УДК 512.64

В. В. Бондаренко
(Ін-т математики НАН України)

КВАЗІМОНОМІАЛЬНІ МАТРИЦІ НАД ПОЛЕМ. I

In the paper we give main definitions and study properties of monomial and quasimonomial matrices over a field.

У цій роботі ми даємо основні означення і вивчаємо властивості мономіальних та квазімономіальних матриць над полем.

Мономіальні матриці відіграють важливу роль в багатьох математичних дослідженнях і, зокрема, в теорії матричних зображень груп [1], теорії лінійних алгебраїчних груп [2], теорії дискретних перетворень [3], теорії кодування [4], тощо.

Мономіальна матриця — це така квадратна матриця, в кожному рядку і в кожному стовпці стоїть рівно один ненульовий елемент. У більшості випадків додатково вимагається, щоб всі ненульові елементи були одиничними.

З формальних міркувань ми будемо притримуватись трохи іншої термінології. А саме, будемо називати квадратну матрицю над полем k мономіальною, якщо в кожному рядку і в кожному стовпці стоїть не більше одного ненульового елемента і при цьому всі такі елементи є одиничними. У випадку, коли виконується лише перша умова (а друга може виконуватися, а може й не виконуватися) матрицю будемо називати квазімономіальною, або (якщо хочемо звернути увагу на основне поле) k-мономіальною. Квазімономіальні матриці в цьому сенсі виникли в автора при класифікації унітрикутних зображень циклічної групи другого порядку над полем характеристики 2 [5]. У зв'язку з цим автор більш детально досліджує властивості таких матриць, і ця стаття є першою із низки статей автора на вказану тему.

1. Матричні зображення сагайдаків. При вивченні мономіальних матриць та їх узагальнень суттєву роль будуть відігравати сагайдаки та їх зображення (які введені в [1]). Нагадаємо відповідні означення, слідуючи монографії [7]. При розляді добутків відображень ми користуємося правостороннім записом.

Сагайдаком називають довільний орієнтований граф $Q = (Q_0, Q_1)$, де Q_0 — множина вершин і Q_1 — множина стрілок Q; ми завжди вважаємо, що обидві множини є скінченними (такий сагайдак називають скінченним). Очевидно, можна вважати, що $Q_0 = \{1, 2, \dots, q\}$. Початкову вершину стрілки λ позначаємо $s(\lambda)$, а кінцеву вершину стрілки λ — $t(\lambda)$. Запис $\lambda : x \to y$ буде означати, що λ є стрілкою, для якої $s(\lambda) = x$ і $t(\lambda) = y$. Якщо сагайдак не має кратних стрілок, то в цьому випадку будемо також писати $\lambda = (x, y)$. Неорієнтований граф, який відповідає сагайдаку $Q = (Q_0, Q_1)$, будемо позначати через $Q^\circ = (Q_0^\circ, Q_1^\circ)$; тут $Q_0^\circ = q_0$.

Спочатку дамо означення зображень сагайдака в термінах векторних просторів та лінійних відображень. Ми розглядаємо лише скінченновимірні зображення.

Зображенням сагайдака $Q = (Q_0, Q_1)$ над полем k називається пара $R = (U, \gamma)$, яка складається з набору

$$U = \{U_x \,|\, x \in Q_0\}$$

(скінченновимірних) векторних k-просторів U_x та набору

$$\gamma = \{\gamma_\alpha \,|\, \alpha : x \to y \;\text{ пробігає }\; Q_1\}$$

лінійних відображень $\gamma_\alpha : U_x \to U_y$.

Вектор

$$\overline{d} = \overline{d}(R) = (d_x), x \in Q_0,$$

де $d_x = \dim_k U_x$, називається *вектор-розмірністю* зображення R, а сума

$$d = \sum_{x \in Q_0} d_x$$

— його розмірністю.

