УДК 519.21

В.Ю. Береза, Т.О. Лукашів (Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича)

ПРО ІСНУВАННЯ СИЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІНТЕГРАЛОМ СКОРОХОДА

The class of stochastic functional-differential equations which have solutions without points of discontinuity of the second type is studied with the help of probably bounded integral contractors.

Вивчено клас стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь, розв'язки яких не мають розривів другого роду за допомогою ймовірносних обмежених інтегральних контракторів.

1. Постановка задачі.

Нехай випадкові процеси $\{x(t) \equiv x(t,\omega)\}$, $t \in [-\tau, T]\}$, $\tau > 0$, зі значеннями в $\mathbb{R}^n$, n-вимірний вінерів процес $\{W(t), t \in [0,T]\}$ і центрована пуассонова міра $\tilde{\nu}(ds, su) \equiv \nu(ds, du) - \mathbb{E}\{\tilde{\nu}(ds, du)\}$ з $\mathbb{E}\{\nu(ds, du)\} = \Pi(du)ds$ задані на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ з потоком σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ [7-9]. При $t \in [-\tau, T]$ справджуються рівності

$$x(t) = \varphi(t), \quad \text{якщо} \quad t \in [-\tau, 0] \quad \text{і}$$

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t a(s, x_s)ds + \int_0^t b(s, x_s)dw(s) + \int_0^t \int_U c(s, x_s, u)\tilde{\nu}(ds, du), \tag{1}$$

якщо $t \in [0, T]$.

Тут $a : [0,T] \times \mathbb{D}_n([-\tau, 0]) \to \mathbb{R}^n$; $b : [0,T] \times \mathbb{D}_n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; $c : [0,T] \times \mathbb{D}_n \times U \to \mathbb{R}^n$, $M_n(\mathbb{D}_n)$ – матриця над простором $\mathbb{D}_n$ розмірності $n \times n$; a, b, c – вимірні за сукупністю змінних; $x_t \equiv \{x(t+\theta)\}, \theta \in [-\tau, 0]$; $\mathbb{D}_n = \mathbb{D}_n([-\tau, 0])$ – простір неперервних справа функцій на відрізку $[-\tau, 0]$, що мають лівосторонні границі [1], [6].

Тоді $\{x(t), t \geq 0\}$ назвемо сильним розв'язком СДФР

$$dx(t) = a(t, x_t)dt + b(t, x_t)dw(t) + \int_U c(t, x_t, u)\tilde{\nu}(ds, du) \tag{2}$$

з початковою умовою

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \tag{3}$$

У просторі $\mathbb{D}_n$ для $\varphi \in \mathbb{D}_n$ визначимо норму

$$\|\varphi(\theta)\| \equiv \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|. \tag{4}$$

Зауважимо, що у рівномірній нормі (4) простір Скорохода $\mathbb{D}_n$ неповний. Тому всі результати одержано у розширеному просторі Скорохода $\overline{\mathbb{D}}_n$, який надалі будемо розуміти під позначенням $\overline{\mathbb{D}}_n \equiv \overline{\mathbb{D}}_n([-\tau, 0]])$ [6].

Нехай $G_i(t,x_t):[-\tau,T]\times\mathbb{D}_n\to\mathbb{R}^n$, $i=1,2$, $G_3(t,x_t,u):[0,T]\times\mathbb{D}_n\times U\to\mathbb{R}^n$ є обмеженими неперервними функціоналами. Для $x,y\in\mathbb{D}_n$ введемо випадковий процес [5]

$$z(t)\equiv y(t)+\int\limits_0^t G_1(s,x_s)y(s)ds+\int\limits_0^t G_2(s,x_s)y(s)dw(s)+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_U G_3(s,x_s,u)y(s)\tilde{\nu}(ds,du). \tag{5}$$

Припустимо, що існує додатна стала K, така, що для всіх $t\in[0,T]$ виконуються нерівності

$$|a(t,x_t-z_t)-a(t,x_t)-G_1(t,x_t)y|\le K\|y\|, \tag{6}$$

$$|b(t,x_t-z_t)-b(t,x_t)-G_2(t,x_t)y|\le K\|y\|, \tag{7}$$

$$\int\limits_U |c(t,x_t-z_t,u)-c(t,x_t,u)-G_3(t,x_t,u)y|\Pi(du)\le K\|y\|, \tag{8}$$

майже скрізь відносно норми (4).

