УДК 512.64

Н. С. Джалюк (Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України)

ОПИС ПАРАЛЕЛЬНИХ ФАКТОРИЗАЦІЙ МНОГОЧЛЕННИХ МАТРИЦЬ

The expressions for all monic divisors and common divisors of polynomial matrices with given canonical diagonal forms are established. These divisors are found under the conditions of parallelness of the corresponding factorizations of matrices to the factorizations of their canonical diagonal forms.

Наведені вирази, за якими знаходяться всі унітальні дільники та спільні дільники многочленних матриць із заданими канонічними діагональними формами за умов паралельності відповідних факторизацій матриць до факторизацій їхніх канонічних діагональних форм.

Відомі методи факторизації многочленних матриць у випадках, коли поле P — алгебраїчно замкнене характеристики нуль (див. [1]) та $P = \mathbb{C}$ — поле комплексних чисел (див. [2,3]). В інших випадках (див. [4,5]) наведені способи факторизації многочленних матриць при певних обмеженнях. Ці та інші способи факторизації многочленних матриць не дають повного опису дільників та факторизацій матриць.

У цій статті на основі трикутної форми щодо напівскалярних еквівалентних перетворень пропонується метод опису всіх унітальних дільників та спільних дільників многочленних матриць із заданими їхніми канонічними діагональними формами за умови паралельності відповідних їм факторизацій многочленних матриць до факторизацій їхніх канонічних діагональних форм.

Нехай P — поле, $P[x]$ — кільце многочленів над P, $M(m,n,P[x])$ та $M(n,P[x])$ — множина $m \times n$ - матриць та кільце $n \times n$ - матриць над $P[x]$, відповідно. Надалі розглядатимемо матриці $A(x) \in M(m,n,P[x])$, де $m \leq n$, $rangA(x) = m$. Нехай канонічна діагональна форма

$$D^A(x) = U(x)A(x)V(x) = \operatorname{diag}(\mu_1(x), \dots, \mu_m(x)), \tag{1}$$

де $U(x) \in GL(m,P[x]), V(x) \in GL(n,P[x])$, матриці $A(x)$ зображається у вигляді добутку

$$D^A(x) = \Phi(x)\Psi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)) \operatorname{diag}(\psi_1(x), \dots, \psi_m(x)), \tag{2}$$

де матриці $\Phi(x)$ і $\Psi(x)$ є відповідно розмірів $m \times m$ та $m \times n$ і $\varphi_i | \varphi_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, m-1$, $\sum_{i=1}^m \deg \varphi_i = sm$.

Нагадаємо (див. [5]), що факторизацію

$$A(x) = B(x)C(x),\ B(x) \in M(m,P[x]),\ C(x) \in M(m,n,P[x]),$$

матриці $A(x)$ називають паралельною до факторизації (2) її канонічної діагональної форми $D^A(x)$, якщо матриці $B(x)$ та $C(x)$ еквівалентні до $\Phi(x)$ та $\Psi(x)$, відповідно.

Нехай $T^A(x)$ трикутна форма матриці $A(x)$ з інваріантними множниками на головній діагоналі (див. [6,7]), тобто

$$T^A(x) = QA(x)R^A(x) =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccccccc} \mu_1(x) & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21}(x)\mu_1(x) & \mu_2(x) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{m1}(x)\mu_1(x) & t_{m2}(x)\mu_2(x) & \cdots & \mu_m(x) & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right\|, \qquad (3)$$

де $\deg t_{ij} < \deg \frac{\mu_i}{\mu_j}$, якщо $\deg \frac{\mu_i}{\mu_j} > 0$, і $t_{ij}(x) \equiv 0$, якщо $\deg \frac{\mu_i}{\mu_j} = 0$, для всіх $i, j = 1, 2, \ldots, m$, $i > j$, $Q \in GL(m, P)$ — верхня унітрикутна матриця, $R^A(x) \in GL(n, P[x])$.

Відомо (див. [7]), що якщо P – нескінченне поле, то кожна матриця $A(x)$ та їхній скінченний набір напівскалярними еквівалентними перетвореннями зводиться до нижньої трикутної форми (3). Якщо P – скінченне поле, то там же даються умови звідності до такої трикутної форми.

