УДК 519.6

М. І. Глебена (Ужгородський нац. ун-т)
Г. Г. Цегелик (Львівський нац. ун-т імені Івана Франка)

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНОСТІ МЕТОДУ ТИПУ ПОКООРДИНАТНОГО ПІДЙОМУ З МЕТОДОМ ХУКА-ДЖИВСА ДЛЯ ВІДШУКАННЯ АБСОЛЮТНОГО ЕКСТРЕМУМУ НЕГЛАДКИХ І РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ

There is briefly given the core of Hooke and Jeeves' method of finding the global extremum of nonsmooth and discontinuous functions. The comparative analysis of this method with the method of by-coordinate growth is carried out on the efficiency. The advantages of the method of by-coordinate growth are displayed.

Приведено суть методу Хука-Дживса відшукання абсолютного екстремуму негладких і розривних функцій та зроблено порівняльний аналіз ефективності методу типу покоординатного підйому з цим методом.Вказано на переваги методу покоординатного підйому.

Вступ. Проблема відшукання абсолютного екстремуму негладких і розривних функцій часто виникає під час розв'язування різних класів прикладних задач і задач в самій математиці [1,2]. Тому великий інтерес становить розробка чисельних методів, за допомогою яких можна було б знаходити абсолютний екстремум як неперервно-диференційованих, так і довільних негладких і розривних функцій.

Нами ведеться робота над розробленням таких методів. В їх основу покладено використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично [3, 4]. Зокрема, в [5] побудовано метод оптимізації негладких і розривних функцій однієї дійсної змінної, заданих на проміжку. В [6] побудовано чисельний метод типу покоординатного підйому (МПП) відшукання абсолютного екстремуму недиференційованих функцій від двох дійсних змінних. У роботі [7] розроблено метод відшукання абсолютного екстремуму функцій багатьох змінних.

В даній роботі зроблено порівняльний аналіз методу [7] з одним із методів нульового порядку, а саме методом Хука-Дживса (ХД).

Постановка задачі. Нехай задана функція $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, визначена в області $D = \{a_1 \le x_1 \le \bar{a}_1, a_2 \le x_2 \le \bar{a}_2, \ldots, a_n \le x_n \le \bar{a}_n\}$. Необхідно знайти абсолютний екстремум цієї функції, яка, взагалі кажучи, може бути довільною негладкою чи розривною в D.

Метод Хука-Дживса (сіткового пошуку) [8, 9]. Назва методу пов'язана з тим, що пошук фактично проводиться, використовуючи вузли деякої сітки. Метод є модифікацією методу покоординатного спуску, його ідея полягає в тому, що пошук періодично проводиться в додаткових напрямах, крім координатних, що може істотно пришвидшити збіжність. По суті процедура Хука-Дживса являє собою комбінацію „досліджуючого" пошуку з циклічною заміною змінних і „пошуку за зразком" з використанням деяких евристичних правил. Досліджуючий пошук орієнтований на виявлення характеру локальної поведінки функції і визначення напряму вздовж „яру".

Досліджуючий пошук. Для проведення досліджуючого пошуку необхідно задати величину кроку, яка може бути різною для різних координатних напрямів і може змінюватись в процесі пошуку. Досліджуючий пошук починається з деякої початкової точки x_k. Якщо значення функції в пробній точці не перевищує значення у початковій точці, то крок пошуку розглядається як успішний. В іншому випадку треба повернутися в попередню точку і зробити крок у протилежному напрямі з наступною перевіркою значення функції. Після перебору всіх n координат досліджуючий пошук завершується. Одержана в результаті точка x_{k+1} називається базовою точкою.