Означення 1. *Якщо умови (6), (7), (8) виконуються, то говорять, що коефіцієнти рівняння (2) мають обмежені інтегральні контрактори [2], [3].*

Означення 2. *Будемо говорити, що обмежений випадковий контрактор є правильним, якщо рівняння (5) має розв'язок в $\mathbb{D}_n$ для довільних $x(t)$ і $z(t)$ з $\mathbb{D}_n$ [4].*

Означення 3. *Говорять, що функціонал $h:[0,T]\times\mathbb{D}_n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ є стохастично замкнений, якщо для довільних $x^{(n)}$, x з $\mathbb{D}_n([0,T]\times\Omega)$ та $y^{(n)}$, y з $\mathbb{D}_n$ таких, що $x^{(n)}\to x$, $y^{(n)}\to y$ при $n\to\infty$ і $h(t,x_t^{(n)}(\theta),y^{(n)}(\theta))\to z$ в $\mathbb{D}_n([0,T]\times\Omega)$, де $z(t)\equiv h(t,x_t,y)$ для всіх $t\in[0,T]$ майже скрізь.*

Зауваження 1. *Якщо функціонали a, b, c є ліпшицевими за другим аргументом, то вони є стохастично замкненими і мають правильний обмежений випадковий інтегральний контрактор з $G_i=0$, $i=1,2,3$ [5].*

2. Про існування розв'язків системи СДФР з пуассоновими збуреннями.

Теорема 1. *Якщо коефіцієнти в (2) є стохастично замкненими, мають обмежений випадковий інтегральний контрактор і для довільного $\varphi\in\mathbb{D}_n([-h,0])$ існують інтеграли $\int\limits_0^T|a(t,\varphi)|^2dt<+\infty$; $\int\limits_0^T|b(t,\varphi)|^2dt<\infty$; $\int\limits_0^t\int\limits_U|c(t,\varphi,u)|^2\Pi(du)dt<\infty$. Тоді існує розв'язок $x(t)\in\mathbb{D}_n([-\tau,T])$ задачі Коші (2), (5), (3).*

Доведення. Доведення базується на наступній ітераційній процедурі. Для $n\ge 0$

$$x^{(n+1)}(t)=x^{(n)}(t)-y^{(n)}(t)-\int\limits_0^t G_1\left(s,x_s^{(n)}(\theta)\right)y^{(n)}(s)ds-$$

$$-\int_0^t G_2\left(s, x_s^{(n)}(\theta)\right) y^{(n)}(s)dw(s) - \int_0^t \int_U G_3\left(s, x_s^{(n)}, u\right) y^{(n)}(s)\tilde{\nu}(du, ds); \qquad (9)$$

або

$$x^{(n+1)}(t) = x^{(n)}(t) - z^{(n)}(t), \quad 0 \le t \le T. \qquad (9')$$

$$x_0(t) = \varphi(0), \quad t \ge 0,$$

$$x_n(t) = \varphi(t), \quad -\tau \le t \le 0,$$

$$y^{(n)}(t) = x^{(n)}(t) - x(0) - \int_0^t a\left(s, x_s^{(n)}(\theta)\right) ds -$$

$$-\int_0^t b\left(s, x_s^{(n)}(\theta)\right) dw(s) - \int_0^t \int_U c\left(s, x_s^{(n)}, u\right) \tilde{\nu}(du, ds), \qquad (10)$$

$$0 \le t \le T, \quad y_n(t) = 0, \quad -\tau \le t \le 0.$$

Підставляючи (9) в (10) для $(n+1)$-го наближення, знаходимо:

$$y^{(n+1)}(t) = x^{(n+1)}(t) - x(0) - \int_0^t a\left(s, x_s^{(n+1)}(\theta)\right) ds -$$

$$-\int_0^t b\left(s, x_s^{(n+1)}(\theta)\right) dw(s) - \int_0^t \int_U c\left(s, x_s^{(n+1)}, u\right) \tilde{\nu}(du, ds) =$$

$$= x^{(n+1)}(t) - x(0) - \int_0^t a\left(s, x_s^{(n)}(\theta) - z_s^{(n)}(\theta)\right) ds - \int_0^t b\left(s, x_s^{(n)} - z_s^{(n)}\right) dw(s) -$$

$$-\int_0^t \int_U c\left(s, x_s^{(n)} - z_s^{(n)}, u\right) \tilde{\nu}(du, ds) =$$

$$= x^{(n)}(t) - x^{(n)}(t) + x(0) + \int_0^t a\left(s, x_s^{(n)}(\theta)\right) ds + \int_0^t b\left(s, x_s^{(n)}(\theta)\right) ds +$$

$$+\int_0^t \int_U c\left(s, x_s^{(n)}, u\right) \tilde{\nu}(du, ds) - \int_0^t G_1\left(s, x_s^{(n)}(\theta)\right) y^{(n)}(s)ds -$$

$$-\int_0^t G_2\left(s, x_s^{(n)}(\theta)\right) y^{(n)}(s)dw(s) - \int_0^t \int_U G_3\left(s, x_s^{(n)}, u\right) y^{(n)}(s)\tilde{\nu}(du, ds) -$$

