УДК 512.64

Ю. М. Перегуда
(Київський нац. ун-т імені Тараса Шевченка)

ПРО R-СТАБІЛЬНІ ЕЛЕМЕНТИ СКІНЧЕННИХ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНИХ МНОЖИН

In this paper we prove that there exist posets with positive Tits form which have 1-stable points.

У цій роботі доведено існування частково впорядкованих множин з додатною формою Тітса, які мають 1-стабільні точки.

Квадратичні форми виникають при розгляді багатьох задач в алгебрі, геометрії, теорії операторів, теорії ймовірності та інших галузях математики. В теорії зображень важливу роль відіграють квадратичні форми Тітса для різних об'єктів.

У 1972 р. П. Габріель [1] ввів зображення скінченного сагайдака і показав, що сагайдак має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли деяка (ним введена) квадратична форма є додатною. Він назвав цю форму квадратичною формою Тітса. Ця робота П. Габріеля стала початком нового напрямку в теорії зображень, який пов'язаний з вивченням зв'язків між властивостями зображень та властивостями відповідних квадратичних форм.

У 1974 р. Ю. А. Дрозд [2] розглянув квадратичну форму Тітса для скінченних частково впорядкованих множин і показав, що частково впорядкована множина має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли його форма Тітса є слабо додатною.

У 1977 р. М. М. Клейнер і А. В. Ройтер [3] ввели зображення диференціальних градуйованих категорій, а також відповідну квадратичну форму Тітса, і показали, що вільна трикутна диференціальна градуйована категорія має скінченний тип тоді і лише тоді, коли її форма Тітса є слабо додатною.

Квадратичні форми Тітса вивчали також К. Бонгартц, В. М. Бондаренко, Ш. Бреннер, Н. С. Головащук, П. Дрекслер, С. А. Овсієнко, Х. А. де ла Пенья, К. Рінгель, Д. Сімсон та багато інших математиків. При цьому розглядалися як властивості самих форм Тітса для різних об'єктів, так і зв'язки між їх властивостями та властивостями зображень (зокрема, були введені подібні квадратичні форми для сагайдаків із співвідношеннями, алгебр, категорій, тощо, які також були названі квадратичними формами Тітса).

В теорії зображень частково впорядкованих множин важливу роль відіграють не лише слабо додатні, а й додатні форми Тітса. В. М. Бондаренко і М. В. Стьопочкіна [4] показали, що у випадку, коли форма Тітса частково впорядкованої множини є додатною, її категорія ін'єктивних зображень має скінченний зображувальний тип. Всі такі частково впорядковані множини (що є аналогами графів Динкіна) описано цими ж авторами в роботі [5].

У цій роботі ми вивчаємо локальні деформації квадратичних форм Тітса скінченних частково впорядкованих множин.

Автор висловлює щиру подяку доктору фізико-математичних наук, професору В. М. Бондаренку за постановку задачі та корисні поради.

1. Основні поняття. Під квадратичною формою будемо розуміти довільну квадратичну форму над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$:

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i z_i^2 + \sum_{i<j} f_{ij} z_i z_j.$$

Множину всіх таких квадратичних форм позначимо через $\mathcal{R}$, а множину всіх $f(z) \in \mathcal{R}$ з одиничними коефіцієнтами $f_1, \ldots, f_n$ — через $\mathcal{R}_0$.

Нагадаємо деякі означення, введені В. М. Бондаренком.

Нехай $f(z) \in \mathcal{R}_0$ і $s \in \{1, \ldots, n\}$; s-деформацією форми $f(z)$ називається форма

$$f^{(s)}(z, a) = f^{(s)}(z_1, \ldots, z_n, a) = a z_s^2 + \sum_{i \neq s} z_i^2 + \sum_{i<j} f_{ij} z_i z_j,$$

де a — параметр.

Позначимо через $F_+^{(s)}$ множину всіх $b \in \mathbb{R}$, таких що форма $f^{(s)}(z, b)$ є додатною, і покладемо $F_-^{(s)} = \mathbb{R} \backslash F_+^{(s)}$. Іншими словами, $b \in F_-^{(s)}$ тоді і лише тоді, коли існує ненульовий вектор $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ такий, що $f^{(s)}(r_1, \ldots, r_n, b) \leq 0$. Далі, покладемо

$$m_f^{(s)} = \sup \mathrm{F}_-^{(s)} \in \mathbb{R} \cup \infty$$

(оскільки із $x \in F_-^{(s)}$ випливає, що $y \in F_-^{(s)}$ для любого $y < x$, то цей супремум є граничною точкою). Число $m_f^{(s)}$ називається s-им P-числом форми $f(z)$.