Пошук за зразком. Пошук за зразком полягає в реалізації єдиного кроку із одержаної базової точки вздовж прямої, яка з'єднує цю точку з попередньою базовою точкою. Нова точка зразку визначається формулою:

$$x'_{k+1} = x_{k+1} + (x_{k+1} - x_k)\,.$$

Точка x'_{k+1} фіксується як тимчасова базова точка і знову проводиться досліджуючий пошук. Якщо в результаті одержується точка з меншим значенням функції, ніж в точці x'_{k+1}, то вона розглядається як нова базова точка x''_{k+1}. З другого боку, якщо досліджуючий пошук є невдалим, то необхідно повернутись в точку x'_{k+1} , зменшити величину кроку шляхом введення деякого множника і відновити досліджуючий пошук. Пошук завершується, коли величина кроку є достатньо малою.

Розглянемо декілька прикладів, в процесі розв'язання яких порівняємо роботу двох методів.

Приклад 1. *Знайти абсолютний мінімум функції*

$$f(x,y) = -exp\left[-\left|cos(x)\,cos(y)\,e^{\left|1-\left[\left(x^2+y^2\right)^{0,5}/\pi\right]\right|}\right|^{-1}\right],$$

графік якої зображено на мал.1, в області $D = \{-11 \le x \le 11, -11 \le y \le 11\}$. *Мінімальне значення функції рівне* $f(x^*, y^*) \approx -0,96354$.

Порівняльна характеристика методів наведена в таблиці 1.

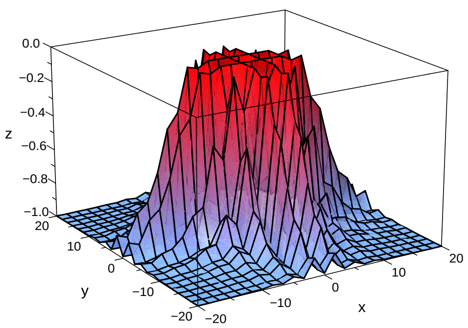

Рис. 1

Приклад 2. *Знайти абсолютний мінімум функції*

$$f(x,y) = sin(x+y) + (x-y)^2 - 1,5x + 2,5y + 1,$$

графік якої зображено на мал.2, в області $D = \{-1,5 \le x \le 4, -3 \le y \le 4\}$. *Мінімальне значення функції рівне* $f(x^*, y^*) \approx -1,9133$.

Порівняльна характеристика методів наведена в таблиці 2.

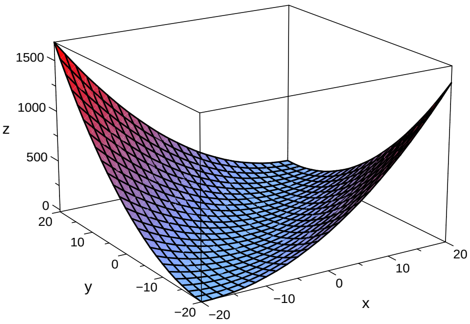

Рис. 2

Приклад 3. *Знайти абсолютний мінімум функції*

$$f(x,y) = -4\left|sin(x)\,cos(y)\,e^{\left|cos\left(\left(x^2+y^2\right)/200\right)\right|}\right|,$$

графік якої зображено на мал.3, в області $D = \{-10 \le x \le 10, -10 \le y \le 10\}$. *Мінімальне значення функції рівне* $f(x^*, y^*) \approx -10,8723$.

Порівняльна характеристика методів наведена в таблиці 3.

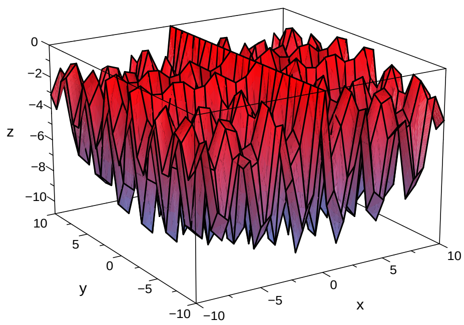

Рис. 3

Приклад 4. *Знайти абсолютний мінімум функції*

$$f(x,y) = sin^2(3\pi x) + (x-1)^2\left[1 + sin^2(3\pi y)\right] + (y-1)^2\left[1 + sin^2(2\pi y)\right],$$

графік якої зображено на мал.4, в області $D = \{-10 \le x \le 10, -10 \le y \le 10\}$. *Мінімальне значення функції рівне* $f(x^*, y^*) \approx 0$.