Подібний результат щодо напівскалярної еквівалентності многочленних матриць набагато пізніше сформулювали Діас да Сільва та Лафей (див. [8]).

Матрицю $T^A(x)$ вигляду (3) можемо зобразити так:

$$T^A(x) = U^A(x) D^A(x), \qquad (4)$$

де $U^A(x) \in GL(m, P[x])$ – нижня унітрикутна матриця.

Побудуємо нижню унітрикутну матрицю $K(x)$ (див. [5, 9]) вигляду

$$K(x) = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \dfrac{\mu_2(x)}{\mu_1(x)} k_{21}(x) & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\mu_m(x)}{\mu_1(x)} k_{m1}(x) & \dfrac{\mu_m(x)}{\mu_2(x)} k_{m2}(x) & \ldots & 1 \end{array} \right\|, \qquad (5)$$

де $k_{ij}(x) = k_{ijr_{ij}} x^{r_{ij}} + k_{ij(r_{ij}-1)} x^{r_{ij}-1} + \ldots + k_{ij0}$, $r_{ij} = \deg \varphi_i - \deg \varphi_j - 1$, якщо $\psi_j \nmid \psi_i$, $i > j$ і $k_{ij}(x) \equiv 0$, якщо $\psi_j | \psi_i$, де $k_{ijr_{ij}}$ — незалежні змінні, тобто $K(x)$ — матриця над кільцем $P(k)[x]$, $P(k)$ — розширення поля P, одержане шляхом приєднання змінних $k_{ijr_{ij}}$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, $i > j$, до поля P.

Лема 1. *Нехай канонічна діагональна форма $D^A(x)$ матриці $A(x)$ зображається у вигляді добутку (2). Тоді кожний лівий унітальний дільник $B(x)$ степеня s матриці $A(x)$, тобто*

$$A(x) = B(x)C(x), \; B(x) = Ex^s + B_1 x^{s-1} + \ldots + B_s, \qquad (6)$$

де E – одинична матриця, $B_i \in M(m, P)$, $i = 1, \ldots, s$, $C(x) \in M(m, n, P[x])$, із канонічною діагональною формою $D^B(x) = \Phi(x)$ такий, що факторизація (6) матриці $A(x)$ паралельна до факторизації (2) її канонічної діагональної форми $D^A(x)$, зображається у вигляді

$$B(x) = Q^{-1} U^A(x) \widetilde{K}(x) \Phi(x) W(x),$$

де Q та $U^A(x)$ — деякі матриці, що задовольняють співвідношення (3) та (4), відповідно, $\widetilde{K}(x)$ одержується із $K(x)$ при деяких значеннях параметрів $k_{ijr_{ij}}$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, $i > j$, $W(x)$ – деяка матриця із $GL(m, P[x])$.

Доведення. Для пари матриць $A(x)$ та $B(x)$ існують верхня унітрикутна матриця Q_1 над P та оборотні матриці $R_1^A(x)$ та $R^B(x)$ над $P[x]$ такі, що справедливі рівності

$$Q_1 A(x) R_1^A(x) = T_1^A(x), \quad Q_1 B(x) R^B(x) = T^B(x),$$

де $T_1^A(x)$ та $T^B(x)$ – нижні трикутні матриці вигляду (3) із головними діагоналями $D^A(x)$ та $\Phi(x)$, відповідно. Тоді із (6) маємо

$$T_1^A(x) = T^B(x)\widetilde{C}(x),$$

де $\widetilde{C}(x) = (R^B(x))^{-1} C(x) R_1^A(x)$. Далі доводимо лему за схемою доведення необхідності у теоремі 2 (див. [5]).

Позначимо через $\{Q\}_A$ множину всіх верхніх унітрикутних матриць Q, які задовольняють співвідношення (3), а через $\{U^A(x)\}$ — множину всіх нижніх унітрикутних матриць $U^A(x)$, які задовольняють рівність (4).

