ті точки, в яких ці значення найменші. Якщо умова (1) виконується в деякому околі $D(\overline{u}^*)$ точки $\overline{u}^*$, тоді $\overline{u}^*$ називається точкою локального мінімуму. Якщо ж умова (1) у точці $\overline{u}^*$ виконується при всіх $\overline{u} \in E_n$, тоді $\overline{u}^*$ називається точкою глобального мінімуму.

Задача нелінійного програмування. Розв'язування цієї задачі полягає у знаходженні точки $\overline{u}^* = (u_1^*, u_2^*, ..., u_n^*) \in E_n$, в якій нелінійна цільова функція $\varphi(\overline{u})$ досягає мінімуму, тобто

$$\varphi^* = \varphi(\overline{u}^*) = \min \varphi(\overline{u}) \tag{4}$$

при виконанні наступних обмежень

$$\overline{u} \in \overline{\Omega}_n = \left\{ \overline{u} \in E_n : \psi_i(\overline{u}) \leq = \geq 0, u_j \in \theta_j; i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n} \right\}, \tag{5}$$

де $\psi_i(\overline{u})$ — функції, що утворюють область Ω, θ_j — область допустимих значень змінної u_j.

Найбільш розповсюджений метод розв'язання задачі (4), (5) полягає в редукції її до задачі безумовної мінімізації (2), що досягається за допомогою методів штрафних та бар'єрних функцій або методу Лагранжа з наступним зведенням її до СНСР.

Задача оптимального керування. Розглянемо задачу мінімізації нелінійного функціоналу

$$f(u) = \int_0^T F(x(t), u(t), t)dt + \Phi(x(T)) \tag{6}$$

на розв'язках задачі Коші

$$\dot{x}(t) = g(x(t), u(t), t), x(0) = d, \tag{7}$$

що відповідають всім допустимим керуванням $u(t)$ із деякої множини Ω (T і d — фіксовані). Відомим підходом щодо розв'язання задачі (6), (7) є принцип максимуму Понтрягіна. Його ідея полягає в конструюванні функції Н.Гамільтона-Понтрягіна і розв'язанні відповідної крайової задачі. У випадку істотної нелінійності $f(u)$ задача (6), (7) може мати декілька локальних мінімумів в області Ω, а глобальний мінімум може досягатись на границі Ω. У цьому випадку застосування зазначеного підходу не є простим. Однак, при певних умовах гладкості функцій F, Φ і g задача (6), (7) зводиться до задачі розв'язування відповідної СНСР. Припустимо, що множина керувань $u(t) \in \Omega$ представлена у вигляді $u(t) = u(t, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, тобто вона залежить від параметрів $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. Такими множинами можуть бути, наприклад, алгебраїчні, тригонометричні поліноми з коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ або кусково-постійні функції із значеннями $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. Цій множині керувань згідно з (7) буде відповідати множина траєкторій $x(t) = x(t, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, що залежать від тих же параметрів. Значення цих параметрів визначаються із необхідної умови екстремуму функціоналу (6) в точці $(u(t), x(t))$ як скалярної функції n-змінних $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. В результаті приходимо до СНСР виду (3).

Наведені оптимізаційні задачі, як правило, є багатоекстремальними і за вимогою практики необхідно шукати їх глобальний мінімум. У роботі [2] запропоновано підхід щодо глобальної оптимізації, який полягає в мінімізації неперервно-диференційовної функції $\varphi(\overline{u})$ на n-вимірному замкненому паралелепіпеді $\overline{\Omega}_n$, тобто розв'язанні задачі

$$\varphi^* = \min_{\overline{u} \in \overline{\Omega}_n} \varphi(\overline{u}), \tag{8}$$

де $\overline{\Omega}_n = \{\overline{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E_n : -\infty < a_i \le u_i \le b_i < \infty\}$, шляхом редукції її до послідовності аналогічних задач розмірності від 1 до n, що відповідає сукупності задач мінімізації функції $\varphi(\overline{u})$ на j-вимірних паралелепіпедах $1 \le j \le n$.

