

УДК 517.927

К. В. Маринець (Ужгородський нац. ун-т)

## ПРО ОДНУ НЕЛІНІЙНУ ТРИТОЧКОВУ ЗАДАЧУ ТИПУ КОШІ-НІКОЛЕТТІ

We obtain some results concerning the investigation of the Cauchy–Nicoletti type three point boundary value problem. We show that it is useful to reduce the given boundary value problem to the two point one and to parametrize the last one. To study the transformed problem, we made the modification of numerical–analytic method that is used for getting approximations.

Отримані результати при дослідженні триточкової нелінійної крайової задачі типу Коші–Ніколетті. Показано доцільність зведення вихідної задачі до відповідної їй двоточкової та параметризацію одержаної крайової задачі. Для дослідження перетвореної крайової задачі розроблено модифікацію чисельно–аналітичного методу, який і використовується при побудові наближених розв'язків.

**1. Вступ.** Сьогодні теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь широко застосовується не тільки в математиці, а й у фізиці, механіці та інших науках. Адже, математичні моделі багатьох процесів та явищ, що мають місце у природі, призводять до необхідності дослідження крайових задач, а особливо нелінійних.

Існують різні методи, які дозволяють встановити розв'язність досліджуваної задачі. Серед них своєю універсальністю виділяється чисельно–аналітичний метод послідовних наближень [1–3]. Згідно із основною ідеєю цього методу, вихідна крайова задача зводиться до певної збуреної крайової задачі, яка містить невідомі параметри. Розв'язок цієї модифікованої задачі шукається у аналітичній формі, використовуючи послідовні наближення спеціального вигляду. Крім того, збурена задача розглядається разом із, так званою, визначальною алгебраїчною або трансцендентною системою рівнянь, яка дозволяє чисельно обчислити початкові значення розв'язків та параметри, що їм відповідають. Вивчаючи цю визначальну систему рівнянь, встановлюються необхідні та достатні умови існування розв'язку вихідної крайової задачі.

У даній роботі досліджується триточкова крайова задача типу Коші–Ніколетті. Обґрунтовано доцільність зведення цієї задачі до задачі з більш простими крайовими умовами, а саме — двоточковими, за допомогою спеціальної параметризації. Для встановлення розв'язності перетвореної крайової задачі розроблено відповідну модифікацію чисельно–аналітичного методу послідовних наближень.

**2. Постановка задачі та зведення її до двоточкової.** Розглядаємо систему нелінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad , t \in [0, T] \quad (1)$$

з розділеними крайовими умовами типу Коші–Ніколетті

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_{10}, \\ x_2(t_1) &= x_{2t_1}, \\ x_3(T) &= x_{3T}, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $t_1 \in (0, T)$ ,  $f \in C([0, T] \times D, \mathbb{R}^3)$ ,  $D \subset \mathbb{R}^3$  замкнена обмежена область.

Задача полягає у знаходженні неперервно-диференційованого на проміжку  $[0, T]$  розв'язку нелінійних диференціальних рівнянь (1), який задовольняє крайовим умовам типу Коші-Ніколетті (2).

Триточкові крайові умови (2) можна записати у матричній формі

$$Ax(0) + A_1x(t_1) + C_1x(T) = d, \quad (3)$$

$$\text{де } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{2t_1} \\ x_{3T} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що матриці, що входять у крайові умови (3), є виродженими.

У зв'язку з цим зауважимо, що безпосереднє застосування відомих схем чисельно-аналітичного методу [1, 4] неможливе або пов'язане зі значними труднощами обчислювального характеру [5].

Для того, щоб обійти виродженість матриці  $C_1$ , замінимо значення перших двох компонент розв'язку крайової задачі (1), (3) в точці  $T$  параметрами  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$ :

$$\begin{aligned} x_1(T) &= \lambda_1, \\ x_2(T) &= \lambda_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Використовуючи рівності (4), перепишемо триточкові крайові умови (3) у вигляді двоточкових

$$Ax(0) + Cx(T) = d - A_1x(t_1) + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\text{де } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$\text{Введемо позначення } d(\lambda) := d - A_1x(t_1) + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} + \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ x_{3T} \end{pmatrix},$$

де  $\lambda := \text{col}(\lambda_1, \lambda_2)$ .