Зображення $R = (U, \gamma)$ і $R' = (U', \gamma')$ сагайдака Q називаються еквівалентними, якщо існує набір

$$\lambda = \{\lambda_x \,|\, x \in Q_0\}$$

лінійних бієктивних відображень $\lambda_x : U_x \to U'_x$, такий, що для кожної стрілки $\alpha : x \to y$ діаграма

$$\begin{tikzcd} U_x \arrow[r, "\gamma_\alpha"] \arrow[d, "\lambda_x"'] & U_y \arrow[d, "\lambda_y"] \\ U'_x \arrow[r, "\gamma'_\alpha"] & U'_y \end{tikzcd}$$

комутативна, тобто $\gamma_\alpha \lambda_y = \lambda_x \gamma'_\alpha$.

Прямою сумою зображень $R' = (U', \gamma')$ *і* $R'' = (U'', \gamma'')$ називається зображення

$$R' \oplus R'' = (U' \oplus U'', \gamma' \oplus \gamma''),$$

де $\gamma' \oplus \gamma''$ позначає набір відображень

$$\{\gamma'_\alpha \oplus \gamma''_\alpha : U'_x \oplus U''_x \to U'_y \oplus U''_y \,|\, \alpha : x \to y \;\text{ пробігає }\; Q_1\}.$$

Зображення R називається розкладним, якщо воно еквівалентне прямій сумі двох ненульових зображень і нерозкладним у протилежному випадку (нульове зображення — це зображення розмірності 0).

Це означення можна переформулювати в термінах матриць. Будемо вважати, що сагайдак не містить ізольованих вершин (тобто таких, що не пов'язані ні з однією стрілкою). Число рядків матриці A будемо позначати $r(A)$, а число її стовпців — $c(A)$.

Матричне зображення сагайдака Q над полем k — це набір матриць

$$M = \{M_\alpha \,|\, \alpha : x \to y, \;\text{ пробігає }\; Q_1\}$$

з елементами із k, такий що виконуються наступні умови:

а) $r(M_\alpha) = r(M_\beta)$, якщо початкові вершини стрілок α і β збігаються;

б) $c(M_\alpha) = c(M_\beta)$, якщо кінцеві вершини стрілок α і β збігаються;

в) $r(M_\alpha) = c(M_\beta)$, якщо початкова вершина стрілки α збігається з кінцевою вершиною стрілки β.

Для матричного зображення M і вершини $x \in Q_0$ покладемо $d_x(M) = r(M_\alpha)$, якщо існує стрілка $\alpha = \{x \to y\}$, і $d_x(M) = c(M_\alpha)$, якщо існує стрілка $\alpha = \{z \to x\}$.

Вектор-розмірність матричного зображення M — це вектор

$$\overline{d} = \overline{d}(M) = (d_x), x \in Q_0,$$

де $d_x = d_x(M)$, а розмірність — це число $d = \sum_{x \in Q_0} d_x$.

Матричних зображення M і M' називаються еквівалентними, якщо існує набір оборотних матриць $N = \{N_x \mid x \in Q_0\}$, таких, що

г) $r(N_x) = d_x(M)$ і $c(N_x) = d_x(M')$;

д) $M_\alpha N_y = N_x M'_\alpha$ для довільної стрілки $\alpha : x \to y$.

Якщо в кожному векторному просторі U_x зображення $R = (U, \gamma)$ сагайдака без ізольованих вершин зафіксувати деякий базис і виписати матриці M_α, що відповідають відображенням γ_α, то отримаємо матричне зображення $M = \{M_\alpha\}$. Очевидно, що два зображення еквівалентні тоді і лише тоді, коли еквівалентні відповідні їм матричні зображення. Природним чином переформульовуються на матричній мові такі поняття, як розкладні і нерозкладні зображення.

Матричне зображення сагайдака Q, всі матриці якого є квадратними, назвемо невиродженим, якщо кожна з цих матриць є невиродженою. Якщо при цьому сагайдак зв'язний, то всі координати вектор-розмірності такого зображення рівні між собою.