Порівняльна характеристика методів наведена в таблиці 4.

Висновок. Проаналізувавши отримані результати, бачимо, що метод типу покоординатного підйому є ефективним для відшукання глобального екстремуму довільних функції. Перевагою методу є те, що жодних обмежень на оптимізаційну функцію не накладається. Тобто не вимагається диференційованість функції, виконання умови Ліпшиця. Збіжність методу не залежить від вибору початкового наближення. До недоліків можна віднести відносну повільну

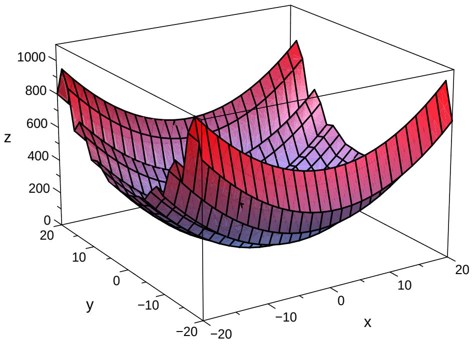

Рис. 4

швидкість збіжності. Метод Хука-Дживса є швидшим методом, але для багатоекстремальних задач (тобто для відшукання глобального екстремуму) цей метод дає результат тільки при початковому наближенні близькому до точки, в якій досягається глобальний екстремум функції (приклади 1,3). Хоча метод Хука-Дживса ніяк не пов'язаний з обчисленням похідних, але гарантувати його „розумну “ поведінку можна тільки для гладких функцій (приклади 2, 4). Крім того, без вимоги умови опуклості довести глобальну збіжність методу не вдається.

Таблиця 1

Метод	$[a,b]$	$[c,d]$	(x_0, y_0)	s	h	розв'язок	знач. функц.
МПП	[-11;11]	[-11;11]	(-10;-10)	0.01	0.01	(-9,65;-9,65)	-0,9635342
МПП	[-11;11]	[-11;11]	(-1;-1)	0,01	0,01	(-9,65;-9,65)	-0,9635342
МПП	[-9,8;-9]	[-9,8;-9]	(-9,6;-9,6)	0,001	0,001	(-9,647;-9,647)	-0,963534807
МПП	[-9,8;-9,5]	[-9,8;-9,5]	(-9,64;-9,64)	0,0001	0,0001	(-9,6462;-9,6462)	-0,963534833
ХД	-	-	(-10;-10)	0,01	0,01	(-9,65;-9,65)	-0,9635342
ХД	-	-	(10;10)	0,01	0,01	(9,65;9,65)	-0,9635428
ХД	-	-	(-1;-1)	0,01	0,01	(-5,4E-20;-5,4E-20)	-0,6922006
ХД	-	-	(-10;-10)	0,001	0,001	(-9,646;-9,646)	-0,963534832
ХД	-	-	(-1;-1)	0,0001	0,0001	(0;0)	-0,6922006

Таблиця 2

Метод	$[a,b]$	$[c,d]$	(x_0, y_0)	s	h	розв'язок	знач. функц.
МПП	[-1,5;2]	[-3;2]	(-1;-2)	0,01	0,01	(-0,57;-1,57)	-1,91233043
МПП	[-1,5;4]	[-3;4]	(-0,5;-1,5)	0,01	0,01	(-0,56;-1,56)	-1,91294048
МПП	[-1,5;1]	[-3;-1]	(-0,5;-1)	0,001	0,001	(-0,549;-1,548)	-1,91321902
МПП	[-0,8;-0,2]	[-1,7;-1,3]	(-0,54;-1,54)	0,0001	0,0001	(-0,5473;-1,5473)	-1,91322294
ХД	-	-	(-1;-2)	0,01	0,01	(-0,547;-1,547)	-1,9132295
ХД	-	-	(-0,5;-1,5)	0,01	0,01	(-0,547;-1,547)	-1,9132295
ХД	-	-	(-1;-2)	0,001	0,001	(-0,548;-1,548)	-1,9132284
ХД	-	-	(-0,5;-1,5)	0,0001	0,0001	(-0,5472;-1,5472)	-1,91322295