Перетворені крайові умови (5) можна подати у вигляді

$$Ax(0) + Cx(T) = d(\lambda). \quad (6)$$

У рівності (6), на відміну від (3), замість виродженої матриці  $C_1$ , фігурує невивроджена матриця  $C$ .

**Зауваження 1.** Нелінійна задача з триточковими крайовими умовами типу Коші-Ніколетті (1), (2) еквівалентна двоточковій крайовій задачі (1), (6) разом з умовою (4).

Для дослідження одержаної крайової задачі (1), (6) застосуємо відповідну модифікацію чисельно-аналітичного методу послідовних наближень.

**3. Збіжність послідовних наближень.** Припустимо, що для крайової задачі (1), (2) виконуються наступні умови :

**A)** функція  $f(t, x)$  неперервна в області  $[0, T] \times D$  і задовольняє умову Ліпшиця вигляду

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K |x - y|, \text{ для всіх } t \in [0, T], \quad \{x, y\} \subset D, \quad (7)$$

де  $K = (k_{ij})_{i,j=1}^3$  — деяка стала матриця з невід'ємними компонентами,

$|f(t, x)| = \text{col}(|f_1(t, x)|, |f_2(t, x)|, |f_3(t, x)|)$ , а також нерівності та операції максимуму та мінімуму між векторами, тут і надалі, розуміються покомпонентно;

**B)** множина  $D_\beta := \{z \in D : B(z, \beta(z, \lambda)) \subset D, \forall \lambda \in I_1 \times I_2\}$  є непорожньою, де область  $B(z, \beta(z, \lambda)) := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - z| \leq \beta(z, \lambda), \forall \lambda \in I_1 \times I_2\}$ , де

$$\beta(z, \lambda) := \frac{T}{2} \delta_D(f) + |d(\lambda) - (A + E)z|, \quad (8)$$

де  $E$  — одинична матриця і

$$\delta_D(f) := \frac{1}{2} \left[ \max_{(t,x) \in [0,T] \times D} f(t, x) - \min_{(t,x) \in [0,T] \times D} f(t, x) \right], \quad (9)$$

де  $I_1 \times I_2 := \{\lambda = \text{col}(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 : \text{col}(\lambda_1, \lambda_2, x_{3T}) \in D\}$ ;

**C)** найбільше власне значення  $\lambda_{\max}(K)$  матриці  $K$  задовольняє нерівність

$$\lambda_{\max}(K) < \frac{10}{3T}.$$

Визначимо множину  $U \subset \mathbb{R}^2$  наступним чином:

$$U := \{u \in \mathbb{R}^2 : \text{col}(x_{10}, u_1, u_2) \in D_\beta\}.$$

Розглянемо послідовність функцій  $\{x_m(t, u, \lambda)\}$ , задану формулою:

$$\begin{aligned} x_m(t, u, \lambda) := & z + \int_0^t f(s, x_{m-1}(s, u, \lambda)) ds - \frac{t}{T} \int_0^T f(s, x_{m-1}(s, u, \lambda)) ds + \\ & + \frac{t}{T} [d(\lambda) - (A + E)z], \end{aligned} \quad (10)$$

де  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $x_0(t, u, \lambda) = \text{col}(x_{10}, u_1, u_2) = z \in D_\beta$ ,  $u \in U$ ,  $\lambda = \text{col}(\lambda_1, \lambda_2)$ .

**Зауваження 2.** Легко бачити, що функції послідовності (10) містять чотири невідомі скалярні параметри:  $u_1, u_2, \lambda_1, \lambda_2$ . Крім того, функції  $x_m(t, u, \lambda)$  задовольняють двоточкові крайові умови (6) при довільних значеннях перерахованих вище параметрів.

