УДК 519.21

Т. В. Боярищева, І. Й. Поляк (Ужгородський нац. ун-т)

ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ДО ДВОВИМІРНОГО НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНУ В РІВНОМІРНІЙ МЕТРИЦІ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

The paper contains estimate of rate of convergence by characteristic functions of two-dimensional stochastic vector.

Робота містить оцінку швидкості збіжності для характеристичних функцій двовимірного випадкового вектора.

Дослідження швидкості збіжності у граничних теоремах є важливим напрямком у теорії ймовірностей. Та найбільш поширеними є дослідження, в яких вивчається збіжність функцій розподілу чи щільностей випадкових величин, тоді як багатовимірний випадок розглядається набагато рідше [2–4]. У даній роботі здійснено оцінку швидкості збіжності послідовності характеристичних функцій двовимірного випадкового вектора до характеристичної функції двовимірного нормального закону. При цьому оцінка отримується з допомогою псевдо момента, структура якого аналогічна до введеної у [1], лише узагальнена на двовимірний випадок.

Нехай (ξ_j, η_j), $j = 1, 2, ...$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових векторів з невиродженим розподілом $F(x, y)$, характеристичними функціями $f(s, t)$, $M\xi_j = 0$, $M\eta_j = 0$, $M\xi_j^2 = M\eta_j^2 = 1$. Позначимо через $\Phi(x, y)$ функцію розподілу двовимірного нормального закону, що має такі самі моменти першого і другого порядку, як і $F(x, y)$. Відповідна йому характеристична функція має вигляд

$$g(s,t) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(s^2 + 2rst + t^2)\right\},$$

де r – коефіцієнт кореляції (ξ_j, η_j). Функцію розподілу вектора

$$\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\sqrt{n}}, \frac{\eta_1, + \ldots + \eta_n}{\sqrt{n}}\right) \tag{1}$$

позначимо через $F_n(x, y)$, а відповідну характеристичну функцію через $\varphi_n(s, t)$. Оскільки $M\xi_j = 0$, $M\eta_j = 0$, $D\xi_j = 1$, $D\eta_j = 1$, і вектори (ξ_j, η_j) незалежні, то коефіцієнт кореляції вектора (1) дорівнює r.

Нехай

$$\nu = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \max\left(1, \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right) |d\Psi(x, y)|,$$

де $\Psi(x, y) = F(x, y) - \Phi(x, y)$.

Розглянемо метрику $\rho_n = \sup\limits_{s,t} |\varphi_n(s, t) - g(s, t)|$. Із умов, які накладені на (ξ_j, η_j), випливає, що $\rho_n \longrightarrow 0$.

Теорема 1. *Якщо $n > 1$, то для довільного $c \in \left(0, \frac{3\sqrt[3]{6}}{8}\right)$ при $\nu \le c(1-|r|)^2$:*

$$\rho_n \le \nu \max\left\{\frac{c^{(1)}}{\sqrt{n}(1-|r|)^{\frac{3}{2}}},\, 2(2c)^{n-1}\right\},$$

а при $\nu > c(1-|r|)^2$:

$$\rho_n \le \nu \max\left\{\frac{c^{(2)}}{\sqrt{n}(1-|r|)^{\frac{5}{2}}},\, \sup_{(s,t):\sqrt{x^2+t^2}\ge T_2} |f(s,t)|^n\right\},$$

де c^i – абсолютні сталі, що залежать тільки від , $T_2 = \frac{c(1-|r|)^2}{\nu}$.

Лема 1. *Для всіх s і t має місце нерівність*

$$\omega(s,t) = |f(s,t) - g(s,t)| \le \nu \min\left(1,\, \frac{1}{6}(s^2+t^2)^{\frac{3}{2}}\right).$$

Доведення. Враховуючи, що $M\xi_j = 0$, $M\eta_j = 0$, $D\xi_j = 1$, $D\eta_j = 1$, одержимо

$$f(s,t) - g(s,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(sx+ty)} d\Psi(x,y) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{i(sx+ty)} - 1 - i(tx+sy) - \frac{(i(tx+sy))^2}{2!}\right) d\Psi(x,y). \tag{2}$$

Із першої рівності у (2) одержимо

$$\omega(s,t) \le \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |d\Psi(x,y)| \le \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \max\left(1,\, (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right) d\Psi(x,y) = \nu. \tag{3}$$

