УДК 512.5446

В. М. Петечук (Закарпатский ин-т повышения квалификации педагогических кадров)

СТАБИЛЬНОСТЬ КОЛЕЦ

The conditions for stability of the elements of linear groups over the associative rings with identity and their connection with the stability of rings are analyzed in the article. The stability of rings which satisfy the conditions of rank stability ≥ 2, are commutative, regular in the Neumann sense, integer-algebraic, extended local rings, introduced by the author, is examined. The most important classical results of H. Bass, L. Vaserstein, S.H. Khlebutin, A.A. Suslin, I.S. Wilson, I.Z.Golubchik, are considered from the unified position.

Рассматриваются условия стабильности элементов линейных групп над ассоциативными кольцами с 1 и их связь со стабильностью колец. Показана стабильность колец, которые удовлетворяют условия стабильности ранга ≥ 2 , являются коммутативными, регулярными в смысле Ноймана, целоалгебраическими, а также введенные автором расширенно-локальные кольца. С единых позиций изложены наиболее значимые классические результаты Х. Басса, Л. Васерштейна, С.Г. Хлебутина, О.О. Суслина, И.Уилсона, И.З.Голубчика.

Изучение стабильности колец берет начало из известных коммутаторной формулы $SL\,(n,R)=[SL\,(n,R)\,,Sl\,(n,R)]$ и теоремы Жордано-Диксона (1870) о простоте $PSL\,(n,R)$ над полем R, если $n\geq 3$. Позже, благодаря работам Дьедонне в 50-ые годы, оказалось, что эти утверждения имеют место над телами.

Над локальными кольцами проблему стабильности колец сформулировал и решил в 60-ые годы Клингенберг. Выяснилось, что над локальными кольцами при $n\geq 3$ обобщением коммутаторной формулы есть формулы $[C(n,I)\,,E(n,R)] = E\,(n,I)\lhd GL\,(n,R)$, которые имеют место для любых идеалов I кольца R, а обобщением теоремы Жордано-Диксона есть включения $E\,(n,I_0)\subset G\subset C\,(n,I_0)$ для инвариантных относительно $E\,(n,R)$ подгрупп G группы $GL\,(n,R)$ и соответствующих им идеалов I_0 кольца R.

Ассоциативные кольца с 1, для которых имеют место вышеназванные обобщения, будем называть стабильными.

Фундаментальным прорывом в доказательстве стабильности более широких классов колец оказалась работа Н.Басса 1964 года. В ней он доказал стабильность колец, которые удовлетворяют условие стабильности ранга ≥ 2 . Стабильными также являются, например, полулокальные кольца, которые удовлетворяют условие стабильности ранга 1.

В 1972-1977 годах Уилсон, Голубчик И.З., Суслин О.О. доказали, что коммутативные кольца с 1 стабильные. Обобщением этого результата есть стабильность колец, которые конечно порождены над своими центрами. Эта теорема была независимо получена в работах Суслина О.О. и Васерштейна Л. Более того, в 1981 году Васерштейн Л. доказал стабильность ассоциативных колец с 1, если их локализации по всем максимальным идеалам центра кольца удовлетворяют условие стабильности ранга ≥ 2 . В 2001 году Петечук В.М. доказал стабильность ассоциативных колец с 1, если таковыми являются их локализации по всем максимальным идеалам центра кольца.

В 1986 году Хлебутин С.Г. и независимо Васерштейн Л. доказали стабильность колец регулярных в смысле Ноймана. В 2001 году Петечук В.М. обобщил этот результат на кольца, которые целоалгебраические над произвольными под кольцами своих центров.

Принципиально новый подход к установлению стабильности слабонетеровых колец, которые содержат бесконечные поля в своих центрах, в 1995 году предложил Голубчик И.З. В 1997 году он анонсировал сообщение о стабильности блочно-целоалгебраических колец.

Стабильность колец рассматривается и в группах Шевалье. Стабильность коммутативных колец в группах Шевалье доказана в [1–4], а колец лиевого типа в [5].

В данной работе доказывается стабильность ассоциативных колец с 1 исходя из более широкого, чем раньше, понятия стабильности элементов полной линейной группы.

В работе также рассматриваются условия стабильности элементов линейных групп над ассоциативными кольцами с 1. Из них вытекают стабильность колец, которые удовлетворяют условие стабильности ранга ≥ 2 , коммутативные, регулярные в смысле Ноймана, блочно-целоалгебраические, а также введенные автором расширенно-локальные кольца.

Утверждение о стабильности отдельных колец наиболее системно изложено в [6,7]. Замечения в [7] на с.122 в 3-ем абзаце не соответствует действительности.

Стабильность колец играет важную роль в приложениях [8–12]. Особенно в описаниях гомоморфизмов линейных групп над асоциативными кольцами [7, 11, 13–17].

Пусть R – ассоциативное кольцо с 1, R^* – группа обратимых элементов кольца R, $J(R)$ – радикал Джекобсона кольца R, ξR и ξR^* – центры R и R^* соответственно.

Пусть $R_n = M_n(R)$ обозначает кольцо всех $n \times n$ матриц над R и $GL(n,R) = R_n^*$ – соответственно полную линейную группу обратимых матриц.

Под $e_{ij} \in M_n(R)$ будем понимать матрицу у которой на месте (i,j) находится единица, а на остальных местах нули. Такие матрицы будем называть стандартными матричными единицами. Элемент $t_{ij}(r) = 1 + re_{ij}$, где 1 – единичная матрица, $i \neq j$, $r \in R$ будем называть трансвекцией. Иногда единичную матрицу будем обозначать E. Если X – подмножество кольца R, то под $t_{ij}(X)$ будем понимать множество $\{t_{ij}(r) \mid r \in X\}$ для фиксированных $i \neq j$, $1 \leq i,j \leq n$, $E_X = \langle t_{ij}(X) \rangle$ – подгруппа группы $GL(n,R)$, порожденная множеством всех $t_{ij}(X)$, $1 \leq i,j \leq n$.

В частном случае, если $X = R$ будем также использовать обозначение $E(n,R) = E_R$. Трансвекции из $t_{ij}(R)$ и $t_{ji}(R)$ будем называть противоположными.

Пусть I – произвольный двусторонний идеал кольца R. Обозначим через $\Lambda_I : R \to R/I$, $\Lambda_I : M_n(R) \to M_n(R/I)$, $\Lambda_I : GL(n,R) \to GL(n, R/I)$ естественные гомоморфизмы колец R, $M_n(R)$ и группы $GL(n,R)$.

Определим подгруппу $C_I = \ker \Lambda_I$ и будем называть ее главной конгруэнцподгруппой уровня I в группе $GL(n,R)$. Полный прообраз центра группы $GL(n, R/I)$ будем обозначать через $C(n,I) = \Lambda_I^{-1} \xi GL(n, R/I)$, а под $E(n,I)$ будем понимать нормальное замыкание группы E_I в $E(n,R)$. Легко видеть, что

$$E(n,I) \subseteq C_I \subseteq C(n,I) .$$

Пусть N и G – подгруппы группы $GL(n,R)$, которые инвариантны относительно группы $E(n,R)$ и N не содержит нееденичных трансвекций. Под I_0 будем понимать наибольший идеал кольца R такой, что $E(n,I_0)\subseteq G$.

Для элементов произвольной группы будем использовать обозначения $a^b = bab^{-1}$, $[a,b]=aba^{-1}b^{-1}$ и $[a_1,\ldots,a_l]=[[a_1,\ldots,a_{l-1}],a_l]$, а также коммутаторные формулы

$$[ab,c]=[b,c]^a\cdot[a,c]\ ,\ [a,bc]=[a,b]\cdot[a,c]^b$$

и тождество Ф.Холла

$$\left[a^{-1},b,c\right]^a\cdot\left[c^{-1},a,b\right]^c\cdot\left[b^{-1},c,a\right]^b=1\ .$$

В дальнейшем будем предполагать, что $n\geq 3$.

Имеют место матричные коммутаторные формулы для двух не противоположных трансвекций $t_{ik}(x)$ и $t_{lj}(y)$, $(l,j)\neq(k,i)$

$$[t_{ik}(x),t_{lj}(y)]=\begin{cases} t_{ij}(\delta_{kl}xy)\,,i\neq j\\ t_{lk}(-\delta_{ij}yx)\,,l\neq k\end{cases}\ ,$$

где δ_{ij},δ_{kl} – символы Кронекера.

С этой формулы, в частности, следует что коммутатор двух не противоположных трансвекций коммутирует с каждой из них.

Имеет место результат, впервые полученный Л.Васерштейном. Дадим более краткое его доказательство.

Лемма 1. *Пусть I – идеал кольца R с 1. Тогда*

$$E(n,I)=\left\langle t_{ij}(I)^{t_{ji}(R)}\mid 1\leq i\neq j\leq n\right\rangle$$

Доказательство. Пусть $T=\left\langle t_{ij}(I)^{t_{ji}(R)}\mid 1\leq i\neq j\leq n\right\rangle$. Очевидно, что

$$E_I\subseteq T\subseteq E(n,I)\ \text{и}\ t_{ij}(I)^{t_{kl}(R)}\subseteq E_I\ ,\ \text{если}\ (k,l)\neq(j,i)\,.$$

Следовательно для произвольной трансвекции τ имеют место включения

$$E_I^{\tau}\subseteq T\ \text{и, как следствие,}\ E_I^{\tau\tau_1}\subseteq T,$$

где τ_1 – произвольная коммутирующая с τ трансвекция.

Если трансвекция $\tau\notin t_{ji}(R)$, то коммутаторы $[t_{ij}(R),\tau]$ являются трансвекциями, которые коммутируют с трансвекциями τ и $t_{ij}(R)$ и из матричных коммутаторных формул следует, что

$$\left(t_{ij}(I)^{t_{ji}(R)}\right)^{\tau}\subseteq\left(t_{ij}(I)^{\tau}\right)^{t_{ji}(R)[t_{ji}(R),\tau]}\subseteq E_I^{t_{ji}(R)[t_{ji}(R),\tau]}\subseteq T\ .$$

Если $\tau\in t_{ji}(R)$, то выбрав $s\neq i,j$ имеем

$$\left(t_{ij}(I)^{t_{ji}(R)}\right)^{\tau}\subseteq\left([t_{is}(I),t_{sj}(R)]^{t_{ji}(R)}\right)^{\tau}\subseteq$$
$$[t_{js}(I)\,t_{is}(I)\,,t_{si}(R)\,t_{sj}(R)]^{\tau}\subseteq[E_I,t_{si}(R)\,t_{sj}(R)]\subseteq T$$

Поэтому $T^{\tau}\subseteq T$, $E(n,I)\subseteq T$ и $E(n,I)=T$.

Лемма 1 доказана.

Следствие 1. *Пусть I, J – идеалы кольца R с 1. Тогда $E(n,IJ)\subseteq[E_I,E_J]$. В частности $E(n,I^2)\subseteq E_I$.*

Действительно, для попарно различных чисел $1\leq i,j,s\leq n$ имеют место включения

$$t_{ij}(IJ)^{t_{ji}(R)}\subseteq[t_{is}(I),t_{sj}(J)]^{t_{ji}(R)}\subseteq[t_{js}(I)\,t_{is}(I)\,,t_{si}(J)\,t_{sj}(J)]\subseteq[E_I,E_J]$$

Согласно с леммой 1 $E(n, IJ) = \left\langle t_{ij}(IJ)^{t_{ji}(R)} | 1 \leq i \neq j \leq n, \right\rangle \subseteq [E_I, E_J]$. Положив $I = J$, имеем $E(n, I^2) \subseteq E_I$.

Описание нормального строения линейных групп над некоторыми кольцами, как правило, состоит из двух составляющих. С одной стороны доказывают, что для группы G, которая нормализуется группой $E(n, R)$, существует идеал I кольца R такой, что

$$E(n, I) \subseteq G \subseteq C(n, I),$$

а с другой стороны доказывают выполнения равенства

$$[C(n, I), E(n, R)] = E(n, I) \triangleleft GL(n, R)$$

для произвольного идеала I кольца R. Заметим, что не всегда обе составляющие нормального строения линейных групп одновременно выполняются. Более того, существуют кольца, над которыми ни одна из них не имеет место. Однако, класс колец над которыми верны обе составляющие описания нормального строения линейных групп достаточно широк. В частности, он содержит коммутативные кольца, кольца конечно порожденные над своими центрами, и другие. Поиск условий на кольца, которые были бы необходимыми и достаточными условиями вышесказанных составляющих нормального строения линейных групп продолжается. Настоящая статья представляет собой одну из таких попыток.

Определение 1. *Ассоциативное кольцо R с 1 называется коммутаторным, если для всех идеалов I кольца R имеют место равенства $[C(n, I), E(n, R)] = E(n, I)$ и $E(n, I)$ – нормальные подгруппы $GL(n, R)$.*

Определение 2. *Ассоциативное кольцо R с 1 называется слабо-коммутаторным, если существует натуральное число k такое, что*

$$\Big[C(n, I), \underbrace{E(n, R), \ldots, E(n, R)}_{k\ \text{раз}}\Big] = E(n, I) \triangleleft GL(n, R)$$

для всех идеалов I кольца R одновременно. Число k называется длиной слабо-коммутаторного кольца R.