Якщо сагайдак має ізольовані вершини, то означення матричних зображень є більш витонченим, хоча на перший погляд і здається, що воно не зовсім природне (відносно цього означення матричного зображення в загальному випадку див. монографію [7]). Але якщо розглядаються лише такі зображення, що всі координати вектор-розмірності не перевищують одиниці (а саме такий випадок і буде зустрічатися в наших дослідженнях), то ізольованими вершинами можна знехтувати, тобто можна вважати, що матричне зображення сагайдака Q в цьому випадку — це матричне зображення його максимального підсагайдака Q', що не містить ізольованих вершин.

Теорія зображень сагайдаків є на сьогодні досить розвиненою. Ми сформулюємо лише одне твердження, яке випливає із загальних теорем, але може бути легко доведеним і безпосередньо (виходячи лише із означень).

Твердження 1. 1) *Нехай зв'язний сагайдак $Q = (Q_0, Q_1)$ є деревом (тобто граф Q_0° не містить циклів) і M — його невироджене матричне зображення вектор-розмірності $\overline{d} = \overline{d}(M) = (d_x)$, де $d_x = m > 0$ для довільного $x \in Q_0$. Тоді M еквівалентне зображенню, всі матриці якого є одиничними матрицями розміру $m \times m$.*

2) *Нехай сагайдак* $Q = (Q_0, Q_1)$ *зв'язний і такий, що граф* Q_0° *містить лише один цикл (іншими словами, сагайдак* Q_0 *містить один цикл, не обов'язково з однаковим напрямком стрілок). Зафіксуємо стрілку* α, *що належить цьому циклу. Нехай, далі,* M *— невироджене матричне зображення сагайдака* Q *вектор-розмірності* $\overline{d} = \overline{d}(M) = (d_x)$, *де* $d_x = m > 0$. *Тоді* M *еквівалентне зображенню, всі матриці якого, окрім матриці* M_α, *є одиничними матрицями розміру* $m \times m$.

2. Сагайдак мономіальної матриці. Нагадаємо, що квадратну матрицю над полем k ми називаємо мономіальною, якщо в кожному її рядку і в кожному її стовпці стоїть не більше одного ненульового елемента, причому всі ненульові елементи є одиничними.

Нехай M — мономіальна матриця розміру $n \times n$. Покладемо $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Сагайдаком матриці M назвемо сагайдак $Q(M)$ з множиною вершин $Q_0(M) = N_n$ і стрілками $i \to j$, де (i, j) пробігають всі пари, такі що на перетині i-го рядка і j-го стовпця в матриці M стоїть ненульовий елемент. Безпосередньо із означення мономіальної матриці випливає, що сагайдак $Q(M)$ є незв'язним об'єднанням ланцюгів L_p і циклів C_q, стрілки кожного із яких мають однаковий напрямок (індекси p та q пробігають деякі скінченні множини); довжина кожного із вказаних циклів (тобто кількість вершин) більша за одиницю, а серед ланцюгів можуть зустрічатися і ланцюги довжини 1 (ізольовані вершини). Очевидно, що мономіальна матриця однозначно визначається своїм сагайдаком. Легко побачити, що коранг мономіальної матриці M дорівнює числу зв'язних компонент відповідного сагайдака, які є ланцюгами.

Матриці A і B (не обов'язково мономіальні) назвемо переставно подібними, якщо B можна отримати із A за допомогою однакової перестановки її рядків та стовпців (очевидно, тоді і A можна отримати із B таким же способом). Кожна така перестановка задається підстановкою σ на множині $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. А саме $\sigma(i) = j$, якщо в результаті перестановки i-ий рядок (чи стовпець) став j-им. Навпаки, кожна підстановка σ задає деяку перестановку рядків і стовпців матриці A: їх треба переставити так, щоб, для кожного $i \in N_n$, i-ий рядок (стовпець) став $\sigma(i)$-им. Таким чином отриману матрицю позначимо A^σ.