Враховуючи нерівності

$$\left|e^{i\alpha} - 1 - i\alpha - \frac{(i\alpha)^2}{2}\right| \le \frac{|\alpha|^3}{6} \ \text{ і } \ (sx+ty)^2 \le (s^2+t^2)(x^2+y^2),$$

із другої рівності у (2)

$$\omega(s,t) \le \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{i(sx+ty)} - 1 - i(tx+sy) - \frac{(i(tx+sy))^2}{2!}\right| d\Psi(x,y) \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |tx+sy|^3\, |d\Psi(x,y)| \le \frac{1}{6}(s^2+t^2)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\, |d\Psi(x,y)| \le$$

$$\le \frac{1}{6}(s^2+t^2)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \max\left(1,\, (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right) |d\Psi(x,\, y)| = \frac{1}{6}(s^2+t^2)^{\frac{3}{2}}\nu. \tag{4}$$

Із (3) і (4) випливає справедливість леми.

Лема 2. *Нехай* $c \in \left(0,\ \frac{3\sqrt[3]{6}}{8}\right)$.

Якщо

$$\nu \le c(1-|r|)^2 \ \ i \ \sqrt{s^2+t^2} \le \sqrt{-\frac{2}{1-|r|}\ln\nu} = T_1,$$

то

$$|f(s,t)| \le \exp\left\{-(1-|r|)(s^2+t^2)c_1\right\}, \tag{5}$$

де $c_1 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{c}}{\sqrt[3]{36}} > 0$.

Якщо $\sqrt{s^2+t^2} > T_1$, *то*

$$|f(s,t)| \le 2\nu. \tag{6}$$

Якщо ж $\nu > c(1-|r|)^2$, *то при* $\sqrt{s^2+t^2} \le T_2 = \frac{c(1-|r|)}{\nu}$

$$|f(s,t)| \le \exp\left\{-(1-|r|)(s^2+t^2)c_2\right\}, \tag{7}$$

де $c_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{e}}{6}c > 0$.

Доведення.

$$|f(s,t)| = \left|f(s,t) - e^{-\frac{1}{2}(s^2+rst+t^2)} + e^{-\frac{1}{2}(s^2+rst+t^2)}\right| \le \omega(s,t) + e^{-\frac{1}{2}(s^2+rst+t^2)}. \tag{8}$$

Для всіх s і t справедлива нерівність

$$s^2+rst+t^2 \ge (1-|r|)(s^2+t^2). \tag{9}$$

Дійсно, при $r=0$ нерівність (9) очевидна. Нехай $r \ne 0$. Тоді

$$s^2+rst+t^2-(1-|r|)(s^2+t^2) = |r|\,(s^2+t^2)+2rst =$$

$$= |r|\left(s^2+t^2+2\frac{r}{|r|}\right) = |r|\,(s\pm t)^2 \ge 0,$$

оскільки $\frac{r}{|r|} = \pm 1$.

Із (9) і (8) одержуємо

$$|f(s,t)| \le \omega(s,\ t) + e^{-\frac{1}{2}(1-|r|)(x^2+t^2)}. \tag{10}$$

Із леми 1 випливає, що

$$\omega(s,\ t) \le \frac{\nu}{\sqrt[3]{36}}(s^2+t^2). \tag{11}$$

Дійсно, якщо $\frac{|\alpha|^3}{6}$, то

$$\min\left(1,\ \frac{|\alpha|^3}{6}\right) = \frac{|\alpha|^3}{6} = \frac{\alpha^2}{\sqrt[3]{36}}\frac{\alpha^2}{\sqrt[3]{6}} \le \frac{\alpha^2}{\sqrt[3]{36}}.$$

Якщо ж $\frac{|\alpha|^3}{6} > 1$, то

$$\min\left(1,\ \frac{|\alpha|^3}{6}\right) = 1 \leq \frac{\alpha^2}{\sqrt[3]{36}}.$$