Нетрудно видеть, что в произвольном ассоциативном кольце R с 1 имеет место включение $E(n, I) \subseteq [C(n, I), E(n, R)]$, где I – произвольный идеал R. Более того, ассоциативное кольцо R с 1 является коммутаторным тогда и только тогда, когда

$$[C(n, I), E(n, J)] \subseteq E(n, I) \bigcap E(n, J)$$

для всех идеалов I и J кольца R. Очевидно, что коммутаторные кольца являются слабо коммутаторными и в коммутаторных кольцах подгруппа $E(n, R)$ является нормальной подгруппой в группе $GL(n, R)$.

Определение 3. *Ассоциативное кольцо R с 1 называется нормальным, если для произвольной подгруппы G, инвариантной относительно группы $E(n, R)$, существует идеал I кольца R такой, что $E(n, I) \subseteq G \subseteq C(n, I)$.*

Определение 4. *Ассоциативное кольцоR с 1 называется частично-нормальным, если произвольная подгруппа N, инвариантная относительно группы $E(n, R)$, и которая не содержит, нееденичных трансвекций, содержится в $\xi GL(n, R)$.*

Очевидно, что фактор-кольца нормальных колец являются частично-нормальными.

Определение 5. *Ассоциативные кольца, которые являются одновременно коммутаторными и нормальными, называются стабильными.*

Подчеркнем, что коммутаторность, нормальность и, как следствие, стабильность колец определяются в группе $GL(n,R)$, а потому зависят от n.

Лемма 2. *Слабо-коммутаторное кольцо R, фактор-кольца которого являются частично-нормальными, является стабильным.*

Доказательство. Пусть I_0 – наибольший идеал R такой, что $E(n,I_0)\subseteq G$. Если $\Lambda_{I_0}(G)$ содержит трансвекции, то существует ненулевое множество

$$J_0=\{r\in R\,|\Lambda_{I_0}(t_{ij}(r))\in\Lambda_{I_0}(G)\text{ для некоторых } i\neq j\}.$$

Легко видеть, что J_0 – идеал, который содержит I_o . Поскольку $\Lambda_{I_0}E(n,J_0)\subseteq\Lambda_{I_0}(G)$, то $E(n,J_0)\subseteq GC_{I_0}$. Поэтому для $r\in J_0$ существует $g\in G$, что $t_{ij}(r)\,g\in C_{I_0}\subseteq C(n,I_0)$.

Поскольку R – слабо-коммутаторное кольцо длины k, то

$$\Big[C(n,I_0),\underbrace{E(n,R),\ldots,E(n,R)}_{k\text{ раз}}\Big]=E(n,I_0)\subseteq G.$$

Поэтому

$$[t_{ij}(r)\,g,E(n,R),\ldots,E(n,R)]\subseteq G\text{ и, как следствие, } t_{ij}(r)\subseteq G.$$

Это означает, что $E(n,J_0)\subseteq G$, что противоречит определению идеала I_0. Поэтому $\Lambda_{I_0}(G)$ не содержит неединичных трансвекций. Поскольку кольцо R/I_0 является частично-нормальным, то $\Lambda_{I_0}(G)\subset\xi GL\left(n,R/I_0\right)$, то есть $G\subseteq C(n,I_0)$.

Следовательно,

$$E(n,I_0)\subseteq G\subseteq C(n,I_0).$$

Это доказывает, что R является нормальным кольцом.

Докажем, что R – коммутаторное кольцо.

Пусть $g\in GL(n,R)$, $H=E(n,R)^g$ и $H_0=H^{E(n,R)}$ – нормальное замыкание H относительно $E(n,R)$. Естественно $H\subseteq H_0$ и H_0 – инвариантная подгруппа относительно группы $E(n,R)$. Поскольку R – нормальное кольцо, то существует идеал I кольца R такой, что

$$E(n,I)\subseteq H_0\subseteq C(n,I).$$

Учитывая, что $C(n,I)$ – нормальная подгруппа группы $GL(n,R)$ и $E(n,R)^g\subseteq H_0\subseteq C(n,I)$, то $I=R$, $E(n,R)\subseteq H_0$ и $[E(n,R),H]\subseteq[H_0,H]$. С равенства $E(n,R)=[E(n,R),E(n,R)]$ вытекает, что $H=[H,H]\subseteq[H_0,H]$. Тем самым доказано, что $H_0=H^{E(n,R)}\subseteq[E(n,R),H]\,H\subseteq[H_0,H]$.

Из слабо-коммутаторности кольца R длины k следует, что

$$\Big[GL(n,R),\underbrace{E(n,R),\ldots,E(n,R)}_{k\text{ раз}}\Big]\subseteq E(n,R).$$

Поэтому

$$H_0\subseteq\Big[H_0,\underbrace{H,\ldots,H}_{k\text{ раз}}\Big]\subseteq\Big[GL(n,R),\underbrace{H,\ldots,H}_{k\text{ раз}}\Big]\subseteq H.$$

Это означает, что $H_0 = H$, $E(n,R) \subseteq H$ и $E(n,R)^g \subseteq E(n,R)$ для всех $g \in GL(n,R)$. Таким образом доказано, что $E(n,R)$ – нормальная подгруппа группы $GL(n,R)$. Учитывая, что R – слабо-коммутаторное кольцо длины k, то есть

$$E(n,I) = \left[C(n,I), \underbrace{E(n,R), \ldots, E(n,R)}_{k \text{ раз}}\right]$$

получаем, в качестве следствия, что $E(n,I)$ – нормальная подгруппа группы $GL(n,R)$ для всех идеалов I кольца R.

Если $k \geq 2$, то обозначим

$$C_1 = \left[C(n,I), \underbrace{E(n,R), \ldots, E(n,R)}_{k-2 \text{ раз}}\right].$$

Тогда $[C_1, E(n,R), E(n,R)] = E(n,I)$ и $[E(n,R), C_1, E(n,R)] = E(n,I)$. Из коммутаторного тождества Ф.Холла с учетом того, что $E(n,I)$ – нормальные подгруппы группы $GL(n,R)$, получаем, что $[E(n,R), E(n,R), C_1] \subseteq E(n,I)$. Это значит, что

$$[C_1, E(n,R)] \subseteq E(n,I).$$

Поэтому

$$\left[C(n,I), \underbrace{E(n,R), \ldots, E(n,R)}_{k-1 \text{ раз}}\right] = E(n,I).$$

Действуя аналогично получаем, что $[C(n,I), E(n,R)] = E(n,I)$. Тем самым доказано, что R – коммутаторное кольцо и, как следствие, что R – стабильное кольцо.

Из доказательства леммы 2 получаем

Следствие 2. *Слабо-коммутаторные нормальные кольца являются стабильными.*

Отметим, что в коммутаторном кольце R для подгруппы L группы $GL(n,R)$, удовлетворяющей условию $E(n,I_0) \subseteq L \subseteq C(n,I_0)$ для некоторого идеала I_0 кольца R, имеют место включения

$$E(n,I_0) \subseteq [L, E(n,R)] \subseteq [C(n,I_0), E(n,R)] = E(n,I_0).$$

Поэтому $[L, E(n,R)] = E(n,I_0) \subseteq L$. Это означает, что L является $E(n,R)$ - нормальной подгруппой группы $GL(n,R)$ и идеал I_0 подгруппой L определяется однозначно.

Пусть N обозначает $E(n,R)$ -инвариантную подгруппу группы $GL(n,R)$, которая не содержит неединичных трансвекций.

Если I – двусторонний идеал в кольце R, то аннулятор

$$AnnI = \{r \in R \,|\, rI = Ir = 0\}$$

идеала I в R также является двусторонним идеалом.

Лемма 3. *Пусть R – ассоциативное кольцо с 1, $g = (g_{ij}) \in N$ и существует $x \in R$ такой, что $g_{ij}x = 0$ для некоторых фиксированных $1 \leq i, j \leq n$. Тогда $g \in C(n, AnnRxR)$, если $i \neq j$ и $x = 0$ в противоположном случае.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что в случае $k \neq j$ i-ая строка матрицы $g_1 = [g, t_{jk}(x)] \in N$ совпадает с i-ой строкой матрицы $t_{jk}(-x)$.

Предположим, что $i \neq j$. Тогда i-ая строка матрицы $t_{jk}(-x)$ и единичной матрицы совпадают. Если $g_1 \neq 1$, то N содержит трансвекции вида $[g_1, t_{li}(R)]$ для всех $l \neq i$, $1 \leq l \leq n$. Поскольку N не содержит неединичных трансвекций, то $g_1 = 1$ для всех $k \neq j$. Из равенства $[g, t_{jk}(x)] = 1$ следует, что $xg_{ks} = 0$ для всех $s \neq k$, $g_{sj}x = 0$ для всех $s \neq j$ и $xg_{kk} = g_{jj}x$.

Из аналогичных соображений доказываем, что g^{-1} коммутирует со всеми матрицами $t_{mk}(x)$, где $m \neq k$, $x \in R$. Следовательно, g коммутирует со всеми трансвекциями из группы E_x . Это эквивалентно тому, что $gx = xg$ – скалярная матрица (хотя и не обязательно центральная).

Поскольку $g_{ij}xR = 0$, то $gxr = xrg$ – скалярная матрица для всех $r \in R$. Учитывая, что $i \neq j$ получаем, что $xRg_{ij} = 0$ и, следовательно, $RxRg_{ij} = 0$. Как и выше доказываем, что $r'xrg = gr'xr$ – скалярная матрица для всех r, $r' \in R$. Это означает, что элементы из RxR аннулируют справа и слева элементы g_{pq}, $g_{pp} - g_{pq}$ матрицы g для всех $1 \leq p \neq q \leq n$. Тем самым доказано, что $g \in C(n, AnnRxR)$.

В частности, если g имеет нулевой недиагональный элемент, который, естественно, аннулируется всеми элементами кольца R, то получаем, что $g \in C(n, AnnR) = \xi GL(n, R)$.

Поскольку $g_1 = [g, t_{jk}(x)] \in N$ и g_1 имеет нулевой недиагональный элемент (из-за $n \geq 3$), то $[g, t_{jk}(x)] \in \xi GL(n, R)$.

Рассмотрим случай $i = j$. Поскольку $[g, t_{ik}(x)] \in \xi GL(n, R)$ и i-ая строка матрицы $gxe_{ik}g^{-1}$ – нулевая, то для некоторого элемента $r \in \xi R \bigcap R^*$ i-ая строка матрицы $rt_{ik}(x) - E = (r-1)E + rxe_{ik}$ тоже нулевая. Поэтому $r = 1$ и $x = 0$.

Замечание 1. *Из аналогичных соображений лемма 3 остается верной, если рассматривать равенство* $xg_{ij} = 0$ *вместо равенства* $g_{ij}x = 0$.

Из леммы 3 следует, что диагональные элементы матриц группы N не имеют правых или левых делителей нуля. В частности, сами диагональные элементы матриц $g \in N$ не могут быть равными нулю.

Следствие 3. *Если* $g \in N$ *и для некоторого* $x \in R$ *коммутатор* $[g, t_{ij}(x)]$ *имеет нулевой элемент, то* $g \in C(n, AnnRxR)$.

Доказательство. Поскольку N является $E(n, R)$ -инвариантной группой, то $[g, t_{ij}(x)] \in N$ и, в соответствии с леммой 3, имеет место включение $[g, t_{ij}(x)] \in \xi GL(n, R)$. Поэтому существует $r \in \xi R \bigcap R^*$, что $gt_{ij}(x)g^{-1} = rt_{ij}(x)$. Это означает, что $gxe_{ij} = (rt_{ij}(x) - E)g = (r-1)g + rxe_{ij}g$. В таком случае $(r-1)g_{ll} = 0$, где $l \neq i, j$. Поскольку диагональные элементы матрицы g не имеют делителей нуля, то $r = 1$ и $gxe_{ij} = xe_{ij}g$. Следовательно $g_{si}x = 0$ для всех $s \neq i$. В соответствии с леммой 3 имеет место включение $g \in C(n, AnnRxR)$.

Лемма 4. *Пусть* $g \in N$ *и* $x_1, \ldots, x_n \in R$ *такие, что* $g_{i1}x_1 + \cdots + g_{in}x_n = 0$ *и хотя бы один из элементов* x_i *является нулевым. Тогда*

$$g \in C(n, Ann(Rx_1R + \ldots + Rx_nR)).$$

Доказательство. Предположим, что $x_j = 0$ для некоторого $1 \leq j \leq n$.

Тогда i-ая строка коммутатора $g_1 = [g, t_{1j}(x_1) \cdots t_{nj}(x_n)] \in N$ совпадает с i-ой строкой матрицы $t_{ij}(-x_i)$. Поскольку она содержит нулевые недиагональные элементы, то, согласно лемме 3, коммутатор $g_1 \in \xi GL(n, R)$. Учитывая, что на (i, i) -ом месте матрицы $t_{ij}(-x_i)$ находится единица, получаем, что $g_1 = 1$. Поэтому для произвольного $1 \le l \le n$ существует $1 \le s \ne k \le n$, что $x_l g_{sk} = 0$. Согласно лемме 3, $g \in C(n, AnnRx_lR)$ для всех $1 \le l \le n$. В таком случае элементы g_{pq} и $g_{pp} - g_{qq}$, где $1 \le p \ne q \le n$ аннулируются справа и слева элементами идеалов Rx_lR для всех $1 \le l \le n$, а значит и элементами суммы $Rx_1R + \cdots + Rx_nR$. Это доказывает включение $g \in C(n, Ann(Rx_1R + \cdots + Rx_nR))$.