Враховуючи лему 1 отримуємо

Наслідок 1. *Нехай*

$$\{Q_t^{-1} U_t^A(x) K_t(x) \Phi(x) S_t(x) Q_t\} - \tag{7}$$

множина матриць, де Q_t та $U_t^A(x)$ всеможливі матриці із множин $\{Q\}_A$ та $\{U^A(x)\}$, відповідно; $K_t(x)$ одержуються із $K(x)$ при всеможливих значеннях параметрів $k_{ijr_{ij}}$, $i,j = 1,2,\ldots,m$, $i > j$; матриці $S_t(x) \in GL(m, P[x])$ такі, що $U_t^A(x) K_t(x) \Phi(x) S_t(x) = L_t(x)$ – унітальні матриці. Тоді множина (7) є множиною усіх лівих унітальних дільників $B(x)$ степеня s матриці $A(x)$ з канонічною діагональною формою $D^B(x) = \Phi(x)$ таких, що відповідні їм факторизації (6) матриці $A(x)$ є паралельними до факторизації (2) її канонічної діагональної форми $D^A(x)$.

Нехай

$$D^A(x) = U_1(x) A(x) V_1(x) = \operatorname{diag}(\mu_1(x), \ldots, \mu_m(x)), \tag{8}$$

$U_1(x) \in GL(m, P[x]), V_1(x) \in GL(n, P[x])$. Відомо (див. [9]), що матриця $U(x)$ із рівності (1) та матриця $U_1(x)$ із (8) зв'язані співвідношенням

$$U(x) = H(x) U_1(x), \tag{9}$$

де

$$H(x) = \begin{Vmatrix} h_{11}(x) & h_{12}(x) & \ldots & h_{1m}(x) \\ \dfrac{\mu_2(x)}{\mu_1(x)} h_{21}(x) & h_{22}(x) & \ldots & h_{2m}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\mu_m(x)}{\mu_1(x)} h_{m1}(x) & \dfrac{\mu_m(x)}{\mu_2(x)} h_{m2}(x) & \ldots & h_{mm}(x) \end{Vmatrix}. \tag{10}$$

В множині лівих перетворювальних матриць матриці $A(x)$ до її канонічної діагональної форми $D^A(x)$ існує (див. [10]) матриця $\widetilde{U}(x)$ степеня

$$\deg \widetilde{U}(x) \leq \deg \mu_m(x) - \deg \mu_1(x). \tag{11}$$

Якщо матриці $\widetilde{U}(x)$ та $\widetilde{U}_1(x)$ є степенів визначених співвідношенням (11), то із рівності (9) маємо

$$\widetilde{U}(x) = \widetilde{H}(x)\widetilde{U}_1(x), \tag{12}$$

де

$$\deg \widetilde{H}(x) = q \leq m(\deg \mu_m(x) - \deg \mu_1(x)).$$

Отже, матриця $\widetilde{H}(x)$ має вигляд (10), де замість $h_{uv}(x)$ маємо $\widetilde{h}_{uv}(x)$ та

$$\deg \widetilde{h}_{uv}(x) = t_{uv} = \begin{cases} q, & \text{якщо } u \leq v, \\ q - \deg \mu_u(x) + \deg \mu_v(x) & \text{— в іншому випадку,} \end{cases}$$

$u, v = 1, 2, \ldots, m$. Тому $\widetilde{h}_{uv}(x) = h_{uvt_{uv}} x^{t_{uv}} + h_{uv(t_{uv}-1)} x^{t_{uv}-1} + \ldots + h_{uv0}$, де $h_{uvt_{uv}}$ — незалежні змінні, тобто $\widetilde{H}(x)$ — матриця над кільцем $P(h)[x]$, $P(h)$ — розширення поля P, одержане шляхом приєднання змінних $h_{uvt_{uv}}$, $u, v = 1, 2, \ldots, m$, до поля P.