Із (10) і (11) при $\sqrt{s^2+t^2} \leq T_1$

$$\Big| f(s,t) \leq e^{-\frac{1}{2}}(1-|r|)(s^2+t^2) + \nu\frac{s^2+t^2}{\sqrt[3]{36}} =$$

$$= e^{-\frac{1}{4}(1-|r|)(s^2+t^2)}\left(e^{-\frac{1}{4}(1-|r|)(s^2+t^2)} + e^{\frac{1}{4}(1-|r|)(s^2+t^2)}\nu\frac{s^2+t^2}{\sqrt[3]{36}}\right) \leq$$

$$\leq e^{-\frac{1}{4}(1-|r|)(s^2+t^2)}\left(1 + \nu^{-\frac{1}{2}}\nu\frac{s^2+t^2}{\sqrt[3]{36}}\right) \leq e^{-\frac{1}{4}(1-|r|)(s^2+t^2)}e^{\frac{1}{\nu^2}\frac{s^2+t^2}{\sqrt[3]{36}}} \leq$$

$$\leq e^{-\frac{1}{4}(1-|r|)(s^2+t^2)+\frac{\sqrt{c}(1-|r|)}{\sqrt[3]{36}}(s^2+t^2)} = \exp\left\{-(1-|r|)(s^2+t^2)c_1\right\}.$$

Якщо ж $\sqrt{s^2+t^2} > T_1$, то із (10) і леми 1

$$|f(s,t)| \leq e^{-\frac{1}{2}(1-|r|)(s^2+t^2)} + \nu \leq 2\nu.$$

Нехай $\nu > c(1-|r|)^2$, а $\sqrt{s^2+t^2} \leq T_2$. Тоді із (10) і леми 1 одержуємо (врахувавши, що $T_2 < 1$), що

$$|f(s,t)| \leq e^{-\frac{1}{2}(1-|r|)(s^2+t^2)}\left(1 + e^{\frac{1}{2}(1-|r|)(s^2+t^2)}\nu\frac{(s^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}{6}\right) \leq$$

$$\leq e^{-\frac{1}{2}(1-|r|)(s^2+t^2)}\left(1 + e^{\frac{1}{2}(1-|r|)(s^2+t^2)}\frac{\nu}{6}(s^2+t^2)T_2\right) \leq$$

$$\leq e^{-\frac{1}{2}(1-|r|)(s^2+t^2)}\left(1 + \sqrt{e}(s^2+t^2)\frac{1}{6}c(1-|r|)^2\right) \leq \exp\left\{-(1-|r|)(s^2+t^2)c_2\right\}.$$

Доведення теореми. Із визначення рівномірної метрики для характеристичних функцій одержуємо

$$\rho_n = \sup_{s,\,t}|\varphi_n(s,t) - g(s,t)| = \sup_{s,\,t}\left|f_n\left(\frac{s}{\sqrt{n}},\ \frac{t}{\sqrt{n}}\right) - g^n\left(\frac{s}{\sqrt{n}},\ \frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| =$$

$$= \sup\nolimits_{s,\,t}|f^n(s,t) - g^n(s,t)| =$$

$$= \max\left\{\sup_{s,\,t:\sqrt{s^2+t^2}\leq T_k}|f^n(s,t) - g^n(s,t)|,\ \sup_{s,\,t:\sqrt{s^2+t^2}\leq T_k^2}|f^n(s,t)|,\ \sup_{s,\,t:\sqrt{s^2+t^2}\leq T_k^2}|g^n(s,t)|\right\}. \quad (12)$$

Оцінимо кожен вираз у (12). Для довільних a і b справедлива нерівність

$$|a^n - b^n| \leq |a-b|\sum_{k=1}^{n}|a|^{n-k}|b|^{k-1}. \quad (13)$$

Дійсно,

$$a^n - b^n = a^n - a^{n-1}b + a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 + a^{n-2}b^2 - \ldots - b^n =$$

$$= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}),$$

звідки випливає нерівність (13).

Покладемо в (13) $a = f(s,t)$, $b = g(s,t)$, тоді із (13) одержуємо

$$|f^n(s,t) - g^n(s,t)| \le |f(s,t) - g(s,t)| \sum_{j=1}^{n} |f(s,t)|^{n-j} \, |g(s,t)|^{j-1}.$$

Із лем 1 і 2 при $\sqrt{s^2+t^2} \le T_k$ із нерівності (9) маємо:

$$|f^n(s,t) - g^n(s,t)| \le \frac{\nu(s^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}{6} \sum_{j=1}^{n} e^{-(1-|r|)(s^2+t^2)c_k(n-j)} e^{-\frac{1}{2}(s^2+2rst+t^2)(j-1)} \le$$

$$\frac{\nu(s^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}{6} \sum_{j=1}^{n} e^{-(1-|r|)(s^2+t^2)c_k(n-1)} = \frac{\nu}{6}(s^2+t^2)^{\frac{3}{2}} n e^{-(1-|r|)(s^2+t^2)c_k(n-1)}.$$