$$-x(0) - \int_0^t a\left(s, x_s^{(n)} - z_s^{(n)}\right) ds - \int_0^t b\left(s, x_s^{(n)} - z_s^{(n)}\right) dw(s) -$$

$$-\int_0^t \int_U c\left(s, x_s^{(n)} - z_s^{(n)}, u\right) \tilde{\nu}(du, ds) =$$

$$= \int_0^t \left[a\left(s, x_s^{(n)}(\theta)\right) - G_1\left(s, x_s^{(n)}(\theta)\right) y^{(n)}(s) - a\left(s, x_s^{(n)}(\theta) - z_a^{(n)}(\theta)\right)\right] ds +$$

$$+ \int_0^t \left[b\left(s, x_s^{(n)}(\theta)\right) - G_2\left(s, x_s^{(n)}(\theta)\right) y^{(n)}(s) - b\left(s, x_s^{(n)}(\theta) - z_s^{(n)}(\theta)\right)\right] dw(s) +$$

$$+ \int_0^t \int_U \left[c\left(s, x_s^{(n)}, u\right) - G_3\left(s, x_s^{(n)}, u\right) y^{(n)}(s) - c\left(s, x_s^{(n)} - z_s^{(n)}, u\right)\right] \tilde{\nu}(ds, du). \quad (11)$$

Скористаємося нерівністю Коші-Буняковського і основними властивостями стохастичних інтегралів [1], [9] для $t \in [0, T]$:

$$\mathbb{E}\left|\int_0^t 1 \cdot g(s) ds\right|^2 \leq T \cdot \int_0^t \mathbb{E}|g(s)|^2 ds;$$

$$\mathbb{E}\left|\int_0^t g(s, w) dw(s)\right|^2 = \int_0^t \mathbb{E}|g(s, w)|^2 ds;$$

$$\mathbb{E}\left|\int_0^t \int_U f(s, u, w) \tilde{\nu}(ds, du)\right|^2 = \int_0^t \int_U \mathbb{E}|f(s, u, w)|^2 \Pi(du, dt);$$

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0,T]} \left|\int_0^s g(s) dw(s)\right|^2 \leq 4 \int_0^T \mathbb{E}|g(s)|^2 ds;$$

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0,T]} \left|\int_0^t \int_U f(s, u, w) \tilde{\nu}(du, ds)\right|^2 \leq 4 \int_0^t \int_U \mathbb{E}|f(s, u, w)|^2 \Pi(du, ds)$$

та для умов (6), (7), (8) знайдемо оцінку для виразу $\mathbb{E}\|y^{(n+1)}(t)\|^2$. Очевидно, що

$$\|y^{(n+1)}(t)\|^2 \leq$$

$$\leq \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \left[a\left(s, x_s^{(n)}(\theta)\right) - G_1\left(s, x_s^{(n)}(\theta)\right) y^{(n)}(s) - a\left(s, x_s^{(n)}(\theta) - z_s^{(n)}(\theta)\right)\right] ds \right| + \right.$$

$$+ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t b\left(s, x_s^{(n)}(\theta)\right) - G_2\left(s, x_s^{(n)}(\theta)\right) y^{(n)}(s) - b\left(s, x_s^{(n)}(\theta) - z_s^{(n)}(\theta)\right) dw(s) \right| +$$

$$+\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t\int_U [c(s,x_s^{(n)},u)-G_3(s,x_s^{(n)},u)y^{(n)}(s)-c(s,x_s^{(n)}-z_s^{(n)},u)]\tilde{\nu}(ds,du)\right|\Bigg)^2\le$$

$$\le 2\left[\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t\left[a(s,x_s^{(n)}(\theta))-G_1(s,x_s^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s)-a(s,x_s^{(n)}(\theta)-z_s^{(n)}(\theta))\right]ds\right|^2+\right.$$

$$+\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t\left[b(s,x_s^{(n)}(\theta))-G_2\left(s,x_s^{(n)}(\theta)\right)y^{(n)}(s)-b\left(s,x_s^{(n)}(\theta)-z_s^{(n)}(\theta)\right)\right]dw(s)\right|^2+$$

$$\left.+\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t\int_U\left[c\left(s,x_s^{(n)},u\right)-G_3(s,x_s^{(n)},u)y^{(n)}(s)-c(s,x_s^{(n)}-z_s^{(n)},u)\right]\tilde{\nu}(ds,du)\right|^2\right].$$