**Теорема 1.** Нехай функція  $f : [0, T] \times D \rightarrow \mathbb{R}^3$  задовольняє умови A) – C). Тоді:

- 1) послідовність функцій вигляду (10) рівномірно збігається до граничної функції  $x^*(t, u, \lambda)$  при  $m \rightarrow \infty$  для всіх  $(t, u, \lambda) \in [0, T] \times U \times I_1 \times I_2$ ;
- 2) гранична функція

$$x^*(t, u, \lambda) := \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, u, \lambda) \quad (11)$$

є єдиним розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = z + \int_0^t f(s, x(s)) ds - \frac{t}{T} \int_0^T f(s, x(s)) ds + \frac{t}{T} [d(\lambda) - (A + E)z] \quad (12)$$

або, що те ж саме, розв'язком збуреної двоточкової крайової задачі

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \Delta(u, \lambda), \quad (13)$$

$$Ax(0) + Cx(T) = d(\lambda)$$

з початковою умовою при  $t = 0$ :  $x^*(0, u, \lambda) = z = \text{col}(x_{10}, u_1, u_2)$ ,  
де

$$\Delta(u, \lambda) := -\frac{1}{T} \int_0^T f(s, x(s, u, \lambda)) ds + \frac{1}{T} [d(\lambda) - (A + E)z]; \quad (14)$$

3) справедлива оцінка відхилення функції  $x^*(t, u, \lambda)$  від її  $m$ -го наближення  $x_m(t, u, \lambda)$  для всіх значень параметрів  $u \in U$ ,  $\lambda \in I_1 \times I_2$

$$|x^*(t, u, \lambda) - x_m(t, u, \lambda)| \leq \frac{20}{9} t \left(1 - \frac{1}{T}\right) Q^{m-1} (E - Q^{-1}) h, \quad (15)$$

де  $Q := \frac{3T}{10} K$  і  $h := Q\delta_D(f) + K|d(\lambda) - (A + E)z|$ .

**Доведення.** Доведемо, що послідовність (10) є послідовністю Коші у банаховому просторі  $C([0, T], \mathbb{R}^3)$ . Спочатку покажемо, що  $x_m(t, u, \lambda) \in D$ , для всіх  $(t, u, \lambda) \in [0, T] \times U \times I_1 \times I_2$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

Справді, використовуючи оцінку леми 2.3 з [2]

$$\left| \int_0^t \left[ f(\tau) - \frac{1}{T} \int_0^T f(s) ds \right] d\tau \right| \leq \frac{1}{2} \alpha_1(t) \left[ \max_{t \in [0, T]} f(t) - \min_{t \in [0, T]} f(t) \right], \quad (16)$$

де

$$\alpha_1(t) := 2t \left(1 - \frac{t}{T}\right), \quad |\alpha_1(t)| \leq \frac{T}{2}, \quad t \in [0, T], \quad (17)$$

із співвідношення (10) при  $m = 0$  отримуємо:

$$\begin{aligned} |x_1(t, u, \lambda) - z| &\leq \left| \int_0^t \left[ f(t, z) - \frac{1}{T} \int_0^T f(t, s) ds \right] dt \right| + |d(\lambda) - (A + E)z| \leq \\ &\leq \alpha_1(t) \delta_D(f) + \beta_1(z, \lambda) \leq \beta(z, \lambda), \end{aligned} \quad (18)$$

де

$$\beta_1(z, \lambda) = |d(\lambda) - (A + E)z|. \quad (19)$$

Виходячи з (8), бачимо, що  $x_1(t, u, \lambda) \in D$ , коли  $(t, u, \lambda) \in [0, T] \times U \times I_1 \times I_2$ .  
За індукцією можна показати, що всі функції (10) також належать множині  $D$ ,  $\forall m = 1, 2, \dots, t \in [0, T], u \in U, \lambda \in I_1 \times I_2$ .

Розглянемо різницю функцій

$$x_{m+1}(t, u, \lambda) - x_m(t, u, \lambda) = \int_0^t [f(s, x_m(s, u, \lambda)) - f(s, x_{m-1}(s, u, \lambda))] ds - \\ - \frac{t}{T} \int_0^T [f(s, x_m(s, u, \lambda)) - f(s, x_{m-1}(s, u, \lambda))] ds, \quad m = 1, 2, \dots \quad (20)$$

Позначимо  $d_m(t, u, \lambda) := |x_m(t, u, \lambda) - x_{m-1}(t, u, \lambda)|$ ,  $m = 1, 2, \dots$

Використовуючи умову Ліпшиця, з (20) отримуємо

$$d_{m+1}(t, u, \lambda) \leq K \left[ \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t d_m(s, u, \lambda) ds + \frac{t}{T} \int_t^T d_m(s, u, \lambda) ds \right], \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

На підставі нерівності (18)

$$d_1(t, u, \lambda) = |x_1(t, u, \lambda) - z| \leq \alpha_1(t) \delta_D(f) + \beta_1(z, \lambda), \quad (22)$$

де  $\beta_1(z, \lambda)$  задано формулою (19).

