УДК 512.547.25

Ю. В. Петечук (Ужгородський нац. ун-т)

ДВОМІРНІ ЗОБРАЖЕННЯ ГРУП ДІЕДРА НАД КОМУТАТИВНИМИ ЛОКАЛЬНИМИ КІЛЬЦЯМИ. ЧАСТИНА 1.

All two-dimensional representations Λ of the dihedral group $D_m = \left\langle a, b \,\middle|\, a^m = 1, b^2 = 1, bab^{-1} = a^{-1} \right\rangle$, $m > 1$ over the commutative local rings with 1 where Λa is a non-scalar matrix modulo the ring radical are described in this article. It turns out that Λa^2 is an identity matrix according to the modulo of the ring radical or $\Lambda a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$, $\Lambda b = \pm \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$, where $\alpha \in R$. The conditions for these representations which are irreducible and equivalent are found.

Описано, з точністю до еквівалентності, всі двомірні зображення Λ групи діедра $D_m = \left\langle a, b \mid a^m = 1,\ b^2 = 1,\ bab^{-1} = a^{-1} \right\rangle$, $m > 1$ над комутативними локальними кільцями з 1 при умові, що Λa – нескалярна матриця за модулем радикалу кільця. Виявляється, що Λa^2 – одинична матриця за модулем радикалу кільця R або $\Lambda a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$, $\Lambda b = \pm \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$, де $\alpha \in R$. Знайдено умови незвідності і еквівалентності таких зображень.

Нехай R – комутативне локальне кільце з 1, $J(R)$ – радикал R, $\overline{R} = {}^{R}\!/_{J(R)}$, $\Lambda_{J(R)} : GL(2, R) \to GL\left(2, {}^{R}\!/_{J(R)}\right)$ – природній гомоморфізм, E – одинична матриця, $D_m = \langle a, b \mid a^m = 1,\ b^2 = 1,\ bab^{-1} = a^{-1} \rangle$ – група діедра порядку $2m$, $\Lambda : D_m \to GL(2, R)$ – двомірне зображення групи D_m , $m > 1$, $\overline{\Lambda} = \Lambda_{J(R)}\Lambda$, $\overline{\Lambda}a$ – нескалярна матриця. Виявляється, що $\overline{\Lambda}a^2 = \overline{E}$ або, з точністю до еквівалентності,

$$\Lambda a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \Lambda b = \pm \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix},$$

де α – параметр зображення, при якому тричлен $x^2 - \alpha x + 1$ ділить без остачі двочлен $x^m - 1$.

Зображення Λ таке, що $\overline{\Lambda}a$ – нескалярна матриця, є незвідним тоді і тільки тоді, коли не існує квадратних коренів із одиниці γ таких, що $tr\Lambda a = \gamma\,(1 + \det \Lambda a)$.

Зокрема, зображення Λ з параметром α є незвідним тоді і тільки тоді, коли α не є подвоєним квадратним коренем із одиниці, що рівносильно нерівності $\alpha^2 \neq 4$. У роботі пропонується критерій еквівалентності зображень, хоча б одне з яких відображає породжуючий елемент a в нескалярний за модулем радикалу елемент. Виявляється, що такі зображення можуть бути нееквівалентними, навіть у тому випадку, коли сліди і визначники образів всіх елементів відповідно рівні. Історію питання і попередні результати можна знайти в [1–5].

Нехай R – асоціативне кільце з 1, R^* – група оборотніх елементів кільця R, $J(R)$ – радикал R, $\overline{R} = {}^{R}\!/_{J(R)}$, V – лівий R-модуль із скінченим R-базисом, $n = \dim V$, $End\,(n, V)$ – кільце ендоморфізмів модуля V, $GL(n, V) = End\,(n, V)^*$ – повна лінійна група автоморфізмів модуля V. У фіксованому базисі модуля V мають місце ототожнення $End\,(n, V) \equiv R_n$ – кільце всіх nxn матриць над R, $GL(n, V) \equiv GL(n, R)$ – група всіх оборотніх nxn матриць, E – одинична матриця.

Гомоморфізм $\Lambda : G \to GL(n, R)$ будемо називати зображенням групи G у повну лінійну групу $GL(n, R)$. Будемо використовувати позначення

$$\Lambda_{J(R)} : R \to {}^{R}\!/_{J\,(R)} \;,\; \Lambda_{J(R)} : GL\,(n, R) \to GL\left(n, {}^{R}\!/_{J\,(R)}\right),$$

$\overline{\Lambda} = \Lambda_{J(R)}\Lambda$, $\overline{g} = \overline{\Lambda}g$, де $g \in G$.