Таким чином, в усіх розглянутих випадках задача мінімізації функції $\varphi(\overline{u})$ зводиться до задачі розв'язування відповідних систем нелінійних алгебраїчних рівнянь. Глобальне розв'язування таких систем здійснюється за допомогою ϵs-алгоритму [3], практична суть якого полягає в наступному: відображаючи за допомогою побудованої згідно з (3) вектор-функції $\overline{F}(\overline{u}) = \overline{u} - F(\overline{u}) = \partial\varphi(\overline{u})/\partial u_k = 0$, $(k = \overline{1,n})$ послідовність $\epsilon_k(\gamma_k)$-сіток, що покривають бікомпактну множину $\overline{\Omega}_n$, у послідовність γ_k-сіток, що належать $\overline{\Omega}_n$, і при цьому задовольняючи певним умовам, наведеним у [3], можна відокремити всі ізольовані розв'язки систем вигляду (3), що належать $\overline{\Omega}_n$ і апроксимувати їх з точністю, допустимою на даній ЕОМ.

Процес пошуку глобального мінімуму функції $\varphi(\overline{u})$ на $\overline{\Omega}_n$ є таким:

1. Обчислюються значення функції $\varphi(u_1, u_2, ..., u_n)$ в усіх 2^n вершинах $\overline{\Omega}_n$ і фіксується мінімальне значення $\varphi(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, ..., \tilde{u}_n)$ і вершина, в якій воно досягається.

2. Розв'язується повна система (3) на Ω_n та всі зрізані системи (3), що відповідають мінімізації $\varphi(\overline{u})$ на гранях $\overline{\Omega}_n$. Визначаються мінімальні значення $\varphi(\overline{u})$ шляхом порівняння між собою та із зафіксованими вище мінімальними значеннями $\varphi(\overline{u})$. В результаті знаходиться глобальний мінімум $\varphi(\overline{u})$ на $\overline{\Omega}_n$.

Програмне забезпечення, що для різних нелінійних моделей генерує та здійснює глобальне розв'язання системи (3), представляє комплекс програм на ФОРТРАНІ, які відтестовані і реалізовані на різних типах ЕОМ.

Задача тестування полягала в тому, щоб перевірити надійність зазначеного програмного забезпечення щодо відокремлення всіх ізольованих розв'язків деяких класів нелінійних задач і обчислення їх з точністю ϵ за нев'язкою. Обчислювальний експеримент (тестування) було проведено на багатьох прикладах та задачах. Наведемо деякі з них:

1. Розглянемо задачу мінімізації функції:

$$f(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[x^2(t) + u^2(t)\right] dt \tag{9}$$

на розв'язках рівняння

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t), x(0) = 1. \tag{10}$$

Точний розв'язок цієї задачі, отриманий на основі принципу максимуму, має вигляд [1]

$$u(t) = \frac{e^{\sqrt{2}t} - e^{2\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}t}}{(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{2}+1)e^{2\sqrt{2}}}, x(t) = \frac{(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t} - (\sqrt{2}+1)e^{2\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}t}}{(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{2}+1)e^{2\sqrt{2}}}.$$

Для знаходження наближених значень $\tilde{u}(t)$, $\tilde{x}(t)$ застосуємо вище описаний підхід. Нехай функція керування має поліноміальний вигляд, тобто
$\tilde{u}(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$. Тоді після розв'язання рівняння (10) одержимо

$\tilde{x}(t) = (\alpha_0 - \alpha_1 + 2\alpha_2) + (\alpha_1 - 2\alpha_2)t + \alpha_2 t^2 + (1 - \alpha_0 + \alpha_1 - 2\alpha_2)e^{-t}$. Із необхідної умови екстремуму функції (9) при наведених $\tilde{u}(t)$ і $\tilde{x}(t)$ одержимо таку систему лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів α_0, α_1 α_2

$$5e^{-1}\alpha_2 + \frac{\alpha_0}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2}\alpha_1 + \frac{\alpha_1}{2} - \frac{4\alpha_2}{3} - e^{-1} + 2e^{-1}\alpha_0 + \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}e^{-2}\alpha_0 - e^{-2}\alpha_2 = 0,$$

$$e^{-2}\alpha_2 - e^{-1}\alpha_2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2}\alpha_0 + \frac{\alpha_0}{2} + \frac{7\alpha_1}{6} + \frac{\alpha_2}{2} - e^{-1} - 2e^{-1}\alpha_1 - \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2}e^{-2}\alpha_1 = 0,$$

$$5e^{-1}\alpha_0 + e^{-2}\alpha_1 - e^{-1}\alpha_1 + 1 - \frac{4\alpha_0}{3} + \frac{\alpha_1}{2} - \frac{59\alpha_2}{15} - 3e^{-1} - 2e^{-2}\alpha_2 + 12e^{-1}\alpha_2 + e^{-2} - e^{-2}\alpha_0 = 0,$$