Використовуючи оцінки леми 2.4 з [2]

$$\alpha_{m+1}(t) \leq \left(\frac{3}{10}T\right) \alpha_m(t), \quad (23) \\ \alpha_{m+1}(t) \leq \left(\frac{3}{10}T\right)^m \bar{\alpha}_1(t),$$

для послідовності функцій

$$\alpha_{m+1}(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t \alpha_m(s) ds + \frac{t}{T} \int_t^T \alpha_m(s) ds, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (24)$$

$$\alpha_0(t) = 1, \quad \alpha_1(t) = 2t \left(1 - \frac{t}{T}\right),$$

де  $\bar{\alpha}_1(t) := \frac{10}{9} \alpha_1(t)$ , а також нерівності (22) і рівність (24), із (21) при  $m = 1$  випливає

$$d_2(t, u, \lambda) \leq K \delta_D(f) \left[ \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t \alpha_1(s) ds + \frac{t}{T} \int_t^T \alpha_1(s) ds \right] + \\ + K \beta_1(z, \lambda) \left[ \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t ds + \frac{t}{T} \int_t^T ds \right] \leq K [\alpha_2(t) \delta_D(f) + \alpha_1(t) \beta_1(z, \lambda)].$$

За індукцією можна показати, що

$$d_{m+1}(t, u, \lambda) \leq K^m [\alpha_{m+1}(t)\delta_D(f) + \alpha_m(t)\beta_1(z, \lambda)], \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (25)$$

де  $\alpha_{m+1}(t), \alpha_m(t)$  обчислюються за формулою (24), а  $\delta_D(f), \beta_1(z, \lambda)$  визначені згідно (9) і (8).

Використовуючи другу оцінку в нерівності (23), із співвідношення (25) одержимо:

$$d_{m+1}(t, u, \lambda) \leq \overline{\alpha_1}(t) [Q^m \delta_D(f) + KQ^{m-1}\beta_1(z, \lambda)], \quad \forall m = 1, 2, \dots, \quad (26)$$

де матриця

$$Q = \frac{3}{10}TK \quad . \quad (27)$$

Тоді, використовуючи нерівність (26), розглянемо наступну різницю

$$\begin{aligned} & |x_{m+j}(t, u, \lambda) - x_m(t, u, \lambda)| \leq |x_{m+j}(t, u, \lambda) - x_{m+j-1}(t, u, \lambda)| + \\ & + |x_{m+j-1}(t, u, \lambda) - x_{m+j-2}(t, u, \lambda)| + \dots + |x_{m+1}(t, u, \lambda) - x_m(t, u, \lambda)| = \\ & = \sum_{i=1}^j d_{m+i}(t, u, \lambda) \leq \overline{\alpha_1}(t) \left[ \sum_{i=1}^j (Q^{m+i}\delta_D(f) + KQ^{m+i-1}\beta_1(z, \lambda)) \right] = \\ & = \overline{\alpha_1}(t) \left[ Q^m \sum_{i=0}^{j-1} Q^i \delta_D(f) + KQ^m \sum_{i=0}^{j-1} Q^i \beta_1(z, \lambda) \right]. \quad (28) \end{aligned}$$

На підставі умови С), максимальне власне значення матриці  $Q$  вигляду (27) не перевищує 1. Тоді маємо

$$\sum_{i=0}^{j-1} Q^i \leq (I_n - Q)^{-1}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} Q^m = [0].$$

Тому, із нерівності (28) можемо зробити висновок, що, згідно із критерієм Коші, послідовність  $\{x_m(t, u, \lambda)\}$ , яка задається формулою (10), рівномірно збігається в області  $(t, u, \lambda) \in [0, T] \times U \times I_1 \times I_2$  до деякої граничної функції  $x^*(t, u, \lambda)$ .

Оскільки функції  $x_m(t, u, \lambda)$  послідовності (10) задовольняють крайові умови (6) при довільних значеннях параметрів, гранична функція  $x^*(t, u, \lambda)$  також задовольняє ці умови. Переходячи у формулі (10) до границі при  $m \rightarrow \infty$ , отримуємо, що гранична функція задовольняє інтегральне рівняння (12), а отже, інтегро-диференціальне рівняння (13).