Побудуємо далі матрицю

$$F(x) = U^A(x)\widetilde{H}(x)K(x)\Phi(x). \tag{13}$$

Теорема 1. *Для матриці $A(x)$ існує факторизація $A(x) = B(x)C(x)$ з унітальною матрицею $B(x)$ степеня s, причому $D^B(x) = \Phi(x)$, паралельна до факторизації (2) її канонічної діагональної форми $D^A(x)$ тоді і тільки тоді, коли існують такі значення параметрів $k_{ijr_{ij}}$ та $h_{uvt_{uv}}$, $i, j, u, v = 1, \ldots, m$, $i > j$, з поля P, що матриця $F(x)$ регуляризується справа, тобто $F(x)S(x) = L(x)$ — унітальна многочленна матриця степеня s, $S(x) \in GL(m, P[x])$.*

Якщо в матриці $L(x)$ параметри $k_{ijr_{ij}}$ та $h_{uvt_{uv}}$, $i, j, u, v = 1, \ldots, m$, $i > j$, набувають всіх допустимих значень з поля P, то ми одержимо усі унітальні дільники $B(x) = Q^{-1}L(x)Q$ матриці $A(x)$ з канонічною діагональною формою $\Phi(x)$ такі, що відповідні їм факторизації (6) матриці $A(x)$ є паралельними до факторизації (2) її канонічної діагональної форми $D^A(x)$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай для матриці $A(x)$ існує факторизація $A(x) = B(x)C(x)$ з унітальною матрицею $B(x)$ степеня s паралельна до факторизації (2) її канонічної діагональної форми $D^A(x)$. За лемою 1

$$B(x) = Q_1^{-1}U_1^A(x)\widetilde{K}(x)\Phi(x)W_1(x), \tag{14}$$

де Q_1 та $U_1^A(x)$ задовольняють співвідношення

$$Q_1 A(x) R_1^A(x) = T_1^A(x) = U_1^A(x) D^A(x), \tag{15}$$

а $\widetilde{K}(x)$ одержується із $K(x)$ при деяких значеннях параметрів $k_{ijr_{ij}}$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, $i > j$, $W_1(x) \in GL(m, P[x])$.

Матриці $U_1^A(x)$ та $U^A(x)$ із (15) та (4) враховуючи (12) зв'язані співвідношенням

$$U_1^A(x) = Q_1 Q^{-1} U^A(x)\widetilde{H}(x). \tag{16}$$

Тоді $B(x) = Q^{-1}U^A(x)\widetilde{H}(x)K(x)\Phi(x)W_1(x)$, тобто матриця $F(x)$ правоеквівалентна до унітальної матриці $L(x) = QB(x)Q^{-1}$. Що і треба було довести.

Достатність. Лівий унітальний дільник $Q^{-1}L(x)Q = B(x)$ матриці $A(x)$ залежить від параметрів $k_{ijr_{ij}}$ та $h_{uvt_{uv}}$, $i, j, u, v = 1, \dots, m,\ i > j$. Надаючи цим параметрам допустимих значень з поля P (за яких матриця $F(x)$ правоеквівалентна до унітальної матриці), одержимо множину лівих унітальних дільників матриці $A(x)$ із канонічною діагональною формою $\Phi(x)$ таких, що відповідні їм факторизації матриці $A(x)$ паралельні до факторизації (2) її канонічної діагональної форми $D^A(x)$. Ця множина містить усі такі дільники матриці $A(x)$, бо за лемою 1 кожний дільник зображається у вигляді (14), від якого, враховуючи співвідношенння (16), можна легко перейти до потрібного вигляду дільника $B(x)$ матриці $A(x)$. Теорему доведено.

Для регуляризації многочленних матриць зазначених в теоремі 1 можна використати відомі методи, наведені в (див. [1]) у випадку алгебраїчно замкненого поля характеристики нуль та у роботах (див. [4, 11–13]) в інших випадках.

Нехай канонічна діагональна форма $D^A(x)$ матриці $A(x) \in M(m, n, P[x])$ зображується у вигляді добутку (2). Нехай далі

$$\frac{\varphi_i(x)}{\varphi_{i-1}(x)} = g_1^{k_1}(x) \dots g_t^{k_t}(x); \quad \psi_{i-1}(x) = g_1^{l_1}(x) \dots g_t^{l_t}(x) f_1^{v_1}(x) \dots f_d^{v_d}(x) \tag{17}$$

— розклади $\dfrac{\varphi_i(x)}{\varphi_{i-1}(x)}$ та $\psi_{i-1}(x),\ i = 2, \dots, m$, у добуток незвідних многочленів.

