УДК 519.6

М. І. Глебена (Ужгородський нац. ун-т)
Г. Г. Цегелик (Львівський нац. ун-т імені Івана Франка)

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ПОКООРДИНАТНОГО ПІДЙОМУ ВІДШУКАННЯ АБСОЛЮТНОГО ЕКСТРЕМУМУ ДОВІЛЬНОЇ ЛОГАРИФМІЧНО ВГНУТОЇ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

The numerical method of finding of the global extremum of logarithmic concave arbitrary multi-variables functions is suggested. The method is based on the use of the apparatus of non-classical Newtonian majorant and diagrams functions which are given discretely.

Пропонується чисельний метод відшукання абсолютного екстремуму довільної логарифмічно вгнутої функції багатьох змінних, в основі якого лежить використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично.

Вступ. При розв'язуванні різних класів прикладних задач і задач в самій математиці нерідко доводиться мати справу з відшуканням екстремуму негладких і розривних функцій. Такі ситуації зустрічаються, наприклад, в теорії апроксимації, при розв'язуванні окремих задач дослідження операцій, в застосуванні теорії керування рухом динамічних систем тощо. Тому великий інтерес становить розробка чисельних методів, за допомогою яких можна було б знаходити абсолютний екстремум як неперервно-диференційовних, так і довільних негладких і розривних функцій. Нами ведеться робота над розробленням таких методів. В їх основу покладено використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично [1]. Зокрема, в [2] побудовано метод оптимізації негладких і розривних функцій однієї дійсної змінної, заданих на проміжку. В [3] розроблено чисельний метод типу покоординатного підйому відшукання абсолютного екстремуму недиференційованих функцій від двох дійсних змінних. У [4] побудовано алгоритм методу покоординатного підйому у випадку довільних строго логарифмічно вгнутих функцій двох дійсних змінних. В даній роботі розглядається побудова алгоритму методу у випадку довільних строго логарифмічно вгнутих функцій багатьох змінних.

Постановка задачі. Нехай в області D, заданій системою нерівностей

$$a_i \le x_i \le b_i,\ i = 1, 2, \dots, n,$$

визначена довільна логарифмічно вгнута функція $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, тобто $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ для всіх $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ і функція $lnf(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є вгнутою в D (якщо функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є вгнутою, але умова $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ для всіх $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ не виконується, то виконання цієї умови завжди можна забезпечити). Необхідно побудувати чисельний метод для відшукання абсолютного максимуму цієї функції.

У цьому випадку алгоритм складається з низки кроків, на кожному з яких використовується алгоритм відшукання абсолютного екстремуму довільної логарифмічно вгнутої функції однієї змінної [2].

Алгоритм методу. В області D вибираємо довільне початкове наближення $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)$ і розглядаємо $f\left(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)$ як функцію однієї змінної

x_1. На проміжку $[a_1, b_1]$ вибираємо систему точок $x_{1k} = a_1 + kh_1$, $(k = 0, 1, \ldots, n_1)$, де $h_1 = (b_1 - a_1)/n_1$ і знаходимо значення функції $f\left(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ в цих точках. Нехай

$$f\left(x_{1k}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) = a_{1k},\ k = 0, 1, \ldots, n_1.$$

Тоді, використовуючи алгоритм відшукання абсолютного екстремуму довільної логарифмічно вгнутої функції однієї змінної, серед точок x_{1k} $(k = 0, 1, \ldots, n_1)$, знаходимо точку, в якій функція $f\left(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ набуває найбільшого значення. Нехай цією точкою буде точка x_{1s} $(0 \leq s \leq n_1)$. Позначимо цю точку через $x_1^{(1)}$ і розглянемо $f\left(x_1^{(1)}, x_2, x_3^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ як функцію однієї змінної x_2. На проміжку $[a_2, b_2]$ вибираємо систему точок $x_{2k} = a_2 + kh_2$ $(k = 0, 1, \ldots, n_2)$, де $h_2 = (b_2 - a_2)/n_2$, і знаходимо значення функції $f\left(x_1^{(1)}, x_2, x_3^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ в цих точках. Нехай

$$f\left(x_1^{(1)}, x_{2k}, x_3^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) = a_{2k},\ k = 0, 1, \ldots, n_2.$$