Зображення Λ будемо називати звідним, якщо існує матриця $T \in GL\,(n, R)$ така, що для всіх $g \in G$ має місце рівність

$$T\Lambda g T^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 g & \Lambda_0 g \\ 0 & \Lambda_2 g \end{pmatrix},$$

де $\Lambda_i g \in GL\,(n_i, R)\,,\;\; n = n_1 + n_2,\;\; n_i < n,\;\; 1 \le i \le 2$.

В противному випадку зображення Λ будемо називати незвідним.

Зображення $\Lambda_1 : G \to GL\,(n, R)\,,\;\; \Lambda_2 : G \to GL\,(n, R)$ будемо називати еквівалентними, якщо існує матриця $C \in GL\,(n, R)$ така, що $C\Lambda_1 g C^{-1} = \Lambda_2 g$ для всіх $g \in G$. В противному випадку зображення Λ_1 і Λ_2 будемо називати нееквівалентними.

Гомоморфізм $i_h : G \to G$,де $i_h\,(g) = hgh^{-1}$, $g \in G$ будемо називати внутрішнім автоморфізмом групи G з породжуючим елементом $h \in G$. Будемо говорити, що гомоморфізм Λ_1 , з точністю до спряження елементом c, співпадає з Λ , якщо $\Lambda_1 = i_c\Lambda$, де $c \in GL\,(n, R)$. Очевидно, що

$$i_{c_1 c_2} = i_{c_1} \cdot i_{c_2}.$$

Лема 1. *Нехай R – асоціативне кільце з 1, V–лівий R-модуль, $c \in End\,(n, V)$, $c^m = 1,\;\; m \in R^*$. Тоді $e = (1 + c + \cdots + c^{m-1})\,m^{-1}$ – ідемпотент і має місце пірсовський розклад $V = eV \oplus (1 - e)\,V$, де $eV = \ker(1 - e) = \ker(1 - c)$, $(1 - e)\,V = \ker e = Im\,(1 - c)$.*

Доведення. Легко бачити, що $ec^i = c^i e = e$ для всіх $i \ge 0$. Тому $e^2 = e\,(1 + c + \cdots + c^{m-1})\,m^{-1} = (me)\,m^{-1} = e$. З рівності $1 = e + 1 - e$ випливає, що $v = ev + (1 - e)\,v$ для будь-якого $v \in V$ і $V = eV + (1 - e)\,V$. Очевидно, що $eV \bigcap (1 - e)\,V = 0$. Оскільки $(1 - c)\,e = 0$, $1 - e = (1 - c)\,f$, де $f \in End\,(n, V)$ і f комутує з c, то мають місце включення

$$eV \subset \ker(1 - c) \subset \ker(1 - e) \subset eV, \quad (1 - e)\,V \subset Im\,(1 - c) \subset \ker e \subset (1 - e)\,V.$$

Наслідок 1. *Нехай R – локальне кільце з 1, $2 \in R^*$, $c \in GL\,(n, V)\,,\;\; c^2 = E$. Тоді існує базис V, в якому c має діагональний вигляд з плюс, мінус одиницями на діагоналі.*

Доведення. Дійсно, $e = (1 + c)\,2^{-1}$, $1 - e = (1 - c)\,2^{-1}$. Тоді
$eV = \ker(1 - c) = \{v \in V \mid cv = v\}$, $(1 - e)\,V = \ker e = \{v \in V \mid cv = -v\}$.

Оскільки проективні модулі eV і $(1 - e)\,V$ над локальними кільцями вільні, то існує базис, який складається із базисів підмодулів eV і $(1 - e)\,V$, в якому c має діагональний вигляд з плюс, мінус одиницями на діагоналі.

Лема 2. *Нехай R – комутативне кільце з 1,*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & & 0 & \vdots \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$ *– клітка Фробеніуса із R_n , $B = (b_{ij}) \in R_n$.*

Якщо $BA = AB$ *, то* $B = b_{11}E + b_{21}A + \cdots + b_{n1}A^{n-1}$ *. Зокрема, централізатор* $C_{R_n}(A) = \{\, \mathrm{B} \in \mathrm{R_n} \mid \mathrm{BA} = \mathrm{AB} \}$ *– комутативне кільце з базисом* $E, A, ..., A^{n-1}$ *як модуль над кільцем* R*.*

Доведення. Розглянемо матрицю $B_0 = B - b_{11}E - b_{21}A - \cdots - b_{n1}A^{n-1}$.

Очевидно, що B_0 комутує з матрицею A і перші стовбці матриць A^iB_0 , $0 \le i < n$ є нульовими. Тому перші стовбці матриць B_0A^i є також нульовими. Це можливо тільки при $B_0 = 0$.