Замечание 2. *Аналогично, если $g \in N$ и $x_1, \ldots, x_n \in R$ такие, что $x_1 g_{1j} + \ldots + x_n g_{nj} = 0$ и хотя бы один из элементов x_i является нулевым, то $g \in C(n, Ann(Rx_1R + \cdots + Rx_nR))$.*

Следствие 4. *Если $g \in N$ и хотя бы один, не обязательно диагональный, элемент матрицы g имеет правый или левый обратный, то $g \in \xi GL(n, R)$.*

Доказательство. Предположим, что g_{ij}^{-1} является левым обратным g_{ij} . Для $k \ne i$ положим $x_i = -g_{kj} g_{ij}^{-1}$, $x_k = 1$ и $x_s = 0$ для всех $s \ne i, k$. Тогда $x_1 g_{1j} + \ldots + x_n g_{nj} = 0$ и $Rx_1R + \cdots + Rx_nR = R$. Согласно замечанию 2 леммы 4 имеет место включение $g \in \xi GL(n, R)$.

Лемма 5. *Пусть $g = g_1 g_2 \in N$ такой, что $(g_1)_{ki} = \delta_{ki}$ и $(g_2)_{kj} = \delta_{kj}$ для всех $1 \le k \le n$ и фиксированных $1 \le i, j \le n$. Тогда $g \in \xi GL(n, R)$.*

Доказательство. Условие леммы 5 означает, что i-ый столбец матрицы $g_1 - 1$ и j-ый столбец матрицы $g_2 - 1$ являются нулевыми.

Если $i = j$, то i-ый столбец матрицы g совпадает с i-ым столбцом единичной матрицы. Поэтому g имеет обратимый элемент и, в соответствии со следствием 4 леммы 4, $g \in \xi GL(n, R)$.

Предположим, что $i \ne j$. Без ограничения общности, с точностью до подобия матрицей из группы $E(n, R)$, можем считать, что $i = 1$ и $j = n$. Тогда

$$g = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix},$$

где $A, B \in GL(n-1, R)$, а x, y – строка и столбец длины n-1 соответственно. Пусть

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -xA^{-1} \\ 0 & E \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -y & 1 \end{pmatrix}, g_0 = XgY$$

где E – единичная $(n-1) \times (n-1)$ матрица. Тогда

$$g_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $X \in E(n, R)$ и Y коммутирует с $t_{n1}(1)$, то $X[g, t_{n1}(1)]X^{-1} \in N$ и $[g_0, t_{n1}(1)] \in N[X, t_{n1}(1)]$. С другой стороны, первая строка матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t_{n1}(1) \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}^{-1}, \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, t_{n1}(1) \right]$$

и, как следствие, матрицы $[g_0, t_{n1}(1)]$ совпадает с первой строкой единичной матрицы. Поэтому

$$[g_0, t_{n1}(1), t_{n1}(1), t_{n1}(1)] = E .$$

Это означает, что

$$h = [X, t_{n1}(1), t_{n1}(1), t_{n1}(1)] \in N .$$

Поскольку вторая строка матрицы h совпадает со второй строкой единичной матрицы, то, в соответствии со следствием 4 леммы 4, $h = E$.

Пусть $-xA^{-1} = (x_2, \ldots, x_n)$. Непосредственные вычисления показывают, что из равенства $h = E$ следует равенство $x_n^4 = 0$. Поэтому $[t_{n1}(1), X]_{11} = 1 - x_n \in R^*$.

В качестве следствия получаем, что элемент матрицы $[g_0, t_{n1}(1)] \cdot [t_{n1}(1), X]$, который находится на месте $(1,1)$, совпадает с $1 - x_n$ и поэтому является обратимым.

Учитывая, что Y коммутирует с $t_{n1}(1)$, из коммутаторных формул вытекает равенство

$$[g, t_{n1}(1)] = \left[X^{-1} g_0, t_{n1}(1)\right] = [g_0, t_{n1}(1)]^{X^{-1}} \left[X^{-1}, t_{n1}(1)\right] .$$

Поэтому имеет место очевидное его следствие

$$[g, t_{n1}(1)]^X = [g_0, t_{n1}(1)] [t_{n1}(1), X] .$$

Поскольку $g \in N$, то $[g, t_{n1}(1)]^X \in N$ и, согласно следствию 4 леммы 3, $[g, t_{n1}(1)]^X \in \xi GL(n, R)$ и, как следствие, $[g, t_{n1}(1)] \in \xi GL(n, R)$ и $g \in \xi GL(n, R)$.

Нам понадобятся некоторые общекольцевые утверждения.

Имеет место

Лемма 6. *Пусть a, b, c– некоторые элементы ассоциативного кольца R с 1. Элемент $1+ab \in R^*$ тогда и только тогда, когда $1+ba \in R^*$. В частности, если $a^2 = b^2 = 0$ и $1 + ab \in R^*$, то имеет место разложение*

$$1 + ab = (1 + b(1-\gamma)) [1 - b, 1 + a] (1 + (1-\gamma) a) (1 + ba) ,$$

где $\gamma = (1 + ab)^{-1}$.

Доказательство. Первая часть леммы 6 следует из того, что равенство $(1 + ab)c = 1$ влечет за собой равенство $(1 + ba)(1 - bca) = 1$.

Если $a^2 = b^2 = 0$ и $1 + ab \in R^*$, то $1 + a$, $1 - b$ – обратимые элементы и $\gamma(1 + ab) = (1 + ab)\gamma = 1$, где $\gamma = (1 + ab)^{-1}$. Поэтому $\gamma ab + \gamma - 1 = ab\gamma + \gamma - 1 = 0$.

В качестве следствия получаем, что

$$b\gamma aba + b\gamma a - ba = b\gamma^2 a - b\gamma a + b\gamma ab\gamma a = b\gamma ab + b\gamma - b = ab\gamma a + \gamma a - a = 0 ,$$

а также , что $a(1-\gamma) = (1-\gamma) b = 0$ и $a\gamma a = b\gamma b = 0$.

В таком случае

$$(1 - a)(1 + (1-\gamma) a) = 1 - \gamma a - a(1-\gamma) a = 1 - \gamma a \quad \text{и}$$
$$(1 + b(1-\gamma))(1 - b) = 1 - b\gamma - b(1-\gamma) b = 1 - b\gamma.$$

Непосредственными вычислениями устанавливаем, что

$$(1 - b\gamma a)(1 + a)(1 + b)(1 - \gamma a) =$$
$$(1 + a - b\gamma - b\gamma a)(1 + b - \gamma a - b\gamma a) = 1 + ab - b\gamma a$$

и $(1 + ab - b\gamma a)(1 + ba) = 1 + ab$. Это означает, что имеет место равенство

$$1 + ab = (1 - b\gamma)(1 + a)(1 + b)(1 - \gamma a)(1 + ba) ,$$

из которого следует формула леммы 6.

Если в лемме 6 положить $a = xe_{ik}$ и $b = -ye_{lj}$, где $x, y \in R$, то в случае $i \neq k$ и $l \neq j$, имеют место равенства $a^2 = b^2 = 0$ и $ab = -\delta_{kl} xye_{ij}$, $ba = -\delta_{ij} yxe_{lk}$.

Если $i \neq j$, то $ba = 0$ и $\gamma = (1 + ab)^{-1} = 1 - ab$. Поэтому $1 + b(1-\gamma) = 1 + (1-\gamma) a = 0$. Учитывая, что $1 + a = t_{ik}(x)$, $1 - b = t_{lj}(y)$, $1 + ab = t_{ij}(-\delta_{kl} xy)$

получаем формулу $t_{ij}(-\delta_{kl}xy) = [t_{lj}(y), t_{ik}(x)]$ из которой следуют известные матричные коммутаторные формулы

$$t_{ij}(\delta_{kl}xy) = [t_{ik}(x), t_{lj}(y)] \text{ и } t_{lk}(-\delta_{ij}yx) = [t_{lj}(y), t_{ik}(x)].$$

Пусть $g \in GL(n,R)$ и $U = ge_{ii}$, $V = e_{ij}g^{-1}$, $r, r_0 \in R$. Очевидно, что $VU = \delta_{ij}e_{ii}$. В дальнейшем будем предполагать, что $i \neq j$. Поэтому $VU = 0$.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – некоторые элементы R и $V_0 = x_1e_{i1} + \cdots + x_ne_{in}$, $\alpha = x_1g_{1i} + \cdots + x_ng_{ni}$. Предположим, что $x_l = 0$ для некоторого $1 \leq l \leq n$ и $x_k = rg_{jk}^{-1}$ для некоторого $1 \leq k \leq n$. Положим $W = rV - V_0$. Очевидно, что $V_0U = \alpha e_{ii} = -WU$ и $W_{ik} = 0$.

В этих обозначениях

$$t_{ij}(r_0r)^g = 1 + ge_{ii}r_0re_{ij}g^{-1} = 1 + Ur_0rV .$$

Легко проверить, что

$$t_{ij}(r_0r)^g(1 - Ur_0W) = \\ (1 + Ur_0rV)(1 - Ur_0W) = 1 + Ur_0(rV - W) = 1 + Ur_0V_0.$$

Предположим, что $1 + Ur_0V_0 \in GL(n,R)$. Тогда $1 - Ur_0W \in GL(n,R)$ и

$$t_{ij}(r_0r)^g = (1 + Ur_0V_0)(1 - Ur_0W)^{-1}$$

и, в частности, $t_{ij}(r)^g = (1 + UV_0)(1 - UW)^{-1}$.

Полученное представление матрицы $t_{ij}(r)^g$ удобнее тем, что i-ые строки каждой из матриц V_0 и W содержат хотя бы один нулевой элемент. Это в конечном счете позволит воспользоваться леммой 6 и разложить в произведение трансвекций и диагональных элементов соответствующие коммутаторы.

Для $g' \in GL(n,R)$ аналогичным образом определим $U' = g'e_{ii}$, $V' = e_{ij}(g')^{-1}$, $V_0' = x_1'e_{i1} + \ldots + x_n'e_{in}$, $\alpha' = x_1'g_{1i}' + \ldots + x_n'g_{ni}'$, где $x_1', \ldots, x_n' \in R$, $x_l' = 0$ и $x_k' = r(g')_{jk}^{-1}$ для соответствующих $1 \leq i, j, l, k \leq n$ и $r_0, r \in R$. Пусть $W' = rV' - V_0'$ и $1 + U'r_0V_0' \in GL(n,R)$. Тогда

$$t_{ij}(r_0r)^{g'} = (1 + U'r_0V_0')(1 - U'r_0W')^{-1} .$$

Имеет место

Лемма 7. (основная) *Пусть I и J – идеалы R, $c \in \xi R$, $r \in R$, $1 + V_0c^2U \in GL(n,R)$, $1 + (V_0 - x_ke_{ik})c^2U \in GL(n,R)$, $1 + V_0'c^2U' \in GL(n,R)$, $1 + (V_0' - x_k'e_{ik})c^2U' \in GL(n,R)$, $h \in C_I$, $g' = gh^{-1}$, $x_s - x_s' \in I$, $1 \leq s \leq n$ (для $s = l, k$ выполняется автоматически ввиду $x_l = x_l' = 0$, $x_k = rg_{jk}^{-1}$, $x_k' = r\left(g_{jk}'\right)^{-1}$). Тогда*

1) $[h, t_{ij}(c^2r)]^{g'} \subseteq E(n, cI) \bigcap E(n,J)$, если $r \in J$;

2) $g \in C(n, AnnRc^2rR)$, если $g \in N$.

Доказательство. Положим $u_s = g_{si}$, $d_s = 1 + \alpha c^2e_{ss}$, где $1 \leq s \leq n$. Поскольку $V_0U = \alpha e_{ii}$ и за условием $1 + \alpha c^2e_{ii} = 1 + V_0c^2U \in GL(n,R)$, то $1 + \alpha c^2 \in R^*$ и

$$d_s = diag\left(1, \ldots, \underbrace{1 + \alpha c^2}_{s\text{−тое место}}, 1, \ldots, 1\right) \in GL(n,R) .$$

В частности , $d_i = 1 + V_0c^2U$.

Аналогично определяются $u_s' = g_{si}'$, $d_s' = 1 + \alpha'c^2e_{ss}$, $1 + \alpha'c^2 \in R^*$, $d_s' \in GL(n,R)$, $d_i' = 1 + V_0'c^2U'$.