Далі, позначимо через P_σ мономіальну матрицю, в якій на місці (i, j) стоїть одиничний елемент тоді і лише тоді, коли $\sigma(i) = j$. Використовуючи сказане, а також зв'язок між елементарними перетвореннями та елементарними матрицями, легко побачити, що $A^\sigma = P_\sigma A P_\sigma^{-1}$. Отже, маємо таке твердження.

Лема 1. *Матриці* A *і* B *переставно подібні тоді і лише тоді, коли* $B = P_\sigma A P_\sigma^{-1}$ *для деякої підстановки* σ.

Доведемо тепер наступну теорему.

Теорема 1. *Мономіальні матриці* M *і* M' *переставно подібні тоді і лише тоді, коли їх сагайдаки ізоморфні.*

Дійсно, якщо ми однаковим чином переставимо рядки і стовпці матриці M, то сагайдак матриці не зміниться, а лише зміниться нумерація його вершин. А саме, якщо $M' = P_\sigma M P_\sigma^{-1}$, то стрілка $i \to j$ в $Q(M)$ стане стрілкою $\sigma(i) \to \sigma(j)$ в $P(M')$, тобто сагайдак $Q(M')$ отримується із сагайдака $Q(M)$ заміною i-ої його вершини на $\sigma(i)$-у зі збереженням стрілок. А це означає, що відображення

$i \to \sigma(i)$ для вершин і відображення $\{i \to j\} \to \{\sigma(i) \to \sigma(j)\}$ для стрілок задають ізоморфізм сагайдаків $Q(M)$ і $Q(M')$.

Навпаки, якщо сагайдаки $Q(M)$ і $Q(M')$ ізоморфні, тобто маємо бієктивне відображення $\delta : Q_0(M) \to Q_0(M')$ таке, що $\delta(i) \to \delta(j)$ є стрілкою в $Q(M')$ тоді і лише тоді, коли $i \to j$ є стрілкою в $Q(M)$, то δ як підстановка на $Q_0(M) = Q_0(M')$ є саме тією перестановкою рядків і стовпців матриці M, яка переводить M в M'.

Теорема доведена.

Зауважимо, що для матриці P_σ (див. лему 1) як мономіальної матриці також можна розглядати її сагайдак, і тоді у випадку мономіальних A та B могло б виникнути запитання про сагайдаки матриць $P_\sigma A$, AP_σ^{-1}, тощо. Але ми розглядатимемо сагайдак лише для основних матриць (а для додаткових, які задають подібність, — ні). Проте питання про добуток мономіальних матриць є природним і ми переходимо до його розгляду.

Зрозуміло, що добуток мономіальних матриць є мономіальною. Наступне твердження (яке по суті випливає із означень) говорить про явний вигляд сагайдака нової матриці.

Твердження 2. *Нехай M' і M'' — мономіальні матриці розміру $n \times n$ із сагайдаками $Q' = (N_n, Q_1'))$ та $Q'' = (N_n, Q_1'')$. Тоді сагайдак $Q = (N_n, Q_1)$ мономіальної матриці $M = M'M''$ містить стрілку $i \to j$ тоді і лише тоді, коли існує $s \in N_n$ таке, що Q' має стрілку $i \to s$, а Q'' — стрілку $s \to j$.*

Аналогічне твердження має місце і для добутку m мономіальних матриць, яке ми сформулюємо трохи по-іншому.

Твердження 3. *Нехай $M_i, i = 1, \ldots, m,$ — мономіальні матриці розміру $n \times n$ із сагайдаками $Q_i = (N_n, Q_{i1}))$. Позначимо через $\overline{Q}$ сагайдак із множиною вершин N_n і множиною стрілок $\overline{Q}_1 = \cup_{i=1}^m Q_{i1}$ і покладемо, для $\alpha \in \overline{Q}_1$, $v(\alpha) = s$, якщо $\alpha \in Q_{s1}$. Тоді стрілками сагайдака $Q = (N_n, Q_1)$ мономіальної матриці $M = M_1 \ldots M_s$ є орієнтовні шляхи $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ в $\overline{Q}$ такі, що $v(\alpha_i) = i$ кожного $i = 1, \ldots, m$.*

Твердження 3 легко доести m-кратним застосуванням твердження 2.