Знайдемо умовне математичне сподівання відносно σ-алгебри $\mathcal{F}_0$ (будемо позначати $\mathbb{E}|y^{(n+1)(t)}|^2\equiv\mathbb{E}\{|y^{(n+1)}(t)|^2/\mathcal{F}_0\}$) [9]:

$$\mathbb{E}\|y^{(n+1)}(t)\|^2\le$$

$$\le 2\left[\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t\left[a(s,x_s^{(n)}(\theta))-G_1(s,x_s^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s)-a(s,x_s^{(n)}(\theta)-z_s^{(n)}(\theta))\right]ds\right|^2+\right.$$

$$+\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t\left[b(s,x_s^{(n)}(\theta))-G_2(s,x_s^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s)-b(s,x_s^{(n)}(\theta)-z_s^{(n)}(\theta))\right]dw(s)\right|^2+$$

$$\left.+\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t\int_U[c(s,x_s^{(n)},u)-G_3(s,x_s^{(n)},u)y^{(n)}(s)-c(s,x_s^{(n)}-z_s^{(n)},u)]\tilde{\nu}(du,ds)\right|^2\right]$$

$$\le 2K^2\left[\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t\left\|y^{(n)}(s)\right\|ds\right|^2+\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t\|y^{(n)}(s)\|dw(s)\right|^2+\right.$$

$$\left.+\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t\int_U\|y^{(n)}(s)\|\tilde{\nu}(du,dv)\right|^2\right]\le$$

$$\le 2K^2\left[T\int_0^t\mathbb{E}\|y^{(n)}(s)\|^2ds+4\int_0^t\mathbb{E}\|y^{(n)}(s)\|^2ds+\ +4\int_0^t\int_U\mathbb{E}\|y^{(n)}(s)\|\Pi(du,ds)\right]=$$

$$=2K^2\left[T\int_0^t\mathbb{E}\|y^{(n)}(s)\|^2ds+4\int_0^t\mathbb{E}\|y^{(n)}(s)\|^2ds+4\int_0^t\mathbb{E}\|y^{(n)}(s)\|^2ds\right]=$$

$$=2K^2(T+8)\int_0^t\mathbb{E}\|y^{(n)}(s)\|^2ds.$$

Отже,

$$\mathbb{E}\|y^{(n+1)}(t)\|^2 \le 2K^2(T+8)\int\limits_0^t \mathbb{E}\|y^{(n)}(s)\|^2 ds, \quad t\in[0,T]. \tag{12}$$

Проінтегрувавши n разів, матимемо

$$\mathbb{E}\|y^{(n+1)}(s)\|^2 \le [2K^2(T+8)]^n \int\limits_0^t (T-s)^n \mathbb{E}\|y^{(0)}(s)\|^2 ds/n!, \quad t\in[0,T], \tag{13}$$

де для всіх $t\in[0,T]$

$$y^{(0)}(t) = -\int\limits_0^t a\left(s, x_s^{(0)}(\theta)\right) ds - \int\limits_0^t b\left(s, x_s^{(0)}(\theta)\right) dw(s) - \int\limits_0^t \int\limits_U c\left(s, x_s^{(0)}, u\right) \tilde{\nu}(ds, du),$$

і

$$x_s^{(0)}(s-\tau) = \begin{cases} \varphi(0), & s\ge\tau, \\ \varphi(s-\tau), & s<\tau. \end{cases}$$

Тепер оцінимо вираз

$$\mathbb{E}\|y^{(0)}(t)\|^2 = \mathbb{E}\left(\sup_{0\le s\le t}|y^{(0)}(s)|\right)^2 \le$$

$$\le 2\mathbb{E}\left\{\sup_{0\le s\le t}\left|\int\limits_0^s a\left(\tau, x_\tau^{(0)}\right) d\tau\right|^2 + \sup_{0\le s\le t}\left|\int\limits_0^s b\left(\tau, x_\tau^{(0)}\right) dw(\tau)\right|^2 + \right.$$

$$\left. + \sup_{0\le s\le t}\left|\int\limits_0^s \int\limits_U c\left(\tau, x_\tau^{(0)}, u\right) \tilde{\nu}(du, d\tau)\right|^2\right\} \le$$

$$\le 2\left(\mathbb{E}\sup_{0\le s\le t}\left|\int\limits_0^s a\left(\tau, x_\tau^{(0)}\right) d\tau\right|^2 + \mathbb{E}\sup_{0\le s\le t}\left|\int\limits_0^s b\left(\tau, x_\tau^{(0)}\right) dw(\tau)\right|^2 + \right.$$

$$\left. + \mathbb{E}\sup_{0\le s\le t}\left|\int\limits_0^s \int\limits_U c\left(\tau, x_\tau^{(0)}, u\right) \tilde{\nu}(du, d\tau)\right|^2\right) \le$$

$$\le 2\left(T\int\limits_0^t \mathbb{E}|a\left(\tau, x_\tau^{(0)}\right)|^2 d\tau + 4\int\limits_0^t \mathbb{E}|b\left(\tau, x_\tau^{(0)}\right)|^2 d\tau + 4\int\limits_0^t \int\limits_U \mathbb{E}|c\left(\tau, x_\tau^{(0)}, u\right)|^2 d\tau\right).$$

Оскільки відображення a, b і c є неперервними на відрізку $[0,T]$, то існують додатні сталі C_1, C_2 і C_3, які обмежують їх.