Легко бачити, що має місце наступне твердження.

Твердження 1. *Нехай $f(z_1, \ldots, z_n) \in \mathcal{R}_0$. Тоді*

1) $m_f^{(s)} \geq 0$*;*

2) $m_f^{(s)} = \infty$*, якщо форма*

$$f_{-s}(z_1, \ldots, z_{s-1}, z_{s+1}, \ldots, z_n) = f(z_1, \ldots, z_{s-1}, 0, z_{s+1}, \ldots, z_n)$$

не є додатною.

У роботі [6] доведена наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай $f(z_1, \ldots, z_n) \in \mathcal{R}_0$ і нехай $m_f^{(s)} \neq \infty$. Тоді*

1) $m_f^{(s)} \in F_-^{(s)}$*, а тому $m_f^{(s)}$ — найбільше число множини $F_-^{(s)}$.*

2) *форма $f^{(s)}(z, m_f^{(s)})$ є невід'ємною.*

Приведемо ще деякі означення.

Нехай S — частково впорядкована множина. Квадратичною формою Тітса множини S називається квадратична форма, яка задається наступною рівністю:

$$dr_S(z) = z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i<j, i,j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i$$

(з формальних міркувань потрібно вважати, що ні один із елементів S не позначений символом 0).

Число $m_f^{(i)}$, де $f = q_S(z)$, а i — елемент із S, будемо позначати через $m_S(i)$ або просто через $m(i)$, якщо S фіксоване. Елемент $i \in S$ називається r-стабільним відносно форми Тітса, якщо $m_S(i) \neq \infty$ і існує частково впорядкована множина $T \supset S$ порядку $|S| + r$, така що $m_S(i) = m_T(i)$. Підкреслимо, що запис $T \supset S$ означає, що S — підмножина T, повна відносно часткової впорядкованості на T. Поняття r-стабільності також введено В. М. Бондаренком.

2. Основний результат. Основна мета цієї статті — доведення наступної теореми.

Теорема 2. *Існує частково впорядкована множина з додатною формою Тітса, яка містить* 1*-стабільний елемент відносно форми Тітса.*

Для зручності, розглядаючи конкретну частково впорядковану множину S, вважатимемо, що її елементами є натуральні числа: $S = \{1, 2, \ldots, n\}$; відношення часткового порядку будемо позначати в цьому випадку через $\preceq$. При цьому вважаємо, що $i < j$ кожного разу, коли $i \prec j$. В усіх прикладах елемент n, для якого ми обчислюємо число $m(n)$, буде максимальним в S (відносно $\preceq$) і до того ж найбільшим серед $i \in S$ як натуральних чисел. Тому матриця квадратичної форми $q_S^{(p)}(z, a)$ — це симетрична матриця розміру $(n+1) \times (n+1)$ такого вигляду:

$$M_a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 \\ -1 & 2 & * & \ldots & * & * \\ -1 & * & 2 & \ldots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & * & * & \ldots & 2 & * \\ -1 & * & * & \ldots & * & 2a \end{pmatrix}.$$

Оскільки для обчислення чисел $m(i)$ ми будемо користуватися лише критерієм Сільвестра (для додатності квадратичної форми), то замість матриці M_a можна розглядати матрицю M_a°, яка отримується із M_a шляхом множення останньої на 2 та подальшого множення її першого рядка і першого стовпця на -1:

$$M_a^\circ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & * & \ldots & * & * \\ 1 & * & 2 & \ldots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & * & * & \ldots & 2 & * \\ 1 & * & * & \ldots & * & 2a \end{pmatrix}.$$

Далі, оскільки ми розглядатимемо частково впорядковані множини S лише з додатною формою Тітса, то всі головні мінори матриці M_1° — додатні (за критерієм Сільвестра), а значить $m_S(n)$ є розв'язком відносно a лінійного рівняння $\Delta(n, a) = 0$, де

$$\Delta(n, a) = |M_a^\circ| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & * & \ldots & * & * \\ 1 & * & 2 & \ldots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & * & * & \ldots & 2 & * \\ 1 & * & * & \ldots & * & 2a \end{vmatrix}.$$

Після таких зауважень переходимо безпосередньо до доведення теореми. Нагадаємо, що елементи частково впорядкованих множин ми нумеруємо натуральними числами, а відношення часткового порядку позначаємо символом $\preceq$.