Таблиця 3

Метод	$[a, b]$	$[c, d]$	(x_0, y_0)	s	h	розв'язок	знач. функц.
МПП	[-10;10]	[-10;10]	(-9;-9)	0,01	0,01	(-1,57;0)	10,8722981
МПП	[-10;10]	[-10;10]	(-1;-1)	0,01	0,01	(-1,57;0)	10,8722981
МПП	[-1,6;-1]	[-1;1]	(-1,55;-0,5)	0,001	0,001	(-1,572;0)	10,8722895
МПП	[-1,59;-1,54]	[-0,01;0,01]	(-1,572;0,02)	0,0001	0,0001	(-1,5707;0)	10,8723001
ХД	-	-	(-9;-9)	0,01	0,01	(-7,801;-9,361)	8,32855584
ХД	-	-	(10;10)	0,01	0,01	(10,9;9,35)	6,63755435
ХД	-	-	(-1;-1)	0,01	0,01	(-1,57;0)	10,8723001
ХД	-	-	(-9;-9)	0,001	0,001	(-7,801;-9,361)	8,32855584
ХД	-	-	(-1;-1)	0,0001	0,0001	(-1,5705;0)	10,8723000

Таблиця 4

Метод	$[a, b]$	$[c, d]$	(x_0, y_0)	s	h	розв'язок	знач. функц.
МПП	[-10;10]	[-10;10]	(-9;-9)	0,1	0,1	(1;1)	0
МПП	[-10;10]	[-10;10]	(-4;-4)	0,01	0,01	(1;1)	0
МПП	[-10;10]	[-10;10]	(1,1;1,1)	0,01	0,01	(1;1)	0
МПП	[-1;1]	[-1;1]	(0,3;0,3)	0,001	0,001	(1;1)	0
МПП	[0,8;1,2]	[0,8;1,2]	(0,95;0,95)	0,0001	0,0001	(1;1)	0
ХД	-	-	(10;10)	0,01	0,01	(2;1)	1
ХД	-	-	(-10;-10)	0,01	0,01	(1;1)	0
ХД	-	-	(-4;-4)	0,01	0,01	(1;1)	0
ХД	-	-	(1,1;1,1)	0,01	0,01	(0,67;1)	0,10988663
ХД	-	-	(-4;-4)	0,001	0,001	(1;1)	0
ХД	-	-	(-4;-4)	0,0001	0,0001	(1;1)	0
ХД	-	-	(10;10)	0,001	0,001	(1,99;1)	0,988956375

1. *Батухтин В. Д, Майборода Л. А.* Оптимизация разрывных функций. – М.: Наука, 1984. – 208 с.
2. *Шор Н. З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – К.: Наук. думка, 1979. – 199 с.
3. *Цегелик Г. Г.* Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, №9. – С. 1273–1276.
4. *Цегелик Г. Г., Федчишин Н. В.* Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип 50. – С. 209-211.
5. *Глебена М. І., Цегелик Г. Г.* Чисельний метод мажорантного типу відшукання екстремуму негладких і розривних функцій //Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.матем. і інформ. – 2006. - Вип.12-13. – С. 55-58.
6. *Глебена М. І., Цегелик Г. Г.* Чисельний метод відшукання екстремуму недиференційованих функцій двох дійсних змінних //Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.матем. і інформ. – 2007. - Вип.14-15. – С. 18-21.
7. *Глебена М. І., Цегелик Г. Г.* Чисельний метод покоординатного підйому відшукання абсолютного максимуму негладких і розривних функцій багатьох змінних //Прикладні проблеми механіки і матем. – 2009. - Вип.7 – С. 78-82.
8. *Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К.* Оптимизация в технике: В 2-х кн. Кн.1. Пер. с англ. – М.: Мир, 1986.
9. *Банди Б.* Методы оптимизации. Вводный курс. – М.: Радио и связь, 1988. –128 с.

Одержано ..2010