Отже,

$$\mathbb{E}\|y^{(0)}(t)\|^2 \le$$

$$\le 2\left(T\int\limits_0^t C_1^2 d\tau + 4\int\limits_0^t C_2^2 d\tau + 4\int\limits_0^t C_3^2 d\tau\right) \le 2\left(T^2C_1^2 + 4C_2^2T + 4C_3^2T\right) \le \theta,$$

де

$$\theta = 2T\left(TC_1^2 + 4C_2^2 + 4C_3^2\right) > 0.$$

Тоді оцінка (13) набуде вигляду

$$\mathbb{E}\|y^{(n)}(t)\|^2 \le \theta[2K^2(T+8)]^n \cdot \frac{T^{n+1}}{(n+1)!}, \quad t \in [0,T], \quad n = 1,2,\ldots \tag{14}$$

Перепишемо нерівність (11) таким чином:

$$y^{(n+1)}(t) = \int\limits_0^t \alpha_n(s)ds + \int\limits_0^t \beta_n(s)dw(s) + \int\limits_0^t \int\limits_U \gamma_n(s,u)\tilde{\nu}(ds,du),$$

де

$$\alpha_n(t) = a\left(t, x_t^{(n)}\right) - G_1\left(t, x_t^{(n)}\right) y^{(n)}(t) - a\left(t, x_t^{(n)} - z_t^{(n)}\right);$$

$$\beta_n(t) = b\left(t, x_t^{(n)}\right) - G_2\left(t, x_t^{(n)}\right) y^{(n)}(t) - b\left(t, x_t^{(n)} - z_t^{(n)}\right);$$

$$\gamma_n(t) = c\left(t, x_t^{(n)}, u\right) - G_3\left(t, x_t^{(n)}, u\right) y^{(n)}(t) - c\left(t, x_t^{(n)} - z_t^{(n)}, u\right).$$

Тоді очевидно, що

$$\sup_{0\le s\le t}\left|y^{(n+1)}(t)\right| \le$$

$$\le \int\limits_0^T |\alpha_n(s)|ds + \sup_{0\le t\le T}\left|\int\limits_0^t \beta_n(s)dw(s)\right| + \sup_{0\le t\le T}\left|\int\limits_0^t \int\limits_U \gamma_n(s,u)\tilde{\nu}(ds,du)\right|. \tag{15}$$

Тепер оцінимо кожний з цих інтегралів. Використовуючи (6), (7), (8) і (14), легко одержати нерівність:

$$\mathbb{P}\left\{\int\limits_0^T |\alpha_n(s)|ds > 3^{-n-2}\right\} \le 3^{2n+2}\int\limits_0^T \mathbb{E}|\alpha_n(s)|^2 ds \le$$

$$\le 3^{2n+3}K^2\int\limits_0^T \mathbb{E}\|y^{(n)}(s)\|^2 ds \le 3^{2n+3}K^2T\theta\left[2K^2(T+8)\right]^n \frac{T^{n+1}}{(n+1)!} \le$$

$$\le \frac{3a^{n+1}\theta T^2}{2(T+8)(n+1)!},$$

де $K_1 \equiv 18 \cdot K^2T(T+8)$. Аналогічно

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\int\limits_0^t \beta_n(s)dw(s)\right| > 3^{-n-2}\right\} \le \frac{3K_1^{n+1}\theta T^2}{2(T+8)(n+1)!};$$

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{0\le s\le t}\left|\int\limits_0^t \int\limits_U \gamma_n(s,u)\tilde{\nu}(ds,du)\right| > 3^{-n-2}\right\} \le \frac{3K_1^{n+1}\theta T^2}{2(T+8)(n+1)!}.$$

Нарешті з (15) і попередніх оцінок випливає нерівність

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}|y^{(n+1)}(t)|>3^{-n-2}\right\}\le$$

$$\le\mathbb{P}\left\{\int_0^T|\alpha_n(s)|ds>3^{-n-2}\right\}+\mathbb{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t\beta_n(s)dw(s)\right|>3^{-n-2}\right\}+$$

$$+\mathbb{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t\int_U\gamma_n(s,u)\tilde{\nu}(ds,du)\right|>3^{-n-2}\right\}\le\frac{3K_1^{n+1}\theta T}{(n+1)!}. \qquad (16)$$

З (9) одержимо

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|x^{(n+1)}(t)-x^{(n)}(t)\right|\right\}<\mathbb{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|y^{(n)}(t)\right|+\int_0^T\left|G_1\left(s,x_s^{(n)}\right)y^{(n)}(s)\right|ds+\right.$$

$$\left.+\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t G_2\left(s,x_s^{(n)}\right)y^{(n)}(s)dw(s)\right|+\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t\int_U G_3\left(s,x_s^{(n)},u\right)y_n(s)\tilde{\nu}(ds,du)\right|\right\}.$$