У роботі (див. [14]) доведено, що за методом П. С. Казімірського (див. [1]) знаходяться всі унітальні дільники із заданою канонічною діагональною формою тоді і тільки тоді, коли у розкладах (17) $k_j > l_j$ для всіх $j = 1, 2, \dots, t,\ i = 2, \dots, m$.

Наслідок 2. *Нехай у розкладах* (17) *многочленів* $\dfrac{\varphi_i(x)}{\varphi_{i-1}(x)}$ *та* $\psi_{i-1}(x)$ *виконується умова* $k_j > l_j$ *для всіх* $j = 1, 2, \dots, t,\ i = 2, \dots, m,$ *і нехай*

$$B(x) = Q^{-1} U^A(x) K(x) \Phi(x) S(x) Q, \tag{18}$$

де Q *та* $U^A(x)$ *— будь-які фіксовані матриці, що задовольняють співвідношення* (3) *та* (4)*, відповідно;* $K(x)$ *вигляду* (5)*, матриця* $S(x) \in GL(m, P[x])$ *така, що* $U^A(x)K(x)\Phi(x)S(x) = L(x)$ *— унітальна матриця степеня* s*. Тоді із* (18)*, надаючи параметрам* $k_{ijr_{ij}},\ i, j, = 1, \dots, m,\ i > j$*, всіх допустимих значень з поля* P*, ми отримаємо усі унітальні дільники степеня* s *матриці* $A(x)$*, які мають канонічну діагональну форму* $\Phi(x)$ *та відповідні факторизації яких є паралельними до факторизації* (2) *її канонічної діагональної форми* $D^A(x)$.

Доведення. Якщо виконується умова наслідку, то існує така матриця $R(x) \in GL(m, P[x])$, що $\widetilde{H}(x)K(x)\Phi(x)R(x) = G(x)\Phi(x)$, де $G(x)$ має вигляд (5). Це означає на основі теореми 1, що із (18) отримаємо всі унітальні дільники матриці $A(x)$ із канонічною діагональною формою $\Phi(x)$ та умовою паралельності розкладів.

Нехай $A_1(x) \in M(m, n_1, P[x])$ та $A_2(x) \in M(m, n_2, P[x])$ і нехай канонічна діагональна форма $D^{A_p}(x) = \operatorname{diag}(\mu_{p1}(x), \dots, \mu_{pm}(x))$ матриці $A_p(x) \in M(m, n_p, P[x]),\ m \le n_p,\ rangA_p(x) = m,$ зображується у вигляді добутку

$$D^{A_p}(x) = \Phi(x)\Psi_p(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)) \operatorname{diag}(\psi_{p1}(x), \dots, \psi_{pm}(x)), \tag{19}$$

де $\varphi_i|\varphi_{i+1}$, $i=1,2,\ldots,m-1$, і $\sum_{i=1}^m \deg\varphi_i = sm$, $p=1,2$.