Рассмотрим матрицы $a = (Ue_{il} - u_le_{ll})c$ и $b = e_{li}V_0c$. Очевидно, что

$$a = \begin{pmatrix} & u_1 & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & u_{l-1} & \\ 0 & 0 & 0 \\ & u_{l+1} & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & u_n & \end{pmatrix} c \text{ и } b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_1 \cdots x_{l-1} & 0 & x_{l+1} \cdots x_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c$$

Нетрудно видеть, что $aRa = bRb = e_{ll}Ra = bRe_{ll} = 0$. Из определения матриц a и b следует, что

$$a + u_l e_{ll} c = U e_{il} c \ , \ e_{il} b = V_0 c \ , \ e_{ll} b = b \ , \ b e_{ll} = 0 \ , \ b d_l = b \ .$$

Кроме этого, ab – матрица, у которой l-ая строка и l-ый столбец являются нулевыми, $ba = \alpha c^2 e_{ll}$, $1 + ba = 1 + \alpha c^2 e_{ll} = d_l \in GL(n, R)$.

В соответствии с леммой 6 $1 + ab \in GL(n, R)$ и

$$1 + ab = (1 + b(1 - \gamma))[1 - b, 1 + a](1 + (1 - \gamma)a)(1 + ba) \ , \text{ где } \gamma = (1 + ab)^{-1} .$$

Очевидно, что $1 - \gamma$ – матрица, у которой l-ая строка и l-ый столбец являются нулевыми и матрицы $1 \pm a$, $1 \pm b$, $1 + d_l u_l cb$, $1 + (1 - \gamma)a$, $1 + b(1 - \gamma)$ являются произведением трансвекций.

Рассмотрим равенство

$$1 + Uc^2 V_0 = 1 + Uce_{il} b = 1 + (a + u_l e_{ll} c) b = (1 + ab)(1 + u_l cb)$$

а также равенство

$$(1 + ba)(1 + u_l cb) = d_l (1 + u_l cb) = (1 + d_l u_l cb) d_l .$$

Введем обозначение

$$T_l(V_0) = (1 + b(1 - \gamma))[1 - b, 1 + a](1 + (1 - \gamma)a)(1 + d_l u_l cb) .$$

Понятно, что $T_l(V_0)$ – произведение трансвекций, которые содержатся в группе E_{cR} и

$$\begin{aligned} 1 + Uc^2 V_0 &= (1 + ab)(1 + u_l cb) = \\ &= (1 + b(1 - \gamma))[1 - b, 1 + a](1 + (1 - \gamma)a)(1 + ba)(1 + u_l cb) = T_l(V_0) d_l . \end{aligned}$$

Подчеркнем, что конструкция разложения матриц $1 + Uc^2 V_0$ в произведение трансвекций и диагональных элементов имеет место для произвольного столбца $U = (u_1 \dots u_n)^T$ и произвольной строки $V_0 = (x_1 \dots x_n)$ для которых $x_l = 0$ и $1 + V_0 U c^2 \in R^*$. Ее вид определяется формулой леммы 6.

Поэтому $1 - Uc^2 W = T_k(-W) d_k \in GL(n, R)$. Поскольку $t_{ij}(rc^2)^g = (1 + Uc^2 V_0)(1 - Uc^2 W)^{-1}$, то

$$t_{ij}(rc^2)^g = T(g) d_l d_k^{-1}, \text{ где } T(g) = T_l(V_0)(T_k(-W)^{-1})^{d_l d_k^{-1}} .$$

С учетом аналогичных соображений, имеем,

$$t_{ij}(rc^2)^{g'} = T(g') d'_l (d'_k)^{-1} ,$$

где $T(g')$ – точно такое же произведение трансвекций по модулю идеала cI , как и $T(g)$. Следовательно,

$$\left[h, t_{ij}(rc^2)\right]^{g'} = t_{ij}(rc^2)^g t_{ij}(-rc^2)^{g'} = T(g) d_l d_k^{-1} d'_k (d'_l)^{-1} T(g')^{-1} .$$

Нетрудно видеть, что в случае $x \in R^*$ имеет место формула

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В частности, если I – идеал кольца R и $x \in 1 + cI$, то матрица

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-x^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1-x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right]\right)^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

содержиться в $E(2, cI)$.

Если $1+\alpha' c \in R^*$ и $\alpha - \alpha' \in I$, то $(1+\alpha c)\,(1+\alpha' c)^{-1} \in 1+cI$. Поэтому

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha c & 0 \\ 0 & (1+\alpha c)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\alpha' c & 0 \\ 0 & (1+\alpha' c)^{-1} \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} (1+\alpha c)\,(1+\alpha' c)^{-1} & 0 \\ 0 & (1+\alpha c)^{-1}\,(1+\alpha' c) \end{pmatrix} \in E\,(2, cI)$$

Это означает, что $d_l d_k^{-1} d_k' \,(d_l')^{-1} \in E\,(n, c^2 I)$.

Учитывая, что для произвольных трансвекций τ_1 и τ_2 из E_{cR} таких, что $\tau_1 \equiv \tau_2 mod E_{cI}$, имеют место включения

$$\tau_1 E\,(n, cI)\,\tau_2^{-1} \subseteq E\,(n, cI)$$

получаем, что

$$T\,(g)\,E\,(n, cI)\,T\,(g')^{-1} \subseteq E\,(n, cI)$$

Тем самым доказано, что

$$\left[h, t_{ij}\left(rc^2\right)\right]^{g'} \subseteq T\,(g)\,E\,(n, cI)\,T\,(g')^{-1} \subseteq E\,(n, cI)\,.$$

Пусть J– идеал R, $r \in J$. Тогда $V_0 + W = rV$ – матрица над J и $x_k \in J$.

Докажем, что $t_{ij}\,(r)^g \in E\,(n, J)$.

Как и выше,

$$t_{ij}\left(rc^2\right)^g = \left(1 + Uc^2 V_0\right)\left(1 - Uc^2 W\right)^{-1} = T\,(g)\,d_l d_k^{-1}$$

является произведением трансвекций и диагональных элементов, которые, как известно, нормализируют группу $E(n, I)$.

Рассмотрим $V_0^* = V_0 - x_k e_{ik}$. Поскольку $x_l = 0$, то $(V_0^*)_{il} = (V_0)_{il} - (x_k e_{ik})_{il} = x_l - \delta_{kl} x_k = 0$. Понятно, что $(V_0^*)_{ik} = W_{ik} = 0$ и $V_0^* + W$ – также матрица над J.

По условию $1 + V_0^* c^2 U \in GL\,(n, R)$.

Отметим, что в случае $1 + J \subseteq R^*$ из равенства $V_0 U = V_0^* U + x_k e_{ll} U$ и включения $1 + V_0 c^2 U \in GL(n, R)$ следует, что $1 + V_0^* c^2 U \in GL\,(n, R)$ автоматически.

Как было показано выше матрицы $1 + Uc^2 V_0$ и $1 + Uc^2 V_0^*$, $1 + Uc^2 V_0^*$ и $1 - Uc^2 W$ разлагаются в соответственно одинаковые конструкции произведений трансвекций и диагональных елементов. Учитывая, что $V_0 \equiv V_0^* mod J$ и $V_0^* \equiv -W mod J$ получаем сравнения

$$1 + Uc^2 V_0 \equiv (1 + Uc^2 V_0^*)\, mod E\,(n, J)\ ,\ 1 + Uc^2 V_0^* \equiv (1 - Uc^2 W)\, mod E\,(n, J)\,.$$

Тем самым доказано, что

$$t_{ij}\,(rc^2)^g \in E\,(n, J)\ \text{, если } 1 + V_0 c^2 U \in GL\,(n, R) \text{ и}$$
$$1 + (V_0 - x_k e_{ik})\,c^2 U \in GL(n, R).$$

Аналогично доказывается, что

$$t_{ij}\,(rc^2)^{g'} \in E\,(n, J)\ \text{, если } 1 + V_0' c^2 U' \in GL\,(n, R) \text{ и}$$
$$1 + (V_0' - x_k' e_{ik})\,c^2 U' \in GL(n, R).$$

В итоге доказано, что

$$[h, t_{ij}\,(rc^2)]^{g'} = t_{ij}\,(c^2 r)^g\, t_{ij}\,(-c^2 r)^{g'} \subseteq E\,(n, J)\,\text{, если}$$

$$1+V_0c^2U,\ 1+(V_0-x_ke_{ik})\,c^2U,\ 1+(V_0'-x_k'e_{ik})\,c^2U',\ 1+V_0'c^2U'$$
содержатся в $GL\,(n,R)$.

Этим завершается доказательство 1).

Отметим, что если в 1) элемент g' нормализирует группы $E\,(n,cI)$ и $E\,(n,J)$, то
$$\left[h,t_{ij}\left(c^2r\right)\right]\subseteq E\,(n,cI)\bigcap E\,(n,J)\ .$$
Докажем 2).

Введем обозначения
$$A=1+Uc^2V_0\ ,\ B=(1-Uc^2W)^{-1}\ ,\ C=t_{ij}\,(-c^2r)\ .$$
В этих обозначениях
$$\left[g,t_{ij}\left(c^2r\right)\right]=t_{ij}\left(c^2r\right)^g t_{ij}\left(-c^2r\right)=A\,(BC)$$
$$\text{и}\left[t_{ij}\left(-c^2r\right),g\right]=t_{ij}\left(-c^2r\right)t_{ij}\left(c^2r\right)^g=(CA)\,B.$$

Очевидно, что l-ый столбец матрицы Uc^2V_0 и k-ый столбец матрицы Uc^2W нулевые.

Предположим, что равенство $k=j=l$ не выполняется. Тогда $j\neq k$ или $j\neq l$.

Если $j\neq k$, то k-ый столбец матрицы $BC-E$ нулевой. Поэтому коммутатор $[g,t_{ij}\,(c^2r)]$ является произведением двух матриц A и BC, которые удовлетворяют условие леммы 5. В таком случае $[g,t_{ij}\,(c^2r)]\in\xi GL\,(n,R)$ и $g\in C\,(n,AnnRc^2rR)$.

Аналогично, если $j\neq l$, то коммутатор $[t_{ij}(-c^2r),g]$ является произведением двух матриц CA и B и l-ый столбец матрицы $CA-E$ является нулевым. В соответствии с леммой 5 $[t_{ij}\,(-c^2r)\,,g]\in\xi GL\,(n,R)$ и $g\in C\,(n,AnnRc^2rR)$.

Следовательно, осталось рассмотреть случай $k=j=l$. Тогда $0=x_k=r\,(g^{-1})_{jj}$. Поскольку, согласно лемме 3, диагональные элементы матрицы $g\in N$ не являются делителями нуля, то $r=0$, $AnnRc^2rR=Ann0=R$, $g\in GL\,(n,R)\equiv C\,(n,R)\equiv C\,(n,AnnRc^2rR)$.

В итоге 2) доказано.

Отметим, что включения леммы 6 имеют вид $f\,(c)=0$, где f - многочлен из коэффициентами кольца R_n и $c\in\xi R$. В частности, если включения леммы 6 имеют место для всех $c{\in}\xi R$, то элементы ξR являются корнями многочлена f.

Пусть $V_0=x_1e_{i1}+\cdots+x_ne_{in}$, где $x_l=0$, $x_k=r\,(g^{-1})_{jk}$, $1+V_0U\in GL\,(n,R)$, $U=ge_{ii}$, $g\in GL\,(n,R)$. Элементы типа V_0 определены матрицей g неоднозначно . Они образуют целый класс матриц и элементы $r\in R$ выступают в них левыми коэффициентами при $(g^{-1})_{jk}\,e_{ik}$.

Обозначим через $R\,(g)$ – аддитивную подгруппу кольца R, порожденную всеми элементами $r\in R$, которые выступают левыми коэффициентами слагаемых $(g^{-1})_{jk}\,e_{ik}$ матриц $V_0=x_1e_{i1}+\cdots+x_ne_{in}$, где $x_l=0$, $x_k=r\,(g^{-1})_{jk}$, $1+V_0U\in GL\,(n,R)$, $1+(V_0-x_ke_{ik})U\in GL(n,R)$ некоторой фиксированной матрицы $g\in GL\,(n,R)$ и всех возможных матриц V_0 и $1\leq k,l\leq n$.

Определение 6. *Элемент $g\in GL\,(n,R)$ при фиксированных $1\leq i\neq j\leq n$ называется (R,i,j) -стабильным, если $R\,(g)=R$.*

В частности, если среди $V_0=x_1e_{i1}+\cdots+x_ne_{in}$ встречаются такие, что $x_l=0$, $x_k=r\,(g^{-1})_{jk}$, $V_0U\in J\,(R)\,e_{ii}$, $x_kg_{ki}\in J(R)$, то $RV_0U\in J\,(R)\,e_{ii}$, $1+RV_0U\subseteq$

$1 + J(R)\, e_{ii} \subseteq GL(n,R)$, $1 + R(V_0 - x_k e_{ik})U \in GL(n,R)$ и, следовательно, $R(g)$ содержит левый идеал Rr. Если при этом $r \in R^*$, то $R(g) = R$ и g является (R,i,j) -стабильным элементом.

Поэтому матрица $g \in GL(n,R)$, для которой имеет место включение ,

$$\left(g^{-1}\right)_{jk} g_{ki} \in J(R)$$

является (R,i,j) -стабильной. Для этого достаточно выбрать $V_0 \in R\left(g^{-1}\right)_{jk} e_{ik}$ и воспользоваться включением $1 + V_0 U \subseteq GL(n,R)$.