з якої знаходимо $\alpha_0 = -0.3792383$; $\alpha_1 = 0,5318373$; $\alpha_2 = -0,1583618$. В результаті одержимо $\tilde{u}(t) = -0.3792383 + 0,5318373t - 0,1583618t^2$,
$\tilde{x}(t) = 2.2277992e^{-t} - 1.2277992 + 0.8485609t - 0.1583618t^2$.

Співвідношення між $u(t)$, $\tilde{u}(t)$, $x(t)$, $\tilde{x}(t)$ та абсолютні похибки $\Delta\tilde{u}(t)$, $\Delta\tilde{x}(t)$ в конкретних дискретних точках відображені в таблиці.

t	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0
$x(t)$	1.0	0.709436	0.508480	0.371747	0.281971
$u(t)$	-0.385819	-0.253430	-0.153029	-0.071697	0.0
$\tilde{x}(t)$	1.0	0.709449	0.508120	0.371881	0.281962
$\tilde{u}(t)$	-0.379238	-0.256177	-0.152910	-0.069439	-0.005760
$\Delta\tilde{u}(t)$	0.006581	0.002747	0.000119	0.002528	0.00576
$\Delta\tilde{x}(t)$	0.0	0.0000130	0.000360	0.000134	0.0000093

Нехай функція керування $\tilde{u}(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3$. Тоді із (10) одержимо $x(t) = (\alpha_0 - \alpha_1 + 2\alpha_2 - 6\alpha_3) + (\alpha_1 - 2\alpha_2 + 6\alpha_3)t + (\alpha_2 - 3\alpha_3)t^2 + \alpha_3 t^3 + (1 - \alpha_0 + \alpha_1 - 2\alpha_2 + 6\alpha_3)e^{-t}$.

Із необхідної умови екстремуму (9) при наведених значеннях $u(t)$ і $x(t)$ одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язком якої будуть: $\alpha_0 = -0.382716$, $\alpha_1 = 0.594444$, $\alpha_2 = -0.314815$, $\alpha_3 = 0.011667$.

2. Знайти мінімум функції
$\varphi(u_1, u_2, u_3) = u_1^4 + u_2^4 - u_3^3 + 2u_1^3 u_2 - 9u_1 u_2 + 7u_2 u_3 + 3u_3^2 + \frac{13}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_2 - \frac{23}{4}u_3 + \frac{1}{8}$
в кубі $-2 \le u_i \le 2, (i = 1, 2, 3)$.

В результаті реалізації необхідної умови екстремуму функції одержимо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь: $\begin{cases} 4u_1^3 + 6u_1^2 u_2 - 9u_2 + \frac{13}{4} = 0, \\ 4u_2^3 + 2u_1^3 - 9u_1 + 7u_3 + \frac{1}{4} = 0, \\ -3u_3^2 + 7u_2 + 6u_3 - \frac{23}{4} = 0. \end{cases}$

Шуканий глобальний мінімум функції: $\varphi_* = -37.723503$ у точці $(-1.1255; -1.7524; 2.0)$. Його було знайдено за вище описаною схемою.

Шуканий максимум функції $\varphi^* = 101.6$ досягається у точці $(2; -2; -2)$.

Деякі інші приклади щодо знаходження глобального мінімуму функції багатьох змінних наведені в роботі [2].

1. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. – М: Наука, 1981. – 400 с.
2. *Бабич М.Д., Шевчук Л.Д.* Об одном численном методе решения задач оптимизации // УСИМ. – 1995. – №3. – С. 12-19.
3. *Бабич М.Д., Шевчук Л.Д.* Об одном алгоритме приближенного решения систем нелинейных уравнений // Кибернетика. – 1982. – №2. – С. 74-79.

Одержано 13.07.2009