Нехай

$$T_p^A(x) = QA_p(x)R_p(x) = U^{A_p}(x)D^{A_p}(x)-$$

нижня трикутна форма матриці $A_p(x)$ вигляду (3), $Q\in GL(m,P)$, $R_p(x)\in GL(n_p,P[x])$, $U^{A_p}(x)\in GL(m,P[x])$ – нижня унітрикутна матриця, $p=1,2$. Запишемо нижню унітрикутну матрицю $K_p(x)=\left\|\ \widetilde{k}_{ij}^{(p)}(x)\ \right\|_1^m$, $p=1,2$, вигляду (5), тобто $\widetilde{k}_{ij}^{(p)}(x)=\dfrac{\mu_{pi}(x)}{\mu_{pj}(x)}k_{ij}^{(p)}(x)$, якщо $i>j$; $\widetilde{k}_{ij}^{(p)}(x)\equiv 1$, якщо $i=j$; $\widetilde{k}_{ij}^{(p)}(x)\equiv 0$, якщо $i<j$. Многочлени $k_{ij}^{(p)}(x)=k_{ijr_{pij}}^{(p)}x^{r_{pij}}+k_{ij(r_{pij}-1)}^{(p)}x^{r_{pij}-1}+\ldots+k_{ij0}^{(p)}$ степеня $r_{pij}=\deg\varphi_i-\deg\varphi_j-1$, якщо $\psi_{pj}\nmid\psi_{pi}$, $i>j$ і $k_{ij}^{(p)}(x)\equiv 0$, якщо $\psi_{pj}|\psi_{pi}$, де $k_{ijr_{pij}}^{(p)}$ — незалежні змінні, тобто $K_p(x)$ — матриця над кільцем $P(k)[x]$, $P(k)$ — розширення поля P, одержане шляхом приєднання змінних $k_{ijr_{pij}}^{(p)}$, $i,j=1,2,\ldots,m$, $i>j$, $p=1,2$, до поля P.

Далі запишемо матриці $\widetilde{H}_1(x)$ та $\widetilde{H}_2(x)$ вигляду (10), тобто

$$\widetilde{H}_p(x)=\left\|\ h_{uv}^{(p)}(x)\ \right\|_1^m,\ p=1,2,$$

де $h_{uv}^{(p)}(x)=\widetilde{h}_{uv}^{(p)}(x)$, якщо $u\le v$ і $h_{uv}^{(p)}(x)=\dfrac{\mu_{pu}(x)}{\mu_{pv}(x)}\widetilde{h}_{uv}^{(p)}(x)$, якщо $u>v$, і

$$\deg\widetilde{H}_p(x)=q_p\le m(\deg\mu_{pm}(x)-\deg\mu_{p1}(x)),$$

тобто $\widetilde{h}_{uv}^{(p)}(x)=h_{uvt_{puv}}^{(p)}x^{t_{puv}}+h_{uv(t_{puv}-1)}^{(p)}x^{t_{puv}-1}+\ldots+h_{uv0}^{(p)}$, де

$$\deg\widetilde{h}_{uv}^{(p)}(x)=t_{puv}=\begin{cases} q_p, & \text{якщо } u\le v,\\ q_p-\deg\mu_{pu}(x)+\deg\mu_{pv}(x) & \text{— в іншому випадку,}\end{cases}$$

$u,v=1,2,\ldots,m$, $p=1,2$.

Побудуємо матриці

$$F_p(x)=U^{A_p}(x)\widetilde{H}_p(x)K_p(x)\Phi(x),\ p=1,2.$$

Теорема 2. *Нехай канонічні діагональні форми $D^{A_1}(x)$ і $D^{A_2}(x)$ матриць $A_1(x)$ і $A_2(x)$ зображені у вигляді добутку (19). Тоді існує спільний унітальний дільник $B(x)$ матриць $A_1(x)$ і $A_2(x)$, тобто*

$$A_1(x)=B(x)\widetilde{A}_1(x),\ A_2(x)=B(x)\widetilde{A}_2(x), \tag{20}$$

причому $D^B(x)=\Phi(x)$ і факторизації (20) матриць $A_1(x)$ і $A_2(x)$ паралельні до факторизацій (19) їхніх канонічних діагональних форм $D^{A_1}(x)$ і $D^{A_2}(x)$, тоді і тільки тоді, коли існують такі значення параметрів $k_{ijr_{pij}}^{(p)}$ та $h_{uvt_{puv}}^{(p)}\in P$, $i,j,u,v=1,\ldots,m$, $i>j$, $p=1,2$, що матриці $F_1(x)$ та $F_2(x)$ правоеквівалентні до однієї і тієї ж унітальної матриці $L(x)$ степеня s, тобто $F_1(x)S_1(x)=L(x)$ та $F_2(x)S_2(x)=L(x)$, де $S_p(x)\in GL(m,P[x])$, $p=1,2$. Якщо параметри $k_{ijr_{pij}}^{(p)}$ та $h_{uvt_{puv}}^{(p)}\in P$, $i,j,u,v=1,\ldots,m$, $i>j$, $p=1,2$, в матриці $L(x)$ набувають всіх допустимих значень з поля P, то ми одержимо усі спільні унітальні дільники $B(x)=Q^{-1}L(x)Q$ матриць $A_1(x)$ і $A_2(x)$ з *канонічною діагональною формою* $D^B(x) = \Phi(x)$ *такі, що відповідні їм факторизації* (20) *матриць* $A_1(x)$ *і* $A_2(x)$ *є паралельними до факторизацій* (19) *їхніх канонічних діагональних форм* $D^{A_1}(x)$ *і* $D^{A_2}(x)$.