Тому при $n > 1$

$$\sup_{s,\,t:\sqrt{s^2+t^2}\le T_k} |f^n(s,t) - g^n(s,t)| \le$$

$$\le \sup_{s,\,t:\sqrt{s^2+t^2}\le T_k} \frac{\nu n}{6\,(1-|r|)^{\frac{3}{2}}\,(n-1)^{\frac{3}{2}} c_k^{\frac{3}{2}}} \left((1-|r|)(s^2+t^2)(n-1)c_k\right)^{\frac{3}{2}} \times e^{-c_k(1-|r|)(s^2+t^2)(n-1)} \le$$

$$\le \frac{\nu}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{2}}{3c_k^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{e^{-\frac{3}{2}}}{(1-|r|)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\nu}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{3}}{2c_k^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}} (1-|r|)^{\frac{3}{2}}}. \tag{14}$$

Тут використано, що функція $y = x^{\frac{3}{2}} e^{-x}$ обмежена при $x \ge 0$. Дійсно,

$$y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} e^{-x} - x^{\frac{3}{2}} e^{-x} = x^{\frac{1}{2}} e^{-x} \left(\frac{3}{2} - x\right), \text{ і } \max_{x\ge 0} y = y\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2}}.$$

У випадку $\nu \le c(1-|r|)^2$ із леми 2

$$\sup_{s,\,t:\sqrt{s^2+t^2}>T_1^2} |f(s,t)|^n \le (2\nu)^n = 2\nu(2c(1-|r|)^2)^{n-1} \le (2c)^{n-1} 2\nu, \tag{15}$$

а

$$\sup_{s,\,t:\sqrt{s^2+t^2}>T_1^2} |g(s,t)|^n \le \sup_{s,\,t:\sqrt{s^2+t^2}>T_1^2} e^{-\frac{1}{2}(1-|r|)(s^2+t^2)n} \le e^{-\frac{n}{2}(1-|r|)T_1^2} = \nu^n \le \nu c^{n-1}. \tag{16}$$

Тому при $n > 1$ у випадку $\nu \le c(1-|r|)^2$ із (12), (14), (15) і (16) одержуємо

$$\rho_n \le \nu \max\left(\frac{c^{(1)}}{\sqrt{n}(1-|r|)^{\frac{3}{2}}},\, 2(2c)^{n-1}\right). \tag{17}$$

Якщо $\nu > c(1-|r|)^2$, то

$$\sup_{s,\,t:\sqrt{s^2+t^2}>T_2^2} |g(s,t)|^n \le \sup_{s,\,t:\sqrt{s^2+t^2}>T_2^2} e^{-\frac{n}{2}(1-|r|)(s^2+t^2)} \le$$

$$\leq \sup_{s,t:\sqrt{s^2+t^2}>T_2^2} \frac{\nu\sqrt{s^2+t^2}}{c(1-|r|)^2} e^{-\frac{n}{2}(1-|r|)(s^2+t^2)} \leq$$

$$\leq \sup_{s,t:\sqrt{s^2+t^2}>T_2^2} \frac{\nu\sqrt{2}}{\sqrt{n}c(1-|r|)^{\frac{5}{2}}} \sqrt{\frac{n}{2}(1-|r|)(s^2+t^2)} e^{-\frac{n}{2}(1-|r|)(s^2+t^2)} \leq \frac{\nu c^{(3)}}{\sqrt{n}(1-|r|)^{\frac{5}{2}}}. \quad (18)$$

Із (17) випливає перше твердження теореми, а з (12), (14) і (8) – друге.

1. *Золотарев В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. – М.: Наука. – 1986. – 416 с.
2. *Садикова С. М.* Двумерные аналоги неравенства Эсесена с применением к центральной предельной теореме // Теория вероятностей и её применения . – 1966. – Вип. 3. – Т. XI. – С. 369–380.
3. *Садикова С. М.* Некоторые неравенства для характеристических функций // Теория вероятностей и её применения . – 1966. – Вип. 3. – Т. XI. – С. 500–506.
4. *Садикова С. М.* О многомерной центральной предельной теореме // Теория вероятностей и её применения . – 1968. – Вип. 1. – Т. XIII. – С. 164–170.

Одержано 16.06.2009