Позначимо через P частково впорядковану множину з елементами $1, 2, 3$ і наступним частковим порядком: $1 \prec 3, 2 \prec 3$. Легко показати (див., наприклад, [7]), що квадратична форма Тітса для A_3 є додатною.

Обчислимо число $m_P(3)$.

У цьому випадку

$$\Delta(3, a) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2a \end{vmatrix}.$$

Помінявши місцями перший та другий рядки, а після цього перший і другий стовпці, отримаємо:

$$\Delta(3, a) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2a \end{vmatrix}.$$

Тепер від першого рядка віднімемо другий рядок:

$$\Delta(3, a) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2a \end{vmatrix}.$$

Цей визначник розкладаємо по першому рядку:

$$\Delta(3, a) = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2a \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2a \end{vmatrix} = 2(6a - 2) - 2(2a) = 8a - 4.$$

Отже, $m_P(3) = 1/2$ (бо згідно вищесказаного $m_P(3)$ є розв'язком рівняння $8a - 4 = 0$).

Теорема 2 випливає із наступного твердження.

Твердження 2. *Елемент 3 частково впорядкованої множини P є 1-стабільним відносно форми Тітса.*

Доведення твердження. Позначимо через Q частково впорядковану множину з елементами $1, 2, 3, 4$ і наступним частковим порядком: $2 \prec 3 \prec 4$, $1 \prec 3$. Ця частково впорядкована множина містить в собі (як повну підмножину) частково впорядковану множину P. Ми покажемо, що $m_Q(3) = 1/2$ і тим самим твердження буде доведеним. Очевидно, що $m_Q(3) = m_Q(4)$ (за симетрією форми Тітса відносно елементів 3 і 4). З формальних міркувань нам зручніше доводити, що $m_Q(4) = 1/2$.

Згідно введених вище позначень маємо:

$$\Delta(4, a) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2a \end{vmatrix}.$$

Помінявши місцями перший та другий рядки, а після цього перший і другий стовпці, отримаємо:

$$\Delta(4,a)=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2a \end{vmatrix}.$$

Тепер від першого рядка віднімемо другий рядок:

$$\Delta(4,a)=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2a \end{vmatrix}.$$

Цей визначник розкладаємо по першому рядку: $\Delta(4,a)=2B(3,a)+2C(3,a)$, де

$$B(3,a)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2a \end{vmatrix}, \qquad C(3,a)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2a \end{vmatrix}.$$

Обчислимо спочатку визначник $B(3,a)$. Від першого рядка віднімаємо другий:

$$B(3,a)=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2a \end{vmatrix},$$

і розкладаємо його по першому рядку:

$$B(3,a)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2a \end{vmatrix}=(6a-2)+(2a-1)=8a-3.$$

Обчислимо тепер визначник $C(3,a)$. Від першого рядка віднімаємо другий:

$$C(3,a)=\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2a \end{vmatrix},$$

і розкладаємо його по першому рядку:

$$C(3,a)=-\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2a \end{vmatrix}=-(6a-2)+(2a-1)=-4a+1.$$

Отже, $\Delta(4,a)=2B(3,a)+2C(3,a)=2(8a-3)+2(-4a+1)=8a-4$, а значить $m_Q(4)=m_Q(3)=1/2$, що і треба було довести.

Твердження 2 доведене, а з нього, як уже говорилося, випливає теорема 2.

1. *Gabriel P.* Unzerlegbure Darstellungen, I // Manus. Math. – 1972. – **6**, N 1. – P. 71—103.
2. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анализ и его прил. – 1974. – **8**. – С. 34–42.
3. *Клейнер М. М., Ройтер А. В.* Представления дифференциальных градуированных категорий // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 5–70.
4. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* Частично упорядоченные множества инъективно-конечного типа // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2005. – Вип. 9. – С. 15–25.
5. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, N3. – С. 18–58.
6. *V. M. Bondarenko, Yu. M. Pereguda.* On P-numbers of quadratic forms // Геометрія, топологія та їх застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – **6**, N2. – С. 474–477.
7. *Бондаренко В. М., Стьопочкіна М. В.* Про серійні частково впорядковані множини з додатно визначеною квадратичною формою Тітса // Нелінійні коливання. – 2006. – **9**, N3. – С. 320–325.

Одержано 19.11.2009