Оцінка (15) є безпосереднім наслідком нерівності (28).

**4. Існування розв'язків.** Вияснимо зв'язок граничної функції  $x^*(t, u, \lambda)$  з розв'язком крайової задачі (1), (3).

**Теорема 2.** *Нехай виконуються всі умови теореми 1. Тоді розв'язок  $x = x(t, u, \lambda)$  задачі Коші*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \mu, \quad t \in [0, T], \quad \mu \in \mathbb{R}^3 \quad (29)$$

$$x(0) = z = \text{col}(x_{10}, u_1, u_2) \quad (30)$$

задовольняє крайові умови (6) тоді і тільки тоді, коли керуючий параметр

$$\mu = \Delta(u, \lambda),$$

де  $\Delta : U \times I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  відображення, визначене формулою (14).

**Доведення.** Згідно із теоремою Пікара–Ліндельофа легко перекопатися, що оскільки має місце умова Ліпшиця (7), то початкова задача (29), (30) має єдиний розв'язок для всіх  $(\mu, u) \in \mathbb{R}^3 \times U$ . З доведення теореми 1 бачимо, що для всіх  $(u, \lambda) \in U \times I_1 \times I_2$ , гранична функція  $x^*(t, u, \lambda) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, u, \lambda)$  послідовності (10) задовольняє інтегральне рівняння (12), а також крайові умови (6). Тобто  $x = x^*(t, u, \lambda)$  вигляду (11) є єдиним розв'язком початкової задачі

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) + \Delta(u, \lambda), \quad t \in [0, T], \quad (31)$$

$$x(0) = z, \quad (32)$$

де  $\Delta(u, \lambda)$  задається формулою (14). Отже, (31), (32) співпадає з (29), (30) при умові, що

$$\mu = \Delta(u, \lambda) = -\frac{1}{T} \int_0^T f(s, x(s)) ds + \frac{1}{T} [d(\lambda) - (A + E)z]. \quad (33)$$

Те, що функція (11) не є розв'язком (29), (30) ні при яких інших значеннях  $\mu$ , не рівних (33), випливає з рівності  $\mu = \Delta(u, \lambda)$ , а це і доводить розглядувану теорему.

Наступне твердження показує відношення граничної функції  $x = x^*(\{t, u, \lambda_1, \lambda_2\})$  до розв'язку параметризованої крайової задачі (1), (6) або еквівалентної їй задачі (1), (2).

**Теорема 3.** *Нехай для крайової задачі (1), (2) виконуються умови A) – C). Тоді пара  $(x^*(\cdot, u^*, \lambda^*), \lambda^*)$  є розв'язком параметризованої крайової задачі (1), (6) тоді і тільки тоді, коли четвірка  $(u^*, \lambda^*) = \text{col}(u_1^*, u_2^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)$  задовольнятиме систему визначальних алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь*

$$\Delta(u, \lambda) = -\frac{1}{T} \int_0^T f(s, x^*(s, u, \lambda)) ds + \frac{1}{T} [d(\lambda) - (A + E)z] = 0, \quad (34)$$

$$x_2^*(t_1, u, \lambda) = x_{2t_1}.$$

**Доведення.** Достатньо застосувати теорему 2 і зауважити, що диференціальне рівняння (31) співпадає з (1) тоді і тільки тоді, коли пара  $(u^*, \lambda^*)$  задовольняє рівняння  $\Delta(u^*, \lambda^*) = 0$ , тобто, коли виконується рівність (34).

**Зауваження 3.** На практиці, фіксуємо деяке натуральне  $m$  і замість системи (34) розглядаємо наближену визначальну систему

$$\Delta_m(u, \lambda) = -\frac{1}{T} \int_0^T f(s, x_m(s, u, \lambda)) ds + \frac{1}{T} [d(\lambda) - (A + E)z] = 0,$$

$$x_{m2}(t_1, u, \lambda) = z + \int_0^{t_1} f_2(s, x(s, u, \lambda)) ds - \frac{t_1}{T} \int_0^T f_2(s, x(s, u, \lambda)) ds +$$

$$+ \frac{t_1}{T} [d(\lambda) - (A + E)z] = x_{2t_1},$$

звідки можна отримати наближені значення невідомих параметрів  $u^* \approx \text{col}(u_{m1}, u_{m2})$ ,  $\lambda^* \approx \text{col}(\lambda_{m1}, \lambda_{m2})$  та  $m$ -ве наближення до точного розв'язку вихідної триточкової нелінійної крайової задачі  $x^*(t, u^*, \lambda^*) \approx x_m(t, u_m, \lambda_m)$ .