Определение 7. *Элемент $g \in GL(n,R)$, который является (R,i,j) - стабильным элементом для всех $1 \leq i \neq j \leq n$ таких, что $E(n,R) = \langle t_{ij}(R) \rangle$ называется R-стабильным.*

Примером R-стабильного элемента является матрица g, у которой $g_{ij} = g_{ji} = 0$ для всех $1 \leq i \neq j \leq n$, где j - фиксированный элемент. Ведь в этом случае g является (R,i,j) -стабильным и (R,j,i) -стабильным элементом.

Поскольку $E(n,R) = \langle t_{ij}(R), t_{ji}(R) \mid 1 \leq i \neq j \leq n,\ j -$ фиксированный элемент$\rangle$, то g является R-стабильным элементом.

Нетрудно видеть, что (R,i,j) -стабильность и, как следствие, R-стабильность матриц сохраняется при факторизациях кольца R.

Пусть I – произвольный идеал кольца R, а N – инвариантная относительно $E(n,R)$ подгруппа $GL(n,R)$, которая не содержит неединичных трансвекций.

Определение 8. *Элемент $g \in GL(n,R)$, для которого из $g \in C_I$ следует, что $[g, E(n,J)] \subseteq E(n,I) \bigcap E(n,J)$, а из $g \in N$, следует, что $g \in \xi GL(n,R)$ называется стабильным.*

Например, как будет показано ниже, элементы группы $C(n, J(R))$ являются стабильными.

Определение 9. *Будем говорить, что класс обратимых матриц L_g, содержащий единицу, с точностью до трансвекций, апроксимирует элемент $g \in GL(n,R)$, если для $g \in C_I$ существует элемент $g_I \in L_g$ такой, что $g_I \in E(n,I)\, g^{E(n,R)} E(n,I)$, а для $g \in N$ существует элемент $g_N \in L_g$ такой, что $g_N \in [g, t_{ij}(R^*)]^{E(n,R)}$ для некоторых $1 \leq i \neq j \leq n$.*

Лемма 8. *Из стабильности элементов L_g следует стабильность элемента g.*

Доказательство. Если $g \in C_I$, то существует стабильный элемент $g_I \in E(n,I)\, g^{E(n,R)} E(n,I) \subseteq C_I$. Из стабильности элемента g_I следует, что имеют место включения

$$[g_I, E(n,J)] \subseteq E(n,I) \bigcap E(n,J) \text{ и } [g, E(n,J)] \subseteq E(n,I) \bigcap E(n,J)$$

для всех идеалов I, J кольца R.

Аналогично, если $g \in N$, то существует стабильный элемент g_N такой, что $g_N \in [g, t_{ij}(R^*)]^{E(n,R)} \subseteq N$. Из стабильности элемента g_N следует, что $g_N \in \xi GL(n,R)$. Поэтому существует элемент $r \in R^*$ такой, что $[g, t_{ij}(r)] \in \xi GL(n,R)$. В соответствии со следствием 3, получаем, что $g \in C(n, AnnRrR) = C(n, AnnR) = \xi GL(n,R)$.

Теорема 1. *Пусть R - ассоциативное кольцо с 1. Элементы группы $GL(n, R)$, которые, с точностью до трансвекций, аппроксимируются классом R-стабильных матриц, являются стабильными. Если, с точностью до трансве-*

кций, все элементы группы $GL(n,R)$ аппроксимируются классами R-стабильных матриц, то R - стабильное кольцо.

Доказательство. В соответствии с леммой 8 достаточно доказать, что R-стабильные элементы являются стабильными.

Пусть $g \in GL(n,R)$ является R-стабильным элементом. Тогда g является (R,i,j) -стабильным элементом для всех пар $1 \le i \ne j \le n$ таких, что $E(n,R) = \langle t_{ij}(R)\rangle$. Зафиксируем одну из таких пар $1 \le i \ne j \le n$. Тогда аддитивная группа

$$R(g) = \langle r\,|1{+}V_0U \in GL(n,R), 1 + (V_0 - x_k e_{ik})U \in GL(n,R),$$
$$V_0{=}x_1e_{i1}{+}\dots{+}x_ne_{in}, x_l{=}0, x_k{=}r\left(g^{-1}\right)_{jk}\Big\rangle_Z = R.$$

В соответствии с этим $1+\alpha \in R^*$ и $1+\alpha - x_k g_{ki} \in R^*$.

Пусть I, J - идеалы R, $g \in C_I$, $r \in J$, $U = ge_{ii}$, $V = e_{ij}g^{-1}$, $\alpha e_{ii} = V_0U$. Очевидно, что $x_i - \alpha \in I$. Воспользуемся леммой 7.

В случае, когда не выполняется равенство $l = k = j$, положим $c = 1$, $g' = 1$, $x'_i = (1-\delta_{ik})(1-\delta_{il})\alpha$, где $x'_k = r\delta_{jk}$, $x'_s = x_s$ для всех $1 \le s \ne i,k \le n$.

Тогда $x'_l = 0$. Это очевидно, если $l \ne i,k$ или $l = i$. Если $l = k$, то $x'_l = x'_k = r\delta_{jl} = 0$ при $l = k \ne j$. Кроме этого, $x'_t - x_t \in I$ для всех $1 \le t \ne i \le n$, $x'_i - x_i = \alpha - x_i - \delta_{il}\alpha \in I$. Поскольку $U' = e_{ii}$, то

$$V'_0U' = x'_ie_{ii},\ (V'_0 - x'_ke_{ik})U' = V'_0U' - r\delta_{jk}e_{ik}e_{ii} = V'_0U' - r\delta_{jk}\delta_{ik} = V'_0U',$$

и $1 + (V'_0 - x'_ke_{ik})U' = 1 + V'_0U' = 1 + x'_ie_{ii} \in R^*$, так как $x'_i = 0$ или $x'_i = \alpha$.

В соответствии с леммой 7,

$$[g, t_{ij}(r)] \subseteq E(n,I) \bigcap E(n,J)$$

и, как следствие,

$$[g, t_{ij}(R(g))] \subseteq E(n,I) \bigcap E(n,J)\,.$$

Если $l = k = j$, то $0 = x_l = x_k = r\,(g^{-1})_{jk} = r\,(g^{-1})_{jj}$ и, как следствие, $r \in I$. Нетрудно видеть, что $V_0 = rV$ удовлетворяет все условия, определяемые аддитивной группой $R(g)$. Напомним, что в лемме 6

$$a = Ue_{il} - U_le_{ll}\ ,\ b = e_{li}V_0 = re_{li}V\ .$$

Учитывая, что $VU = 0$ и $\alpha e_{ii} = V_0U$, получаем равенства $\alpha = 0$,

$$ba = -re_{li}Vu_le_{ll} = -re_{jj}Vu_le_{jj} = -r\left(g^{-1}\right)_{jj}u_le_{jj} = 0\ .$$

Следовательно $\gamma = (1+ab)^{-1} = 1 - ab$, $(1-\gamma)\,a = b\,(1-\gamma) = 0$, $d_l = d_k = 1$,

$$t_{ij}(r)^g = T(g) = [1-b, 1+a]\,(1+u_lb)\ .$$

Если $r \in I \bigcap J$ то матрицы $1-b$, $1+u_lb$ содержатся в группе $E(n,I) \bigcap E(n,J)$.

Поэтому, и в случае $l = k = j$, имеют место включения

$$[g, t_{ij}(r)] \subseteq E(n,I) \bigcap E(n,J)\,.$$

Тем самым доказано, что во всех случаях

$$[g, t_{ij}(J \bigcap R(g))] \subseteq E(n,I) \bigcap E(n,J)\ .$$

Из (R,i,j) -стабильности элемента g выплывает, что

$$[g, t_{ij}(J)] \subseteq E(n,I) \bigcap E(n,J) \text{ и } [g, t_{ij}(R)] \subseteq E(n,I)\ .$$

Поэтому из R-стабильности элемента g следует включение

$$[g, E(n,R)] \subseteq E(n,I)$$

Учитывая, что

$$E(n,J)=\left\langle t_{ij}(J)^{E(n,R)}\right\rangle \text{ и } [E(n,I),E(n,J)]\subseteq E(n,I)\bigcap E(n,J)$$
получаем искомое включение
$$[g,E(n,J)]\subseteq E(n,I)\bigcap E(n,J)\ .$$
Пусть N - группа, которая инвариантная относительно $E(n,R)$ и не содержит неединичных трансвекций. Если $g\in N$, то, в соответствие с леммой 7, $g\in C(n,AnnRrR)$ для всех порождающих r аддитивной группы $R(g)=R$. Поэтому $g\in C(n,AnnR)=\xi GL(n,R)$. Тем самым доказано, что из R-стабильности элементов группы $GL(n,R)$ следует их стабильность.

Если все элементы группы $GL(n,R)$, с точностью до трансвекций, аппроксимируются классом стабильных матриц, то
$$[C(n,I),E(n,R),E(n,J)]\subseteq E(n,I)\bigcap E(n,J) \text{ и } N\in\xi GL(n,R)\ .$$
Если положить $J=R$, то получаем, что R - слабо-коммутаторное кольцо. Кроме этого R является частично-нормальным кольцом. Поскольку R-стабильность сохраняется при факторизациях, то все фактор-кольца R также являются частично-нормальными кольцами. В соответствии с леммой 2 R - стабильное кольцо.

Из теоремы 1 вытекает, что коммутативные кольца с 1 являются стабильными [9, 10, 18].

Действительно, пусть R - коммутативное кольцо с 1, $g\in GL(n,R)$. Для произвольных $1\le i\ne j\le n$ положим
$$V_0=\left(g^{-1}\right)_{jk}(g_{ti}e_{ik}-g_{ki}e_{it})=g_{ti}\left(g^{-1}\right)_{jk}e_{ik}-g_{ni}\left(g^{-1}\right)_{jk}e_{it}\ ,$$
где $1\le k\ne t\le n$.

Тогда $V_0U=0$ и $Rg_{ti}\subseteq R(g)$.

Меняя k и t получаем, что $R(g)=R$. Это означает, что все элементы группы $GL(n,R)$ являются (R,i,j) -стабильными и, как следствие, R-стабильными. В соответствии с теоремой 1 R является стабильным кольцом.

Теорема 2. *Пусть R - ассоциативное кольцо с 1, $g\in GL(n,R)$ и хотя бы один элемент матрицы g принадлежит радикалу $J(R)$. Тогда g является стабильным элементом.*

Доказательство. Пусть $g=(g_{ij})\in GL(n,R)$ и $g_{ij}\in J(R)$. Введем обозначения $g_1=e_1ege_2$, где
$$e=t_{i1}\left(\left(g^{-1}\right)_{j1}\right)\cdots t_{in}\left(\left(g^{-1}\right)_{jn}\right),\ \alpha=-\left(1+g_{ij}-(g^{-1})_{ji}g_{ij}\right)^{-1},$$
$$e_1=t_{1i}\left(g_{1j}\alpha\right)\cdots t_{ni}\left(g_{nj}\alpha\right)\ ,$$
$$e_2=t_{j1}\left(\alpha\left(1-(g^{-1})_{ji}\right)g_{i1}\right)\cdots t_{jn}\left(\alpha\left(1-(g^{-1})_{ji}\right)g_{in}\right).$$
Нетрудно видеть, что
$$(g_1)_{il}=(g_1)_{sj}=0 \text{ для всех } 1\le l\ne j\le n\ ,\ 1\le s\ne i\le n\ .$$
Пусть I идеал R, $g\in C_I$.

Если $i=j$, то e,e_1,e_2 содержатся в E_I , $g_1\in C_I$ и g_1 удовлетворяет условие R-стабильности.

Если $i\ne j$, то существует $e_0=t_{ji}(1)\,t_{ij}(-1)\,t_{ji}(1)$, что $e_0e_1ee_2\in E(n,I)$, $e_0g_1\in C_I$ и удовлетворяет условие R-стабильности.

Тем самым доказано, что $g\in C_I$ и, с точностью до трансвекций, аппроксимируется R-стабильными матрицами. Поэтому g удовлетворяет условие R-стабильности.

Если $g\in N$, то $1+g_{ki}^{-1}g_{ij}\in R^*$ и, в соответствии с леммой 7, $g\in C(n,AnnR)=$

$\xi GL\left(n,R\right)$.

Тем самым доказано, что g - стабильный элемент.

В частности, имеют место включения

$$\left[C\left(n,J\left(R\right)\right)\bigcap C\left(n,I\right),E\left(n,J\right)\right]\subseteq E\left(n,I\right)\bigcap E\left(n,J\right),$$
$$N\bigcap C\left(n,J\left(R\right)\right)\subseteq \xi GL\left(n,R\right).$$

Если положить $I=R$, то $\left[C\left(n,J\left(R\right)\right),E\left(n,J\right)\right]\subseteq E\left(n,J\right)$.