Позначимо

$$S_1\equiv\sup\{|G_1(t,x_t)|,\ t\in[0,T],\ x_t\in\mathbb{D}_n\};$$

$$S_2\equiv\sup\{|G_2(t,x)|,\ t\in[0,T],\ x_t\in\mathbb{D}_n\};$$

$$S_3\equiv\sup\{|G_3(t,x,u)|,\ t\in[0,T]\{x_t,u\}\in\mathbb{D}_n\times U\}.$$

Використовуючи (14), легко побачити, що

$$\mathbb{P}\left\{\int_0^T\left|G_1\left(s,x_s^{(n)}\right)y^{(n)}(s)\right|ds>3^{-n}\right\}\le 3^{2n}\mathbb{E}\left\{\int_0^T\left|G_1\left(s,x_s^{(n)}\right)y^{(n)}(s)\right|^2ds\right\}\le$$

$$\le 3^{2n}T\int_0^T\mathbb{E}\left|G_1\left(s,x_s^{(n)}\right)y^{(n)}(s)\right|^2ds\le S_1^2\cdot 3^{2n}TK^2\int_0^T\mathbb{E}\left\|y^{(n)}(s)\right\|^2ds\le$$

$$\le 3^{2n}T^2K^2\left[2K^2(T+8)\right]^n\frac{T^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\theta\cdot S_1^2\le\frac{S_1^2\theta T^3a^n}{(n+1)!}.$$

Аналогічно

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t G_2\left(s,x_s^{(n)}\right)y^{(n)}(s)dw(s)\right|>3^{-n}\right\}\le\frac{S_2^2\theta T^2a^n}{(n+1)!};$$

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t\int_U G_3\left(s,x_s^{(n)},u\right)y^{(n)}(s)\tilde{\nu}(ds,du)\right|>3^{-n}\right\}\le\frac{S_3^2\theta T^2a^n}{(n+1)!}.$$

З (9), (16) та з останніх оцінок маємо ланцюжок нерівностей:

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|x^{(n+1)}(t)-x^{(n)}(t)\right|>4\cdot 3^{-n}\right\}\le$$

$$\le\left[\frac{3\theta Ta^n}{(T+8)(n+1)!}+\frac{S_1^2\theta T^3a^n}{(n+1)!}+\frac{S_2^2\theta T^2a^n}{(n+1)!}+\frac{S_3^2\theta T^2a^n}{(n+1)!}\right]\cdot 4^2\cdot 3^{2n}=$$

$$=\frac{4^2\cdot 3^{2n}\theta Ta^n}{(n+1)!}\left[\frac{3}{(T+8)}+S_1^2T^2+S_2^2T+S_3^2T\right]=\frac{4^2\cdot 3^{2n}\theta Ta^n}{(T+8)(n+1)!}\left[3+\right.$$

$$\left.+(T+8)T^2S_1^2+(T+8)T\left(S_2^2+S_3^2\right)\right]. \tag{17}$$

За лемою Бореля-Кантеллі [1], одержимо, що

$$\mathbb{P}=\left\{\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{0\le t\le T}\left|x^{(n+1)}(t)-x^{(n)}(t)\right|\right)>4\cdot 3^{-n}\right\}=0.$$

Тобто, для великих n

$$\sup_{0\le t\le T}\left|x^{(n+1)}(t)-x^{(n)}(t)\right|\le 4\cdot 3^{-n} \tag{18}$$

майже скрізь.

Отже, послідовність $\{x_n(t), n=1,2,\dots\}$ майже скрізь збіжна до стохастичного процесу $x^*(t)$. За теоремою Вейєрштрасса про рівномірну збіжність випливає, що ця збіжність є рівномірною на $[0,T]$.

Якщо використаємо означення для $x^*(t)$, поклавши $x^*(t)=\varphi(t)$ для $t\in[-\tau,0]$, одержимо, що траєкторія $x^*(t)$ не має стрибків другого роду на $[-\tau,T]$. Крім того, згідно визначення послідовностей $\{x_n(t), n=1,2,\dots\}$ і $\{y_n(t), n=1,2,\dots\}$, випливає, що вони є тривіальними по відношенню до вінерового процесу і випадкової пуассонівської міри. Таким чином, для довільного $t\in[-\tau,T]$, $x^*(t)$ є тривіальним. Отже, $x^*(t)$ належить до $\mathbb{D}_n$.