### 5. Приклад триточкової крайової задачі типу Коші–Ніколетті.

Розглянемо систему

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) = x_3(t), \\ x_3'(t) = \frac{t^2}{16} - \frac{1}{2}x_3^2(t) - \frac{1}{2}x_1(t), \end{cases} \quad (35)$$

де  $t \in [0, 1]$ , з розділеними крайовими умовами типу Коші–Ніколетті

$$\begin{cases} x_1(0) = -\frac{1}{16}, \\ x_2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}, \\ x_3(1) = \frac{1}{4}. \end{cases} \quad (36)$$

Легко переконатися, що точний розв'язок даної системи має вигляд

$$\begin{cases} x_1^*(t) = \frac{t^2}{8} - \frac{1}{16}, \\ x_2^*(t) = \frac{t}{4}, \\ x_3^*(t) = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

$$D = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : |x_1| \leq \frac{1}{2}, |x_2| \leq \frac{1}{2}, |x_3| \leq \frac{1}{3} \right\}. \quad (37)$$

$$\text{де } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, тут матриця  $C_1$  вироджена.

Замінімо значення перших двох компонент розв'язку крайової задачі (35), (36) у точці  $T$  параметрами  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$ :

$$\begin{cases} x_1(1) = \lambda_1, \\ x_2(1) = \lambda_2, \end{cases} \quad (38)$$

де  $|\lambda_1| \leq \frac{1}{2}$ ,  $|\lambda_2| \leq \frac{1}{2}$ .

$$Ax(0) + Cx(T) = d(\lambda),$$



де  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $d(\lambda) := d - A_1 x(t_1) + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} + \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ ,  $\lambda = \text{col}(\lambda_1, \lambda_2)$ . Тут  $C = E$  — невироджена матриця.

Безпосередніми обчисленнями переконуємось, що для задачі (35), (36) виконуються умови А) — С), в області (37). При цьому

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \lambda_{\max}(K) \leq 0,93,$$

а вектори  $\delta_D(f)$  і  $\beta(z, \lambda)$  у (8), (9) мають вигляд

$$\delta_D(f) \leq \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{89}{288} \end{pmatrix}, \quad \beta(z, \lambda) \leq \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{89}{576} \end{pmatrix} + \left| \begin{array}{l} \frac{1}{16} + \lambda_1 \\ \lambda_2 - u_1 \\ \frac{1}{4} - u_2 \end{array} \right|, \quad z = \left( -\frac{1}{16}, u_1, u_2 \right).$$

Таким чином, до даної крайової задачі можна застосувати чисельно-аналітичний алгоритм, розглянутий у теоретичній частині, і сконструювати послідовність наближених розв'язків. Використовуючи спеціальний пакет символічної математики Maple, отримуємо результат першої ітерації

$$x_{11}(t, u, \lambda) = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}t + t\lambda_1,$$

$$x_{12}(t, u, \lambda) = t\lambda_2 + u_1,$$

$$x_{13}(t, u, \lambda) = u_2 + \frac{1}{48}t^3 + \frac{11}{48}t - u_2t,$$

$$\forall t \in [0, 1], u = \text{col}(u_1, u_2) \in U, \lambda_1 \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right], \lambda_2 \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right].$$

Обчислення показують, що наближеними розв'язками відповідних визначальних рівнянь є

$$\lambda_1 = -0,04885920614, \lambda_2 = 0,2363592061, u_1 = 0,01364079386, u_2 = 0,2227184123.$$

Отже, компоненти першого наближення мають вигляд:

$$x_{11}(t) = -0,06250000000 + 0,01364079386t,$$

$$x_{12}(t) = 0,01364079386 + 0,2227184123t,$$

$$x_{13}(t) = 0,2227184123 + \frac{1}{48}t^3 + 0,0064482544t.$$

На рис. 1 зображено графіки точного розв'язку та його першої апроксимації для першої, другої та третьої компонент відповідно. На рис. 2 зображені графіки похибок для першого наближення.