Тоді, використовуючи алгоритм відшукання абсолютного екстремуму довільної логарифмічно вгнутої функції однієї змінної, серед точок x_{2k} $(k = 0, 1, \ldots, n_2)$ знаходимо точку, в якій функція $f\left(x_1^{(1)}, x_2, x_3^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ набуває найбільшого значення. Нехай цією точкою буде точка x_{2l} $(0 \leq l \leq n_2)$. Позначимо цю точку через $x_2^{(1)}$. Аналогічно знаходимо $x_3^{(1)}, x_4^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$. В результаті одержимо точку $\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\right)$, яку приймаємо за перше наближення до максимальної точки функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Маючи точку $\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\right)$, аналогічно знаходимо точку $\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}\right)$, і т.д. Отже, в процесі виконання алгоритму одержуємо послідовність точок

$$\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right), \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\right), \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}\right), \ldots$$

Робота алгоритму продовжується доти, доки не буде знайдена точка $\left(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots, x_n^{(r)}\right)$, для якої

$$\left|x_i^{(r)} - x_i^{(r-1)}\right| \leq h_i,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тоді точку $\left(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots, x_n^{(r)}\right)$ приймаємо за точку максимуму функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Якщо

$$\max_D f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

то

$$\left|x_i^{(r)} - \alpha_i\right| < h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i.$$

Щоб з більшою точністю знайти точку, в якій досягається максимум функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, треба той же алгоритм застосувати до функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, але за область D взяти

$$D^{(r)} = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \mid x_i^{(r)} - h_i \leq x_i \leq x_i^{(r)} + h_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\right\}.$$

Приклад 1. *Розглянемо задачу відшукання абсолютного мінімуму штрафної функції №2 при* $n = 3$*:*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 + 10^{-3}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 0,25\right)^2.$$

Для цього шукатимемо абсолютний максимум функції

$$-f(x_1, x_2, x_3) + 500,$$

оскільки $-f(x_1, x_2, x_3) + 500 > 0$ *в області* $D = \{-10 \le x_i \le 10,\ i = 1, 2, 3\}$. *Покладемо* $h_i = 0,1,\ i = 1, 2, 3$. *За початкове наближення візьмемо точку* $(-10; -10; -10)$. *Застосувавши описаний вище алгоритм, одержимо точку* $(0,7; 0,8; 1)$, *яку приймаємо з точністю* $h = 0,1$ *за точку максимуму функції. Якщо цю точку уточнити в області*

$$D = \{0,6 \le x_1 \le 0,8;\ 0,7 \le x_2 \le 0,9;\ 0,9 \le x_3 \le 1,1\},$$

то одержимо точку $(0,8; 0,9; 1)$, *яку приймаємо за точку максимуму з точністю* $h = 0,01$. *Уточнимо цю точку в області*

$$D = \{0,7 \le x_1 \le 0,9;\ 0,8 \le x_2 \le 1;\ 0,9 \le x_3 \le 1,1\}.$$

Одержимо точку $(0,9; 0,99; 0,99)$, *яку приймаємо з точністю* $h = 0,01$, *за точку максимуму. Після уточнення цієї точки в області*

$$D = \{0,8 \le x_1 \le 1;\ 0,98 \le x_2 \le 1;\ 0,98 \le x_3 \le 1\}$$

одержимо точку $(0,99; 0,995; 0,995)$, *яку приймаємо за точку максимуму. Уточнимо цю точку в області*

$$D = \{0,99 \le x_1 \le 1;\ 0,994 \le x_2 \le 0,996;\ 0,994 \le x_3 \le 0,996\}.$$

Одержимо точку $(0,99459; 0,99459; 0,99459)$, *яку з точністю* $h = 0,00001$ *приймаємо за максимальну. Отже, абсолютний мінімум штрафної функції №2 досягається в точці* $(0,99459; 0,99459; 0,99459)$ *і* $min f(x_1, x_2, x_3) \approx 0,007473305$ *з точністю* $h = 0,00001$.

1. *Цегелик Г. Г.* Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, №9. – С. 1273–1276.
2. *Глебена М. І., Цегелик Г. Г.* Чисельний метод мажорантного типу відшукання екстремуму негладких і розривних функцій //Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.матем. і інформ. – 2006. - Вип.12-13. – С. 55-58.
3. *Глебена М. І., Цегелик Г. Г.* Чисельний метод відшукання екстремуму недиференційованих функцій двох дійсних змінних //Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.матем. і інформ. – 2007. - Вип.14-15. – С. 18-21.
4. *Глебена М. І., Цегелик Г. Г.* Алгоритм відшукання максимального значення довільної логарифмічно вгнутої функції двох дійсних змінних //Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.матем. і інформ. – 2009. - Вип.18. – С. 46-50.

Одержано 18.11.2009