Для того, щоб довести, що $x^*(t)$ є розв'язком (2),(3), покажемо спочатку, що $x_n(t)\to x^*(t)$ при $n\to\infty$ в $\mathbb{D}_n$. З (18) маємо:

$$\mathbb{E}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|x^*(t)-x^{(n)}(t)\right|^2\right\}\le\mathbb{E}\left\{\lim_{m\to\infty}\sup_{0\le t\le T}\left|x^{(n+m)}(t)-x^{(n)}(t)\right|^2\right\}\le$$

$$\le\lim_{m\to\infty}\mathbb{E}\left\{\sum_{k=n}^{n+m-2}\sup_{0\le t\le T}\left|x^{(k+1)}(t)-x^{(k)}(t)\right|^2\right\}\le 4\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=n}^{n+m-2}3^{-k}\right)^2\to 0.$$

Таким чином, $x^{(n)}(t)\to x^*(t)$ при $n\to\infty$ в L^2 (в розумінні збіжності в L^2).

Використовуючи той факт, що функції a, b, c є стохастично замкнені, випливає, що для всіх $t\in[0,T]$

$$a\left(t,x_t^{(n)}(\theta)\right)\to a\left(t,x_t^*(\theta)\right);$$

$$b\left(t,x_t^{(n)}(\theta)\right)\to b\left(t,x_t^*(\theta)\right);$$

$$c\left(t,x_t^{(n)},u\right)\to c\left(t,x_t^*,u\right)$$

майже скрізь.

Отже,

$$\mathbb{E}\left|\int_0^t a\left(s,x_s^{(n)}\right)ds-\int_0^t a\left(s,x_s^*\right)ds\right|^2\le T\int_0^T\mathbb{E}\left|a\left(s,x_s^{(n)}-a\left(s,x_s^*\right)\right)\right|^2ds\to 0,$$

$$\mathbb{E}\left|\int_0^t b\left(s,x_s^{(n)}\right)dw(s)-\int_0^t b\left(s,x_s^*\right)dw(s)\right|^2\le T\int_0^T\mathbb{E}\left|b\left(s,x_s^{(n)}-b\left(s,x_s^*\right)\right)\right|^2ds\to 0;$$

$$\mathbb{E}\left|\int_0^t\int_U c\left(s,x_s^{(n)},u\right)\tilde{\nu}(ds,du)-\int_0^t\int_U c\left(s,x_s^*,u\right)\tilde{\nu}(ds,du)\right|^2=$$

$$=\int_0^t\int_U\mathbb{E}\left|c\left(s,x_s^{(n)},u\right)-c\left(s,x_s^*,u\right)\right|^2\Pi(du)ds\to 0.$$

Взявши границю в розумінні збіжності в L^2 і застосувавши її до обох сторін рівності (9), одержимо, що для довільного $t\in[0,T]$ рівність

$$x^*(t)=x(0)+\int_0^t a\left(s,x_s^*\right)ds+\int_0^t b\left(s,x_s^*\right)dw(s)+\int_0^t\int_U c\left(s,x_s^*,u\right)\tilde{\nu}(ds,du)$$

виконується майже скрізь і $x^*(t)=\varphi(t)$ для $t\in[-\tau,0]$.

Також, ивпадкові процеси зліва і справа останньої рівності не мають стрибків другого роду. Отже, ця рівність має місце для всіх $t\in[-\tau,T]$ майже скрізь і $x^*(t)$ є розв'язком (2), (3).

3. Про єдиність розв'язків СДФР.

Розглянемо задачу про єдиність розв'язку задачі (2), (3), (5).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1, і обмежений випадковий контрактор для СДФР (2) є правильним. Тоді розв'язок задачі (2), (3), (5) $\{x(t)\}\subset D_n$ є єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності.*

Доведення. Нехай $x^1(t)$, $x^2(t)$ – два розв'язки задачі (2), (3). Тоді $x(t)\equiv x^1(t)$, $z(t)\equiv x^2(t)-x^1(t)$ в (5). Значить, існує $y(t)$ з $\mathbb{D}_n$, який є розв'язком рівняння

$$x^2(t)-x^1(t)=y(t)+\int_0^t G_1\left(s,x_s^1\right)y(s)ds+$$

$$+\int_0^t G_2\left(s,x_s^1\right)y(s)dw(s)+\int_0^t\int_U G_3\left(s,x_s^1,u\right)\tilde{\nu}(ds,du). \tag{19}$$