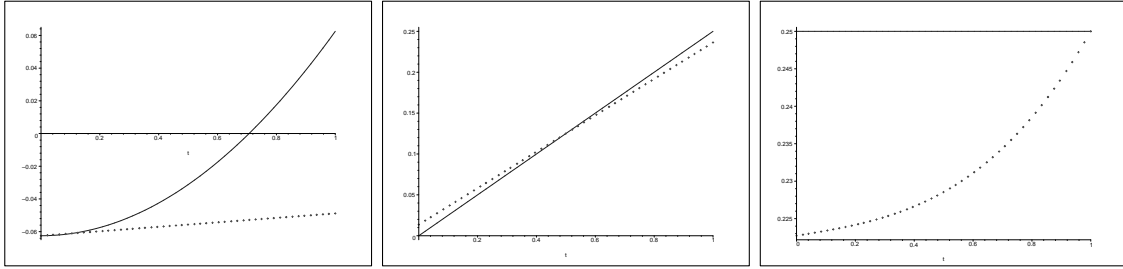


Рис. 1. Перші, другі та треті компоненти точного розв'язку (лінія) та їх першого наближення (пунктир).

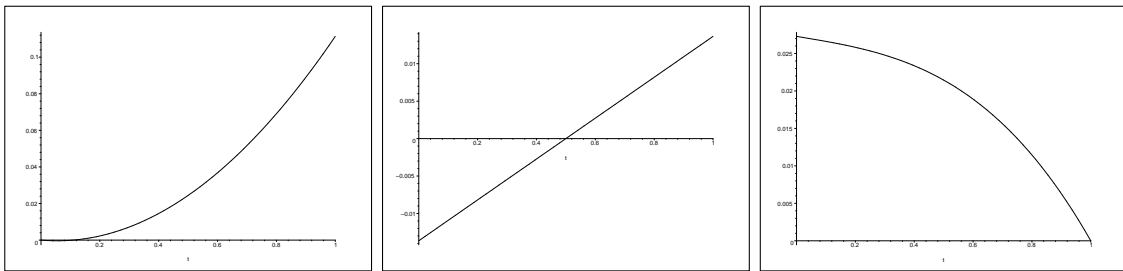


Рис. 2. Похибки першої, другої та третьої компонент розв'язку у першому наближенні.

Результат другої ітерації:

$$\begin{aligned}
 x_{21}(t, u, \lambda) &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\lambda_2 t^2 - \frac{1}{2}t\lambda_2 + \frac{1}{16}t + t\lambda_1 + \frac{1}{2}u_3 t, \\
 x_{22}(t, u, \lambda) &= \frac{1}{192}t^4 + \frac{11}{96}t^2 - \frac{1}{2}t^2 u_3 + \frac{1}{2}u_3 t - \frac{23}{192}t + t\lambda_2 + u_2 - u_2 t, \\
 x_{23}(t, u, \lambda) &= u_3 - \frac{1}{32256}t^7 - \frac{11}{11520}t^5 + \frac{1}{240}u_3 t^5 - \frac{1}{192}u_3 t^4 + \frac{167}{13824}t^3 + \frac{11}{144}t^3 u_3 - \frac{1}{6}t^3 u_3^2 - \\
 &\quad - \frac{1}{64}t^2 - \frac{11}{96}t^2 u_3 + \frac{1}{2}t^2 u_3^2 - \frac{1}{4}t^2 \lambda_1 - \frac{1}{3}u_3^2 t + \frac{7697}{30240}t - \frac{2767}{2880}u_3 t + \frac{1}{4}t\lambda_1, \\
 \forall t \in [0, 1], u &= (u_2, u_3) \in U, \lambda_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \lambda_2 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].
 \end{aligned}$$

Наближеними розв'язками відповідної визначальної системи у другій ітерації є

$$\lambda_1 = 0,060992729597, \lambda_2 = 0,2483174958, u_1 = -0,001462903831, u_2 = -0,2599774658.$$

Компоненти другого наближення є такими:

$$\begin{aligned}
 x_{11}(t) &= -0,06250000000 - 0,001462903831t + 0,1248901998t^2, \\
 x_{12}(t) &= \frac{1}{192}t^4 - 0,0154053996t^2 + 0,2599774658t - 0,001462903831, \\
 x_{13}(t) &= 0,2599774658 - \frac{1}{32256}t^7 + 0,0001283783299t^5 - 0,001354049301t^4 + 0,0287511577t^3 - \\
 &\quad - 0,02685176725t^2 - 0,0025441414t.
 \end{aligned}$$

На рис. 3 зображено графіки точного розв'язку та його четвертої апроксимації для першої, другої та третьої компонент відповідно. На рис. 4 зображені графіки похибок для четвертого наближення.