Лемма 9. *Пусть R - ассоциативное кольцо с 1, $J\left(R\right)$ - радикал , ${}^{R}/_{J\,(R)}$ - частично-нормальное кольцо. Тогда R - частично-нормальное кольцо.*

Доказательство. Пусть N - подгруппа группы $GL\left(n,R\right)$, которая инвариантная относительно $E\left(n,R\right)$ и не содержит нееденичных трансвекций. Если $\Lambda_{J(R)}N$ содержит нееденичную трансвекцию $\Lambda_{J(R)}t_{ij}\left(r\right)$, $r\notin J\left(R\right)$, то $t_{ij}\left(r\right)\in hC_{J(R)}$, где $h\in N$. Поэтому $h\in t_{ij}\left(r\right)C_{J(R)}$ и хотя бы один элемент матрицы h содержится в $J\left(R\right)$. Согласно теореме 2, $h\in\xi GL\left(n,R\right)$ и $r\in J\left(R\right)$, что противоречит предположению. Поэтому группа $\Lambda_{J(R)}N$ не содержит нееденичных трансвекций. Поскольку ${}^{R}/_{J\,(R)}$ - частично-нормальное кольцо, то $\Lambda_{J(R)}N\in\xi GL\left(n,{}^{R}/_{J\,(R)}\right)$. Это означает, что $N\subseteq C\left(n,J\left(R\right)\right)$. Согласно теореме 1, $N\subseteq\xi GL\left(n,R\right)$. Тем самым доказано, что R - частично-нормальное кольцо.

Лемма 10. *Пусть R - ассоциативное кольцо с 1, $J\left(R\right)$- радикал, ${}^{R}/_{J\,(R)}$ - нормальное кольцо. Тогда все фактор-кольца кольца R являются частично-нормальными кольцами.*

Доказательство. Пусть $\overline{R}$ - некоторое фактор-кольцо кольца R. Поскольку при эпиморфизме колец прообразы максимальных одностороних идеалов являються максимальными односторонними идеалами, то $\overline{J\left(R\right)}\subseteq J\left(\overline{R}\right)$. Поэтому эпиморфизм колец $R\rightarrow\overline{R}\rightarrow{}^{\overline{R}}/_{J\,\left(\overline{R}\right)}$ индуцирует епиморфизм ${}^{R}/_{J\,(R)}\rightarrow{}^{\overline{R}}/_{J\,\left(\overline{R}\right)}$ и, как следствие, ${}^{\overline{R}}/_{J\,\left(\overline{R}\right)}$ является фактор-кольцом нормального кольца ${}^{R}/_{J\,(R)}$. Поскольку все факторы нормального кольца являются частично-нормальными кольцами, то ${}^{\overline{R}}/_{J\,\left(\overline{R}\right)}$ - частично-нормальное кольцо. Ввиду леммы 9 $\overline{R}$ является частично-нормальным кольцом.

Из теоремы 1 выплывает

Следствие 5. *[19] Пусть R - ассоциативное кольцо с 1, $J\left(R\right)$ - радикал, ${}^{R}/_{J\,(R)}$ - стабильное кольцо. Тогда R - стабильное кольцо.*

Доказательство. Поскольку ${}^{R}/_{J\,(R)}$ - стабильное кольцо, то ${}^{R}/_{J\,(R)}$ - коммутаторное и нормальное кольцо.

Из коммутаторности кольца ${}^{R}/_{J\,(R)}$ следует, что для произвольных идеалов I и Jкольца R имеют место включения

$$\left[C\left(n,I\right),E\left(n,J\right)\right]\subseteq\left(E\left(n,I\right)\bigcap E\left(n,J\right)\right)C_{I\bigcap J(R)}.$$

Согласно теореме 2

$$\left[C_{I\bigcap J(R)},E\left(n,J\right)\right]\subseteq E\left(n,I\right)\bigcap E\left(n,J\right).$$

Поэтому

$$[C(n,I), E(n,J), E(n,J)] \subseteq \left[\left(E(n,I) \bigcap E(n,J)\right) C_{I \bigcap J(R)}, E(n,J)\right] \subseteq E(n,I) \bigcap E(n,J).$$

В частности, если $J = R$, то

$$[C(n,I), E(n,R), E(n,R)] \subseteq E(n,R).$$

Это означает, что R - слабо-коммутаторное кольцо.

Поскольку ${}^{R}/_{J(R)}$ - нормальное кольцо, то ввиду леммы 9 все фактор-кольца кольца R являются частично-нормальными.

Согласно лемме 2 слабо-коммутаторные кольца, все факторы которых - частично-нормальные кольца, являются стабильными.

Определение 10. *Вектор $(r_1, \ldots, r_n)$ называется унимодулярным в R^n , если в кольце R существуют элементы $t_1, \ldots, t_n$ такие, что $t_1 r_1 + \cdots + t_n r_n = 1$.*

Очевидно, что в случае $n = 1$ унимодулярные векторы - это обратимые слева элементы кольца R.

Определение 11. *Пусть $n \geq 2$. Ассоциативное кольцо R удовлетворяет условие стабильности ранга $n-1$, если для произвольного унимодулярного вектора $(r_1, \ldots, r_n)$ в R существуют элементы $s_2, \ldots, s_n$ такие, что вектор $(r_2 + s_2 r_1, \ldots, r_n + s_n r_1)$ является унимодулярным в R^{n-1} .*

Известно [20], что если R удовлетворяет условие стабильности ранга $m-1$, то R удовлетворяет условие стабильности ранга $n-1$ для всех $n \geq m$.

Классическим примером кольца, которое удовлетворяет условие стабильности ранга 1 является полулокальное кольцо.

Определение 12. *Ассоциативное кольцо R с 1 называется полулокальным, если ${}^{R}/_{J(R)}$ является прямой суммой полных матричных колец над телами.*

Докажем, что полулокальные кольца удовлетворяют условие стабильности ранга 1. Для этого достаточно найти элемент $s \in R$ такой, что $e + sr \in R^*$, если (r, e) - унимодулярный элемент.

Без ограничения общности можно считать, что R - кольцо матриц над некоторым телом и $e = e^2$ - его идемпотент. Ведь элементарными преобразованиями произвольная матрица в кольце матриц над телом приводится к идемпотенту вида $diag(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$.

Следовательно $1 = \alpha r + \beta e$, где α и β - некоторые элементы кольца R. Поскольку $(1-e)\beta e$ - нильпотентный элемент, то положив $s = (1-e)\alpha$ получаем, что $e + sr = e + (1-e)\alpha r = e + (1-e)(1-\beta e) = 1 - (1-e)\beta e \in R^*$.

Ассоциативные кольца с 1, которые удовлетворяют условие стабильности ранга $n - 1 > 1$, стабильные [21].

Действительно, пусть $g \in GL(n,R)$. Вектор $(g_{1n}, g_{2n}, \ldots, g_{nn})$ очевидным образом является унимодулярным. Поэтому существуют элементы $k_2, \ldots, k_n$ такие, что $(g_{2n} + k_2 g_{1n}, \ldots, g_{nn} + k_n g_{1n})$ тоже является унимодулярным вектором. Поэтому в $g_{1n}R$ существуют элементы $s_2, \ldots, s_n$ такие, что

$$g_{1n} + s_2 (g_{2n} + k_2 g_{1n}) + \cdots + s_n (g_{nn} + k_n g_{1n}) = 0.$$

Пусть $e_1 = t_{21}(k_2) \cdots t_{n1}(k_n)$, $e_2 = t_{12}(s_2) \cdots t_{1n}(s_n)$, $g_1 = e_2 g^{e_1}$, $g_2 = [g^{e_1}, t_{n2}(1)]^{e_2} = t_{n2}(1)^{g_1} t_{n2}(-1)^{e_2}$.

Тогда $(g_1)_{1n} = (g_2)_{1n} = 0$. По теореме 2 элементы g_1 и g_2 являются стабильными. Очевидно, что $e_2 \in E_I$, если $g \in C_I$ и $g_2 \in N$, если $g \in N$. Поскольку элементы g_1 и g_2, с точностью до трансвекций, аппроксимируют матрицу g, то согласно лемме 8, g - стабильный элемент. Тем самым доказано, что R - стабильное кольцо.

Нам понадобится полезная

Лемма 11. *Пусть R - ассоциативное кольцо с 1, I, J- идеалы кольца R, N - инвариантная относительно $E(n,R)$ подгруппа $GL(n,R)$, которая не содержит неединичных трансвекций, $g \in GL(n,R)$ и существует элемент $e \in R$ такой, что $e^2 - e \in J(R)$, $g_{jk} \in eR$, $e \in g_{jk}R$ для некоторых $1 \leq k, j \leq n$. Тогда $[g^{-1}, t_{ij}(J)] \subseteq E(n,I) \bigcap E(n,J)$, если $g \in C_I$, $1 \leq i \neq k, j \leq n$ и $g \in \xi GL(n,R)$, если $g \in N$ и $j = k$.*

Доказательство. Пусть $e = g_{jk} r$, $g_e = t_{ki}(r g_{ji}) g^{-1}$, где $r \in R$, $1 \leq i \neq k, j \leq n$. Нетрудно видеть, что $g_e^{-1} = g t_{ki}(-r g_{ji})$ и

$$(g_e^{-1})_{jk} = g_{jk} \in eR, \quad (g_e^{-1})_{ji} = g_{ji} - g_{jk} r g_{ji} = (1 - g_{jk} r) g_{ji} \in (1-e) R .$$

Поскольку

$$(1-e)(g_e^{-1})_{jk} (g_e)_{ki} \in J(R) \text{ и } e (g_e^{-1})_{ji} (g_e)_{ii} \in J(R) \text{, то}$$

$$R(1-e) \subseteq R(g_e) \text{ и } Re \subseteq R(g_e) .$$

Поэтому $R \subseteq Re + R(1-e) \subseteq R(g_e) \subseteq R$. Следовательно, $R(g_e) = R$ и g_e является (R, i, j) -стабильным элементом для всех $1 \leq i \neq k, j \leq n$.

Если $g \in C_I$, то $g_{ji} \in I$, $g_e \in C_I$, $[g_e, t_{ij}(J)] \subseteq E(n,I) \bigcap E(n,J)$ и, как следствие,

$$[g^{-1}, t_{ij}(J)] \subseteq E(n,I) \bigcap E(n,J).$$

Если $g \in N$ и $j = k$ то, как показано в лемме 9, $\Lambda_{J(R)} N$ не содержит неединичных трансвекций. В соответствии с леммой 3, диагональные элементы матриц $\Lambda_{J(R)} N$ не имеют делителей нуля. Поэтому $1 - e \in J(R)$, $e \in R^*$ и $g_{jj} \in R^*$. Согласно следствию 4, $g \in \xi GL(n,R)$.

Отметим, что если лемма 11 имеет место при всех $1 \leq i \neq k, j \leq n$, то $[g^{-1}, E_J] \subseteq E(n,I) \bigcap E(n,J)$ и, как следствие, при $J = R$ $[g^{-1}, E(n,R)] \subseteq E(n,I) \bigcap E(n,J)$. Поэтому

$$[g^{-1}, E(n,J)] \subseteq E(n,I) \bigcap E(n,J) \text{, если } g \in C_I \text{ и } g \in \xi GL(n,R) \text{, если } g \in N.$$

Это значит, что g - стабильный элемент.

Определение 13. *Ассоциативное кольцо R с 1 называется регулярным в смысле Ноймана, если для произвольного элемента $a \in R$ существует элемент $a' \in R$ такой, что $aa'a = a$.*

Оказывается [22, 23], что кольца, регулярные в смысле Ноймана, являются стабильными.

Действительно, пусть R - кольцо, регулярное в смысле Ноймана и $g \in GL(n, R)$. Пусть $a = g_{jk}$ для произвольных $1 \leq k, j \leq n$. Тогда существует элемент $a' \in R$ такой, что $aa'a = a$. Пусть $e = aa'$. Очевидно, что $ea = a$, $e^2 = eaa' = e$, $g_{jk} = a \in eR$ и $e \in g_{jk}R$. В соответствии с леммой 11,

$$[g^{-1}, t_{ij}(J)] \subseteq E(n,I) \bigcap E(n,J) \text{, если } g \in C_I \text{ и } g \in \xi GL(n,R) \text{, если } g \in N,$$

где I J - идеалы кольца R и N- инвариантная относительно $E(n,R)$ подгруппа $GL(n,R)$, которая не содержит неединичных трансвекций.

Поэтому g - стабильный элемент и, следовательно, R - стабильное кольцо.

Дадим авторское

Определение 14. *Ассоциативное кольцо R с 1 называется расширенно-локальным, если для произвольного $a \in R$ существует элемент $a' \in R$ такой, что* $(1+a'a)(1-a'+aa')=0$.

Очевидно, что локальные кольца с 1 и их прямые и декартовые произведения являются расширенно-локальными кольцами.

Теорема 3. *Расширенно-локальные кольца являются стабильными.*

Доказательство. Пусть $g \in GL(n,R)$, $r \in R$, $a = (g^{-1})_{ii}\, g_{ii}$ где $1 \le i \le n$.

Обозначим
$$g_0 = t_{1i}\left(g_{1i} r \left(g^{-1}\right)_{ii}\right) \cdots t_{ni}\left(g_{ni} r \left(g^{-1}\right)_{ii}\right) ,\ g_1 = g^{-1} g_0^{-1} ,\ g_2 = \left(g^{-1}\right)^{g_0} .$$
Нетрудно видеть, что
$$(g_1)_{ii} = (1-r+ar)\left(g^{-1}\right)_{ii} = (g_2)_{ii} .$$
Пусть a' - элемент R, для которого $(1+a'a)(1-a'+aa')=0$.