Тоді, враховуючи (1) та (19), легко одержати оцінку

$$y(t)=\int_0^t\left[a\left(s,x_s^2\right)-a\left(s,x_s^1\right)-G_1\left(s,x_s^1\right)y(s)\right]ds+$$

$$+\int_0^t \left[b\left(s,x_s^2\right)-b\left(s,x_s^1\right)-G_2\left(s,x_s^1\right)y(s)\right]dw(s)+$$

$$+\int_0^t\int_U \left[c\left(s,x_s^2,u\right)-c\left(s,x_s^1,u\right)-G_3\left(s,x_s^1,u\right)y(s)\right]\tilde{\nu}(ds,du)=$$

$$=\int_0^t \left[a\left(s,x_s^1+z_s\right)-a\left(s,x_s^1\right)-G_1\left(s,x_s^1\right)y(s)\right]ds+$$

$$+\int_0^t \left[b\left(s,x_s^1+z_s\right)-b\left(s,x_s^1\right)-G_2\left(s,x_s^1\right)y(s)\right]dw(s)+$$

$$+\int_0^t\int_U \left[c\left(s,x_s^1+z_s,u\right)-c\left(s,x_s^1,u\right)-G_3\left(s,x_s^1,u\right)y(s)\right]\tilde{\nu}(ds,du),$$

$$\sup_{0\le s\le t}|y(s)|\le K\int_0^t \|y(s)\|ds+$$

$$+K\sup_{0\le s\le t}\int_0^t \|y(s)\|dw(s)+K\sup_{0\le s\le t}\int_0^t\int_U \|y(s)\|\Pi(du)ds,$$

$$\mathbb{E}\|y(t)\|^2=\mathbb{E}\sup_{0\le s\le t}|y(s)|^2\le$$

$$\le 2\left(TK^2\int_0^t \mathbb{E}\|y(s)\|^2ds+\right)4K^2\int_0^t \mathbb{E}\|y(s)\|^2ds+$$

$$+4K^2\int_0^t \mathbb{E}\|y(s)\|^2ds\le 2K^2(T+8)\int_0^t \mathbb{E}\|y(s)\|^2ds.$$

Нагадаємо посилену нерівність Гронуола [1]: для вимірних функцій $\varphi(t)$ і $\alpha(t)$, для яких виконується співвідношення

$$\varphi(t)\le\alpha(t)+L\int_0^t \varphi(s)ds,\quad L>0,$$

справедлива нерівність

$$\varphi(t)\le\alpha(t)+L\int_0^t e^{L(t-s)}\alpha(s)ds.$$

Якщо позначити $\varphi(t) \equiv \mathbb{E}\|y(t)\|^2$, $L = 2K^2(T+8)$, $\alpha(t) \equiv 0$, то

$$0 \le \mathbb{E}\|y(t)\|^2 \le 2K^2(T+8)\int\limits_0^t e^{2K^2(T+8)} \cdot 0ds \le 0.$$

Значить,

$$\mathbb{E}\left\{\|y(t)\|^2/\mathcal{F}_0\right\} = 0, \quad \forall t \in [0,T],$$

майже скрізь. За властивостями умовного математичного сподівання, одержимо, що $y(t) \equiv 0$. Тоді, використовуючи (17) і (19), очевидно, що

$$0 \le \mathbb{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|x^1(t) - x^2(t)\right| \ne 0\right\} \le$$

$$\le \frac{4^2 \cdot 3^{2n} T\theta a^n}{(n+1)!(T+8)}\left[3 + (T+8)T^2S_1^2 + (T+8)T\left(S_2^2 + S_3^2\right)\right] \to 0$$

при $n \to \infty$.

Отже, $\mathbb{P}\left\{x^1(t) \ne x^2(t)\right\} = 0$.

Продовжуючи розв'язки $\{x^1(t)\}$ і $\{x^2(t)\}$ вправо, матимемо, що $x^1(t) = x^2(t)$ на $[0,T]$ майже скрізь з точністю до стохастичної еквівалентності. Отже, розв'язок є єдиний майже скрізь, що і треба було довести.

Зауважимо, що, якщо $c(t, x_t, u) \equiv 0$, то одержуються результати для дифузійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь з постійними коефіцієнтами [5].

1. *Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение* // Киев: Наукова думка, 1982. - 612 с.
2. *Altman M. Inverse differentiability, contractors and equations in Banach spaces* // Studia Math. - 1971. - V. 46. - P.1 - 15.
3. *Кис Н.Н. On integral contractors* // Journal of Integral Equations. - 1979. - P.35 - 46.
4. *Zhang B.C., Padgett W.J. The existence and uniqueness of solutions of stochastic differential-difference equations* // Stochastic Analysis and Appl. - 1998. - V. 2(3). - P.335 - 345.
5. *Jankovic Sv. On stochastic differential-difference equations and their random integral contractors* // Научные труды. - Том 562. - Математика. - Рига: Латвийский университет, 1991. - С. 74 - 84.
6. *Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер.* - М.: Наука, 1977. -352.
7. *Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов.* Том 1. - М.: Наука, 1994. - 544 с.
8. *Жакод Ж., Ширяев А.Н. Прежедьные теоремы для случайных процессов.* Том 2. - М.: Наука, 1994. - 486 с.
9. *Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, стохастичні та випадкові процеси. В 3-х Т. - Т.3. - Випадкові процеси. Теорія і стохастичне моделювання.* - Чернівці: Вид-во "Золоті литаври", 2009. - 798 с.

Одержано 19.05.2009