Доведення. Застосовуючи схему запропоновану в доведенні теореми із (див. [15]) та з доведеної вище теореми 1, ми отримаємо доведення цієї теореми.

Варто зазначити, що задача про спільні дільники в певних випадках розв'язувалась у роботах (див. [2, 16, 17]).

Зауваження 1. *Аналогічно до наслідку 2 можна сформулювати умови, за яких, використовуючи метод запропонований в (див. [15]), отримаємо усі спільні унітальні дільники степеня* s *матриць* $A_1(x)$ *і* $A_2(x)$ *з канонічною діагональною формою* $D^B(x) = \Phi(x)$ *такі, що відповідні їм факторизації* (20) *матриць* $A_1(x)$ *і* $A_2(x)$ *є паралельними до факторизацій* (19) *їхніх канонічних діагональних форм* $D^{A_1}(x)$ *і* $D^{A_2}(x)$.

1. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – К.: Наукова думка, 1981. – 224 с.
2. *Gohberg I., Lancaster P., Rodman L.* Matrix polynomials. – New York: Academic Press, 1982. – 409 p.
3. *Малышев А. Н.* Факторизация матричных полиномов // Сибирский математический журнал. – 1982. – **23** , № 3. – С. 136 – 146.
4. *Петричкович В. М., Прокип В. М.* О факторизации многочленных матриц над произвольным полем // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 4. – С. 478 – 483.
5. *Петричкович В. М.* Паралельні факторизації многочлених матриць // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, №9. – С. 1228–1233.
6. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. – К.: Наукова думка, 1977. – С. 61 – 66.
7. *Петричкович В. М.* О полускалярной эквивалентности и нормальной форме Смита многочленных матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1987. – **26**. – С. 13–16.
8. *Dias da Silva J.A., Laffey T.J.* On simultaneous similarity of matrices and related guestions // Linear Algebra and its Applications. – 1999. – **291**. – P. 167–184.
9. *Зелиско В. Р.* О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – **12**. – С. 14–21.
10. *Комарницький М. Я., Петричкович В. М.* Теоретико-структурні властивості матриць над кільцями скінченно породжених головних ідеалів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, №2. – С. 7–21.
11. *Bell J. H.* Left associates of monic matrices with an application to unilateral matrices equation // Amer. Journ. Math. – 1949. – **71**. – P. 249 – 257.
12. *Прокип В. М.* О делимости и односторонней эквивалентности многочленных матриц // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, №9. – С. 1213–1219.
13. *Петричкович В. М.* Про розкладність матричних многочленів в добуток унітальних множників // Алгебра і топологія. – Львів: Львів. держ. ун-т, 1996. – С. 112-124.
14. *Щедрик В. П.* О разложении матричных многочленов на множители. – Львов. 1990. – 22 с. – Препринт / АН УССР. Ин-т прикл. проблем механики и математики, №22-90.
15. *Джалюк Н. С., Петричкович В. М.* Про спільні унітальні дільники многочленних матриць із заданою канонічною діагональною формою // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, №3. – С. 7–13.
16. *Прокип В. М.* Об общих унитальных делителях матричных многочленов над произвольным полем // Мат. сборник. – 1993. – **184**, №4. – С. 41 – 50.
17. *Зеліско В. Р., Петричкович В. М.* Про спільні дільники многочленних матриць // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2004. – **2**. – С. 56–60.

Одержано 27.11.2009