Обозначим $e = (1+aa'-a')\,a$. Тогда $1-e = (1-a)(1+a'a)$.

Поскольку $(1+a'a)\,e = 0$, то
$$(1-e)(1+aa'-a') = (1-a)(1+a'a)(1+aa'-a') = 0$$
и $(1-e)\,e = 0$. Это означает, что $e^2 = e$ и $(1-e)^2 = 1-e$.

Поэтому $eR = \{t \in R\,|(1-e)t-0\}$ и $(1-e)R = \{t \in R\,|et=0\}$.

Следовательно, $1+aa'-a' \in eR$. Пусть в определении элементов g_0, g_1 и g_2 элемент $r = a'$. Тогда
$$(g_1)_{ii} = (g_2)_{ii} = (1+aa'-a')\left(g^{-1}\right)_{ii} \in eR.$$
Если $a = (g^{-1})_{ii}\, g_{ii}$, то $e = (1+aa'-a')\,a = (1+aa'-a')\,(g^{-1})_{ii}\, g_{ii} = (g_1)_{ii}\, g_{ii} = (g_2)_{ii}\, g_{ii}$. Поэтому к элементам g_1 и g_2 применима лемма 11.

В частности, если $g \in C_I$, то $g_0 \in C_I$, $g_1 \in C_I$,
$$\left[g_1^{-1}, E(n,J)\right] \subseteq E(n,I) \bigcap E(n,J) \text{ и } [g, E(n,J)] \subseteq E(n,I) \bigcap E(n,J) ,$$
где I, J – идеалы R.

Если $g \in N$, то $g_2 \in N$ и $g_2 \in \xi GL(n,R)$, $g \in \xi GL(n,R)$, где N – инвариантная относительно $E(n,R)$ подгруппа $GL(n,R)$, которая не содержит неединичных трансвекций.

Тем самым доказано, что все элементы группы $GL(n,R)$ являются стабильными. Согласно теореме 1 R – стабильное кольцо.

Аналогичным образом доказывается, что ассоциативные кольца с 1, которые алгебраичны над полем (даже артиновыми подкольцами) своих центров [22], являются стабильными.

Ведь в этом случае для произвольного элемента $a \in R$ и артинового подкольца $K \subseteq \xi R$ цепочка идеалов $(a) \supseteq (a^2) \supseteq (a^3) \supseteq \cdots$ тоже артинового коммутативного кольца $K[a]$ стабилизируется. Поэтому существует натуральное число m и элемент $a' \in R$, который коммутирует с a, что $a^m = a^{m+1}a'$. Тогда
$$e = a^m (a')^m = a^{m+1}(a')^{m+1} = \cdots = a^{2m}(a')^{2m} = e^2 \text{ и}$$
$$a^m = a^{m+1}a' = \cdots = a^{2m}(a')^m = ea^m.$$
В этом случае $1-r+ar = a^m$. Пусть $r = 1+a+\cdots+a^{m-1}$.

Если $g_1 = g^{-1}g_0^{-1}$, $g_2 = (g^{-1})^{g_0}$, где $g_0 = \prod_l t_{li}\left(g_{li} r \left(g^{-1}\right)_{ii}\right)$, то

$$(g_1)_{ii} = (g_2)_{ii} = (1 - r + ar)\left(g^{-1}\right)_{ii} = a^m \left(g^{-1}\right)_{ii} \subseteq eR.$$

Если $a = \left(g^{-1}\right)_{ii} g_{ii}$, то

$$e = a^m \left(a'\right)^m = a^{m+1} \left(a'\right)^{m+1} = a^m a \left(a'\right)^{m+1} = a^m \left(g^{-1}\right)_{ii} g_{ii} \left(a'\right)^{m+1} \subseteq (g_1)_{ii} R = (g_2)_{ii} R.$$

Поэтому к элементам g_1 и g_2 применима лемма 11. Как и в теореме 3 получаем, что g – стабильный элемент.

Пусть S – мультипликативно замкнутое множество с 1 центра ξR кольца R, которое не содержит O, R_S – классическое кольцо частных кольца R по S.

Естественный гомоморфизм

$\Lambda : R \to R_S$, определенный по правилу $\Lambda : r \to \frac{r}{1}$

индуцирует гомоморфизм $\Lambda : GL\,(n, R) \to GL\,(n, R_S)$.

Лемма 12. *Пусть R – ассоциативное кольцо с 1, N – подгруппа , которая инвариантная относительно и не содержит неединичных трансвекций. Тогда ΛN не содержит неединичных трансвекций.*

Доказательство. Если ΛN содержит неединичную трансвекцию τ, то существует трансвекция $t \in E_S$ такая, что для некоторого $r \in R$, $rS \neq 0$ имеет место включение

$$\Lambda t_{ij}\,(r) = [\tau, \Lambda t] \in \Lambda N.$$

Это означает, что $t_{ij}(r)h \in N$ для некоторого $h \in \ker \Lambda$. В таком случае существует $s \in S$, что $(h - 1)\, s = 0$ и s аннулирует некоторый недиагональный элемент матрицы $t_{ij}\,(r)\, h$. В соответствии с леммой 3 элемент s аннулирует все недиагональные элементы матрицы $t_{ij}\,(r)\, h$. Поэтому $t_{ij}\,(r)\, s = t_{ij}\,(r)\, hs$ – диагональная матрица и $rs = 0$. Полученное противоречие показывает, что ΛN не содержит неединичных трансвекций.

Лемма 13. *Пусть R – ассоциативное кольцо с 1, I – идеал R, N – подгруппа, которая инвариантная относительно $E(n, R)$ и не содержит неединичных трансвекций. Если $\Lambda\,(g)$ – стабильный элемент группы $GL\,(n, R_S)$, то существует элемент $s \in S$ такой, что для произвольного $e \in E\,(n, R)$*

$[g, e, E_{sR}] \subseteq E\,(n, I)$, если $g \in C_I$ и $g \in C\,(n, Anns)$, если $g \in N$.

Доказательство. Пусть $g \in C_I$. Тогда $\Lambda\,(g) \subseteq C_{I_S}$,

$$[\Lambda\,(g)\,, E\,(n, R_S)] \subseteq E\,(n, I_S)$$

и существует элемент $s_0 \in S$ такой, что $[g, e, t_{ij}\,(cs_0 r)] \in E\,(n, cI) \ker \Lambda$ для произвольных $e \in E\,(n, R)$, $r \in R$, $c \in \xi R$, $1 \leq i \neq j \leq n$.

Полученное включение имеет место, если кольцо R заменить на кольцо $R\,[x, y]$, в котором переменные x и y коммутируют, x коммутирует с элементами R, а y с элементами ξR. Поэтому на него можно смотреть как на многочлен от переменной x с коэффициентами из кольца $R_n\,[y]$, которые аннулируются некоторым элементом $s_1 \in S$.

Пусть $s_{ij} = s_o s_1$. Тогда $[g, e, t_{ij}\,(s_{ij} y)] \in E\,(n, I\,[y])$. Поэтому

$[g, e, t_{ij}\,(s_{ij} R)] \subseteq E\,(n, I)$ и $[g, e, E_{sR}] \subseteq E\,(n, I)\,,$

где $s = \bigcap s_{ij}$ для всех пар $1 \leq i \neq j \leq n$.

Пусть $g \in N$. По лемме 12 группа ΛN не содержит неединичных трансвекций. Поскольку $\Lambda\,(g)$ – стабильный элемент, то $\Lambda\,(g) \in \xi GL\,(n, R_S)$. Поэтому существует $s \in S$, который аннулирует недиагональный элемент матрицы g. В соответствии с леммой 3 $g \in C\,(n, Anns)$.

Следствие 6. *Пусть R – ассоциативное кольцо с 1, R_S –стабильные кольца для всех максимальных идеалов J_0 подкольца $K \subset \xi R$, $1 \in K$, $S = K \backslash J_0$. Тогда R – стабильное кольцо.*

Доказательство. Пусть e_0, e – произвольные элементы группы $E(n, R)$, G–подгруппа $GL(n, R)$ инвариантная относительно $E(n, R)$ и I_0 – наибольший идеал кольца R такой, что $E\,(n, I_0) \subset G$. Пусть

$$J\,(I) = \{s \in K\,|[g, e_0, e, E_{sR}] \subseteq E\,(n, I)\,, \text{ если}\, g \in C\,(n, I)\} \text{ и}$$
$$J\,(G) = \{s \in K \mid \Lambda_0\,(g) \in C\,(n, Ann\Lambda_{I_0}\,(s))\,, \text{ если}\, g \in G\}\,.$$

Понятно, что $J\,(I)$ и $J\,(G)$ – идеалы кольца K.

Если $J\,(I) \neq K$, то существует максимальный идеал $J_0\,(I)$ кольца K такой, что

$$J\,(I) \subseteq J_0\,(I)\,, S = K \backslash J_0\,(I)\,.$$

Аналогично определяется $S = K \backslash J_0\,(G)$, если $J\,(G) \neq K$, где $J\,(G) \subseteq J_0\,(G)$.

Пусть $g \in C\,(n, I)$. Поскольку R_S – коммутаторное кольцо, то $\Lambda_{I_0}\,[g, e_0] \subseteq E\,(n, I_S)$. Согласно лемме 13 в S существует элемент, который содержится в $J\,(I)$. Полученное противоречие показывает, что $J\,(I) = K$, $1 \in J\,(I)$, R – слабокоммутаторное кольцо.

Пусть $g \in G$, $\overline{R} = {}^{R}\!/_{I_0}$. Как и в лемме 12 доказываем, что $\Lambda_{I_0}(G)$ не содержит неединичных трансвекций. Поскольку $I_0 \bigcap K \subseteq J\,(G)$, то $\overline{S}$ не содержит нулевой элемент. Кольцо $\overline{R}_{\overline{S}}$, как фактор нормального кольца R_S, является частично-нормальным.

Если $\Lambda : \overline{R} \to \overline{R}_{\overline{S}}$, то группа $\Lambda\Lambda_{I_0}\,(G)$, в соответствии с леммой 12, не содержит неединичных трансвекций. Ввиду частичной нормальности кольца $\overline{R}_{\overline{S}}$ и леммы 13 в S существует элемент, который содержится в $J\,(G)$. Поэтому $J\,(G) = K$, $1 \in J\,(G)$, $\Lambda_{I_0}\,(g) \in \xi GL\,(n, R)$, $g \in C\,(n, I_0)$. Это означает, что R – нормальное и, как следствие, стабильное кольцо.

В частном случае, когда R_S - кольца, которые удовлетворяют условие стабильности ранга $n-1 > 1$ для всех максимальных идеалов J подкольца $K \subset \xi R$ при условии $1 \in K$, $S = K \backslash J$ стабильность кольца R доказано [24].

Следствие 7. *[19] Пусть R - ассоциативное кольцо с 1, которое целоалгебраическое над подкольцом $K \subset \xi R$, $1 \in K$. Тогда R - стабильное кольцо.*

Доказательство. Пусть I_0 - максимальный идеал кольца K, $S = K \backslash I_0$, $r \in R$. Тогда $K_S\,(r)$ конечно-порожденный модуль над K_S . Согласно лемме Накаямы $J\,(K_S) \subseteq J\,(K_S\,(r))$ и, как следствие, $J\,(K_S) \subseteq J\,(R_S)$. Поэтому ${}^{R_S}\!/_{J\,(R_S)}$ - кольцо, алгебраическое над полем ${}^{K_S}\!/_{J\,(K_S)}$. В таком случае, как отмечалось выше, кольцо ${}^{R_S}\!/_{J\,(R_S)}$ является стабильным. Ввиду следствия 5 R_S - стабильное кольцо и, в соответствии со следствием 6, R - стабильное кольцо.

Как известно [25] не каждое ассоциативное кольцо с 1 является стабильным. Например, алгебра над полем с $2n^2$ порождающими элементами x_{ij}, y_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$ и определяющими соотношениями

$$(x_{ij})\,(y_{ij}) = (y_{ij})\,(x_{ij}) = 1$$

не является стабильным кольцом.

Однако, класс стабильных колец достаточно широкий. Наиболее ярко это продемонстрировано в работе [26].

Определение 15. *Пусть R - ассоциативное кольцо с 1. Идеал F кольца R называется слабонетеровым (соответственно целоалгебраическим), если для произвольных элементов $y, z \in F$, $m \geq 1$ левый и правый модули*

$$\sum_m Rzy^m \text{ и } \sum_m y^m zR \text{ (соответственно } \sum_m \xi Rzy^m \text{ и } \sum_m \xi Ry^m z \text{)}$$

являются конечно порожденными как модули над R (соответственно над ξR).

Определение 16. *Ассоциативное кольцо R с 1 называется слабонетеровым (соответственно блочно-целоалгебраическим), если существует ряд идеалов*

$$0 = I_0 \subseteq I_1 \subseteq \ldots \subseteq I_{q+1} = R$$

такой, что идеалы ${}^{I_{i+1}}/_{I_i}$ в кольцах являются ${}^{R}/_{I_i}$ слабонетеровыми (соответственно целоалгебраическими) для всех $1 \leq i \leq q$.