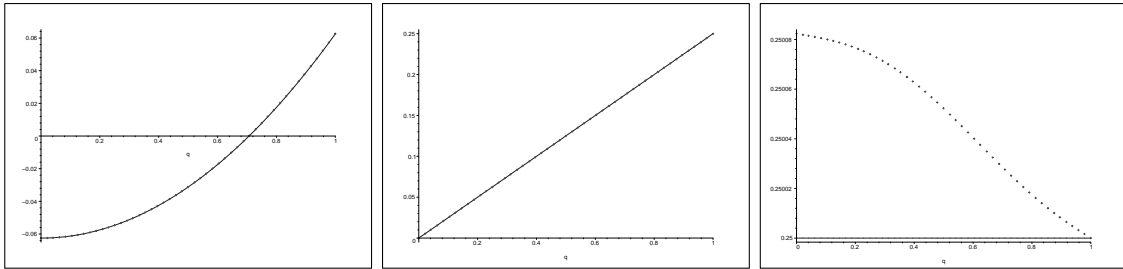


Рис. 3. Перші, другі та треті компоненти точного розв'язку (лінія) та їх четвертого наближення (пунктир).

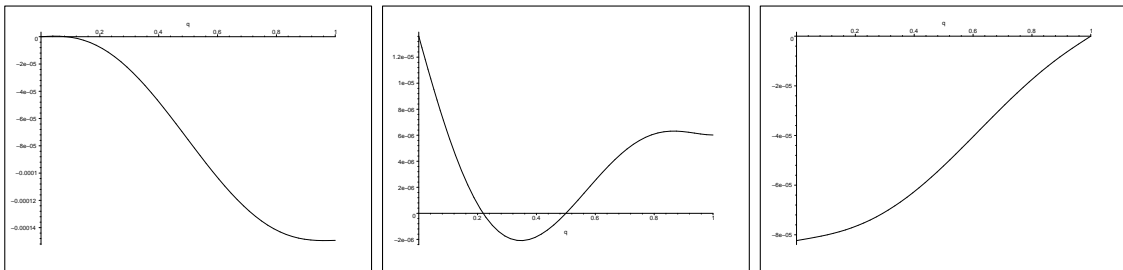


Рис. 4. Похибки першої, другої та третьої компонент розв'язку у четвертому наближенні.

Як видно з наведених Рис. 1 — Рис. 4 графіки точного розв'язку вже на другій апроксимації з досить високою точністю співпадають з відповідними наближеннями. Наприклад, відхилення наближеного розв'язку від точного у першій ітерації складає 0.12, 0.025, 0.026 відповідно для першої, другої та третьої компонент, а вже у четвертій ітерації —  $0.16 \cdot 10^{-5}$ ,  $0.17 \cdot 10^{-4}$ ,  $0.8 \cdot 10^{-4}$ .

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. — Київ: Наукова думка, 1992. — 279 с.
2. *Ronto M., Samoilenko A. M.* Numerical-analytic methods in the theory of boundary value problems.— River Edge, NS: World Scientific Publishing Co. Inc, 2000. — 455 p.
3. *Ronto A., Rontó M.* A note on the numerical-analytic method for nonlinear two-point boundary-value problems // *Nonlinear Oscillations*. — 2001. — 4, 1. — P. 112-128.
4. *Ронто Н. И., Савина Т. В.* Численно-аналитический метод для трехточечных краевых задач // *УМЖ* — 1994. — No. 3. — P. 393-403.
5. *Ronto M., Tégen R. M.* Successive approximation method for investigating three point boundary value problem with singular matrices // *Mathematica Pannonica*. — 1994. — 5, 1. — P. 15-28.

Одержано 12.11.2009