Наслідок 1. *Нехай M — мономіальна матриця розміру $n \times n$ із сагайдаком $Q = (N_n, Q_1)$. Тоді стрілками сагайдака $Q^m = (N_n, Q_1^m)$ мономіальної матриці M^m є орієнтовні шляхи довжини m в Q.*

В свою чергу із цього наслідку випливає наступне твердження.

Наслідок 2. *Мономіальна матриця M є нільпотентною тоді і лише тоді, коли її сагайдак $Q = (N_n, Q_1)$ не містить циклів. У цьому випадку ступінь її нільпотентності дорівнює довжині найдовшої зв'язної компоненти сагайдака Q.*

3. Інваріанти квазімономіальної матриці. Нагадаємо, що квадратну матрицю над полем k ми називаємо квазімономіальною або k-мономіальною, якщо в кожному її рядку і в кожному її стовпці стоїть не більше одного ненульового елемента.

Нехай M — квазімономіальна матриця розміру $n \times n$ і M^1 — мономіальна матриця, що відповідає матриці M. Сагайдаком $Q(M) = (Q_0(M), Q_1(M))$ квазімономіальної матриці M назвемо сагайдак $Q(M^1)$. У цьому випадку матриця M визначається однозначно своїм сагайдаком і його невиродженим матричним зображенням $f = f(M)$ вектор-розмірності $(1, 1, \ldots, 1)$, що індукується ненульовими елементами матриці M; іншими словами, для будь-якої стрілки $\alpha = \{i \to j\}$ сагайдака $Q(M)$ матриця розміру 1×1 $f_\alpha = f_\alpha(M)$ — це елемент поля k, який стоїть в матриці M на місці (i, j). Отже, квазімономіальна матриця M однозначно задається парою (Q, f), де $Q = Q(M)$ — сагайдак матриці M і $f = f(M)$ — відповідне їй матричне зображення Q (нагадаємо, що при розгляді матричних зображень сагайдака ми ігноруємо його ізольовані вершини).

Теорема 2. *Квазімономіальні матриці M і M' із сагайдаками $Q = Q(M)$ і $Q' = Q(M')$ та матричними зображеннями $f = f(M)$ і $f' = f(M')$ переставно подібні тоді і лише тоді, коли існує ізоморфізм $\varphi : Q \to Q'$ такий, що $f_\alpha = \varphi(\alpha) f_\alpha$ для кожної стрілки $\alpha \in Q_0(M)$.*

Теорему можна довести таким же чином, як і теорему 1; треба лише додатково слідкувати за ненульовими (вже не обов'язково одиничними) елементами матриць і за зображеннями відповідних сагайдаків.

Не важко модифікувати на випадок квазімономіальних матриць і твердження 2, 3 та наслідок 1. Більш детально про такі твердження та про інші властивості квазімономіальних матриць автор розгляне в своїй наступній статті на цю тему.

1. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. – М.: "Наука", 1969. – 668 с.
2. *Хамфри Дж.* Линейные алгебраические группы. – М.: "Наука", 1980. – 398 с.
3. *Дагман Э. Е., Кухарев Г. А.* Быстрые дискретные ортогональные преобразования. – Новосибирск: "Наука", 1983. – 230 с.
4. *Сидельников В. М.* Теория кодирования. – М.: Физматлит, 2008. – 324 с.
5. Бондаренко В. В. Про унітрикутні зображення скінченних груп // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2006. – Вип. 12–13. – С. 27–32.
6. *Gabriel P.* Unzerlegbure Darstellungen, I // Manus. Math. – 1972. – **6**, N 1. – P. 71–103.
7. *Бондаренко В. М.* Зображення гельфандових графів. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2005. – 228 с.

Одержано 07.11.2009