Очевидно, что блочно-целоалгебраические кольца являются слабонетеровыми.

Известно [1, 2, 27], что PI-кольца являются блочно-целоалгебраическими. Очевидно, что кольца, которые алгебраичные над подкольцами своих центров являются блочно-целоалгебраическими.

Пусть $g \in GL(n, R)$ и l - максимальное целое число такое, что $I_l g_{1n} = 0$. Если $l < q+1$, то выберем $g_1 \in [g, t_{n1}(I_{l+1})]$, $y = (g_1)_{11}$, $z = (g_1)_{1n}$. Тогда $y-1$ и z содержатся в $I_{l+1} \bigcap g_{1n}R$ и $I_l(y-1) = 0$.

Поэтому существует натуральное число m такое, что

$$z(y-1)^m - \sum_{p=1}^{m-1} s_p z (y-1)^p \in I_l \ , \ zy^{m+1} = \sum_{p=0}^{m} r_p z y^p \ , \ r_p, s_p \in R \ .$$

Пусть N - подгруппа $GL(n, R)$, которая инвариантная относительно $E(n, R)$ и не содержит неединичных трансвекций. Если $g \in N$, то $g_1 \in N$ и, в соответствии с леммой 3, y не является делителем нуля. Из равенства $ry + r_0 z = 0$, где r - некоторый элемент кольца R, согласно лемме 4, следует, что $r_0 z = r = 0$. Аналогично доказывается, что $0 = r_0 z = \cdots = r_m z = z$. Поэтому $[g, t_{n1}(I_{l+1})] \subseteq \xi GL(n, R)$. В соответствии с леммой 3, $I_{l+1} g_{1n} = 0$. Полученное противоречие показывает, что $l = q+1$, $g_{1n} = 0$, R- частично-нормальное кольцо.

Поскольку слабонетеровость сохраняется при факторизациях, то все факторы кольца R также являются частично-нормальными.

Пусть I - идеал R, который содержится в некотором слабонетеровом идеале кольца R, y - произвольный элемент I. Тогда $zy \in I$ и существует натуральное число m такое, что

$$zy^{m+1} = \sum_p r_p z y^p \text{ , где } z, r_p \in R \ , \ 1 \leq p \leq m.$$

Пусть $\lambda \in \xi R$. Умножим равенство выше на λ^{m+1} . Поскольку $\lambda y = \lambda y - 1 + 1$, то существует многочлен $\psi(\lambda)$ такой, что имеет место равенство

$$\psi(\lambda) z + a(1 - \lambda y) = 0 \text{ , где } \psi(0) = 1 \ .$$

Пусть

$g \in C(n, I)$, $g_\lambda = t_{pq}(\lambda r)^g$, $c_\lambda = [t_{pq}(-\lambda r), g]$, $y = 1 - (g_1)_{ii}$, $z = \left(g_1^{-1}\right)_{jk} (g_1)_{ki}$, где i, j, k - попарно-различные числа, $r \in R$.

Тогда $g_\lambda = \lambda g_1 - \lambda + 1$, $c_\lambda \in C_I$, $g_\lambda = t_{pq}(\lambda r) c_\lambda$.

Поскольку

$$(g_\lambda)_{ii} = \lambda(g_1)_{ii} - \lambda + 1 = 1 - \lambda y, \quad (g_\lambda)_{ki} = \lambda(g_1)_{ki},$$

$$(g_\lambda^{-1})_{jk} = (g_{-\lambda})_{jk} = -\lambda(g_1)_{jk} = \lambda(g_1^{-1})_{jk} \text{ и } t_{pq}\left(-\lambda r\right)_{jk} t_{pq}\left(\lambda r\right)_{ki} = 0,$$

то,

$$\psi\left(\lambda\right)\left(g_\lambda^{-1}\right)_{jk}\left(g_\lambda\right)_{ki} + \lambda^2 a\left(g_\lambda\right)_{ii} = 0,\, a \in I.$$

В соответствии с леммой 7,

$$\left[c_\lambda, t_{ij}\left(J\psi_{ij}\left(\lambda\right)\right)\right] \subset E\left(n,I\right) \bigcap E\left(n,J\right),$$

где J- произвольный идеал R.

Из аналогичных правосторонних рассуждений и матричных коммутаторных формул для каждой пары существует многочлен такой, что

$$\left[c_\lambda, t_{ij}\left(J\psi_{ij}\left(\lambda\right)J\right)\right] \subset E\left(n,I\right) \bigcap E\left(n,J\right) \text{ , где } \psi_{ij}\left(0\right) = 1$$

Пусть $f\left(\lambda\right) = \prod\limits_{i,j} \psi_{ij}\left(\lambda\right)$ для всех пар $1 \le i \ne j \le n$. Тогда

$$\left[c_\lambda, E_{Jf(\lambda)J}\right] \subseteq E\left(n,I\right) \bigcap E\left(n,J\right).$$

Обозначим $I_1 = Rf\left(\lambda\right)R$, $I_2 = I_1^2 f\left(1-\lambda\right) I_1^2$.

Очевидно, что I_1, I_2 - идеалы кольца R и

$$\left[c_\lambda, E_{I_1}\right] \subseteq E\left(n,I\right), \left[c_{1-\lambda}, E_{I_2}\right] \subseteq E\left(n,I\right).$$

Поскольку $E_{I_2} \subseteq E\left(n,I_2\right) \subseteq E\left(n,I_1^2\right) \subseteq E_{I_1}$, то для произвольного элемента $e \in E\left(n,R\right)$ имеют место включения

$$\left[c_\lambda^e, E_{I_1}\right] \subseteq \left[c_\lambda, E\left(n,I_2\right)\right]^e \subseteq E\left(n,I\right) \text{ и } \left[c_\lambda, E_{I_1}\right]^e \subseteq E\left(n,I_I^2\right) \subseteq E_{I_1} \text{ .}$$

Учитывая, что $c_1 = c_\lambda^{t_{pq}(\lambda-1)r} c_{1-\lambda}$ получаем, что $\left[c_1, E_{I_2}\right] \subseteq E\left(n,I\right)$.

Положим $I_0 = \sum\limits_\lambda I_2$ для всех $\lambda \in \xi R$. Если $I_0 \ne R$, то образ многочлена

$$f\left(\lambda\right)^2 f\left(1-\lambda\right) f\left(\lambda\right)^2$$

из-за равенства $f\left(0\right) = 1$ является ненулевым над кольцом ${}^{R}\!/_{I_0}$, а образы элементов ξR являются его корнями.

Если ξR содержит бесконечное поле, то $I_0 = R$, $\left[c_1, E\left(n,R\right)\right] \subseteq E\left(n,I\right)$, R - слабо коммутаторное кольцо.

В соответствии с леммой 2, R - стабильное кольцо. Таким образом слабонетеровые кольца, которые в своих центрах содержат бесконечные поля, являются стабильными [26].

В частном случае блочно-целоалгебраические кольца являются стабильными без требования существования в их центрах бесконечных полей.

Действительно, если элементы идеала I кольца R целоалгебраические над подкольцом $K \subseteq \xi R$, $1 \in K$, $r \in I$, I_0 - максимальный идеал K, $S = K \backslash I_0$, то $K_S\left(r\right)$ - является конечно порожденным модулем над K_S . В соответствии с леммой Накаямы

$$J\left(K_S\right) \subseteq J\left(K_S\left(r\right)\right) \text{ и } J\left(K_S\right) \subseteq J\left(K_S\left(I\right)\right) \text{ .}$$

Поскольку кольцо ${}^{K_S\left(I\right)}\!/_{J\left(K_S\left(I\right)\right)}$ алгебраическое над полем ${}^{K_S}\!/_{J\left(K_S\right)} \cong {}^{K}\!/_{I_0}$, то кольца $K_S\left(I\right)$ и, соответственно $K\left(I\right)$, являются стабильными. В таком случае группы $\left[C_I, E_K\right]$ и $\left[C_I, E\left(n,R\right)\right]$ содержатся в $E\left(n,I\right)$.

Следовательно, если R - блочно-целоалгебраическое кольцо, то согласно доказанному выше

$$\left[C_{I_{i+1}}, E\left(n,R\right)\right] \subset E\left(n,I_{i+1}\right) C_{I_i}$$

для всех $0 \le i \le q$. Поэтому R - слабо-комутаторное кольцо с частично-нормальными факторами. Согласно лемме 2 R- стабильное кольцо [28, 29].

1. *Abe E., Suzuki K.* On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // Tohoku Math.J.– 1976.– V.28.– N 1.– P.185-198.
2. *Abe E.* Chevalley groups over commutative rings // Proc.-Conf.-Radical-Theory.-Sendai.– 1998.– P.1-23.
3. *Taddei G.* Normalite des groupes elementaire class les groupes de Chevalley sur anneau // Cont.-Math.-Amer.-Math.-Soc. –1986.– V.55,part II.– P.693-710.
4. *Vaserstain L.N.* On the subgroups of Chevalley groups over-commutative rings // Tohoku Math.J.– 1986.– V.38.– P.219-230.
5. *Голубчик И.З.* Группы лиевского типа над PI-кольцами // Фундаментальная и прикладная математика.– 1997.– Т.3.– N.2.– С.399-424.
6. *Басс Х.* Алгебраическая К-теория.– М.:– Мир, 1973.– 591с.
7. *Hahn A.I. and O'Meara O.T.* The Classical Groups and K-theory. Springer-Veriag.– 1989.– 494p.
8. *Vaserstein L.N., Suslin A.A.* Serre'es problem on projective
9. *Суслин А.А.* О структуре специальной линейной группы над кльцом многочленов // Изв.АН СССР. Сер.матем.– 1977.– Т.41.– N.2.– С.235-252.
10. *Wilson I.S.* The normal and subnormal structure of general linear groups // Proc.Cambr.Phil.SOS.– 1972.– T.71.– N,2.– P.163-177.
11. *Хлебутин С.Г.* Достаточные условия нормальности подгруппы элементарных матриц // УМН.– 1984.– Т.39.– N.3.– С.245-246.
12. *Артамонов В.А.* Квантовая проблема Серра // Успехи математических наук.– 1998.– Т.53.– Вып.-4(322).– С.3-76.
13. *Супруненко Д.А.* Группы матриц.– М.:– Наука, 1972.– 351с.
14. *Петечук В.М.* Гомоморфизмы линейных групп над коммутативными кольцами // Математические заметки.– 1989.– Т.46.– В.5.– С.50-61.
15. *Абе Э.* Автоморфизмы групп Шевалье над коммутативными кольцами // Алгебра и анализ.– 1993.– Т.5.– Вып.2.– С.74-90.
16. *Голубчик И.З.* Изоморфизмы проективных групп над ассоциативными кольцами // Фундамент. и прикл. матем.– 1995.– С.311–314.
17. *Golubchik I.Z., Mikhalev A.V.* Isomorphism of a comlplete linear group over an associative ring // Vestnik Moscov. Univ. Series 1. Math. Mech.– 1983.– N.3.– P.61-72.
18. *Golubchik I.Z.* Isomorphism of the General Linear Group $GL_n(R), n \geq 4$ over an associative Ring // Contemporary Mathematics.– 1992.– Vol. 131.– Part 1.– P.123-136.
19. *Petechuk V.M.* Stability structure of linear group over rings // Matematychni studii.– 2001.– №11.– C.17-22.
20. *Вассерштейн Л.Н.* О стабилизации в алгебраической К-теории //Функц.анализ и его приложения.– 1969.– Т.3.– N.2.– С.85-86.
21. *Bass H.* K-theory and stable algebra // Publ.Math.IHES.– 1964. – V.22.– P.5-60.
22. *Хлебутин С.Г.* Некоторые свойства элементарной подгруппы. Алгебра: логика и теория чисел.– М.:Изд-во МГУ, 1986.– С.86-90.
23. *Vaserstein I.N.* Normal Subgroups of the general linear groups over von Neumann regular rings // Proc.Amer.Math.Soc.– 1986.– V.96.– N.2.– P.209-214.
24. *Vaserstein L.N.* On the normal subgroups GL_n over a ring // Springer Lecture Notes.854 (Algebraic K-theory).– 1981.– P.454-465.
25. *Герасимов В.И.* Группа единиц свободного произведения колец // Матем.сб.– 1987.– Т.134.– N.1.– С.42-45.
26. *Голубчик И.З.* О полной линейной группе над слабо нетеровыми ассоциативными алгебрами // Фундамент. И прикладная математика– 1995.– Т.1.– N3.– С.661-668.
27. *Голубчик И.З.* О подгруппах полной линейной группы $GL\,(n,R)$ над ассоциативным кольцом R // УМН.– 1984.– Т.39.– N.1.– С.125-126.
28. *Голубчик И.З.* О полной линейной группе над блочно алгебраическими кольцами // Тесисы докл.межд.алгебр.конф.пам.Д.К.Фадеева.Санк-Петербург– 1997.– С.186-187.
29. *Петечук В.М.* Стабільна будова лінійних груп над кільцями. Доповіді НАН України.– 2001.– №11.– С.17-22.

Одержано 23.11.2009