Лема 3. *Нехай* R *– комутативне локальне кільце з 1,* $\overline{R} = {}^{R}\!/_{J(R)}$, $A \in GL(2, R)$, $\overline{A}$ *– нескалярний елемент групи* $GL\left(2, \overline{R}\right)$ *. Тоді існує матриця* $T \in GL(2, R)$ *така, що*

$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$ *, де* $\varepsilon = \det A, \quad \alpha = trA$, $\varepsilon^{-1} = \det A^{-1}$, $\alpha\varepsilon^{-1} = trA^{-1}$.

Доведення. Нехай $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, де $a_i \in R$, $1 \le i \le 4$, $\varepsilon = \det A \in R^*$,

$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varepsilon^{-1}a_1 & -\varepsilon^{-1}a_2 \end{pmatrix}$ при $a_2 \in R^*$ і $T = \begin{pmatrix} 1 & -a_3^{-1}a_1 \\ 0 & a_3^{-1} \end{pmatrix}$ при $a_3 \in R^*$.

Неважко пересвідчитись, що матриця T задовольняє вимогу леми 3.

Якщо $a_2 \in J(R)$ і $a_3 \in J(R)$, то $\overline{A}$ – діагональна нескалярна матриця групи $GL\left(2, \overline{R}\right)$. В такому разі

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{12} \in R^*$$

і лема 3 зводиться до вищедоведеного випадку. Очевидно, що

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha\varepsilon^{-1} & 1 \\ -\varepsilon^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \text{ де } \quad \varepsilon^{-1} = \det A^{-1}, \alpha\varepsilon^{-1} = trA^{-1}.$$

Наслідок 2. *Нехай в лемі 3 матриця спряжена з матрицею* A^{-1} *за допомогою матриці* B*,* $A^{-1} = BAB^{-1}$ *. Тоді* $\varepsilon = \varepsilon^{-1}$ *,* $\varepsilon^2 = 1$ *,* $(1 - \varepsilon)\alpha = 0$ *і за індукцією при* $l \ge 0$

$$A^lB = \begin{pmatrix} x_l & y_l \\ y_l - \alpha x_l & -\varepsilon x_l \end{pmatrix},$$

де x_l*,* y_l *– елементи* R*, які залежать від* l*.*

Якщо при цьому $B^2 = E$*, то* $\left(A^lB\right)^2 = E$ *і* $(1 - \varepsilon)\, x_l y_l = 0$, $x_l^2 + y_l^2 - \alpha x_l y_l = 1$.

Нехай R – комутативне кільце, $A \in R_n \equiv End(n, V)$, де $n = \dim V$, $f(x) = \det(xE - A)$ – характеристичний многочлен матриці A. Тоді $f(A) = 0$ (теорема Гамільтона-Келі).

Дійсно, якщо R – алгебраїчно замкнуте поле, то, з точністю до спряження,

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & * \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}, \text{ де } a_0 \in R,\ A_0 \in R_{n-1},\ f_0(x) = \det(xE - A_0)\,.$$

За індукцією $f_0(A_0) = 0$. Оскільки $f(x) = (x - a_0) f_0(x)$, то $f(A) = 0$. Якщо R – довільне комутативне кільце, $A = (x_{ij})$, то $f(A) = (g_{kl}(x_{ij}))$, де $g_{kl}(x_{ij}) \in Z[x_{ij}, 1 \le i, j \le n]$ для всіх $1 \le k, l \le n$. Згідно з вищедоведеним

$g_{kl}(x_{ij}) = 0$ над будь-яким алгебраїчно замкнутим полем і при будь-яких значеннях невідомих величин x_{ij} . Це можливо тільки в тому випадку, коли всі коефіцієнти многочленів $g_{kl}(x_{ij})$ дорівнюють нулю. Тим самим доведено, що $f(A) = 0$ над довільним комутативним кільцем.

Лема 4. *Нехай R – комутативне локальне кільце з 1, $A \in R_2$, $\overline{A}$ – нескалярна матриця кільця $\overline{R_2}$. Тоді $A^m = E$ тоді і тільки тоді, коли характеристичний многочлен $f(x) = \det(xE - A) = x^2 - trAx + \det A$ матриці A ділить без остачі двочлен $x^m - 1$, де $m \geq 2$.*

Доведення. Нехай $x^m - 1 = f(x)q(x) + r(x)$, де $\deg r(x) < 2$. За теоремою Гамільтона-Келі $f(A) = 0$. Тому $A^m - E = \mathrm{r(A)}$. Якщо $r(x) \equiv 0$, то $A^m = E$ і $A \in GL(2, R)$. Навпаки. Якщо $A^m = E$, то $r(A) = 0$. Оскільки $\overline{A}$ – нескалярна матриця, то, з точністю до спряження, матриця A містить оборотний недіагональний елемент. Тому $r(x) \equiv 0$.

З леми 4 випливає, що

$$\begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}^m = E$$

тоді і тільки тоді, коли тричлен $x^2 - \alpha x + \varepsilon$ без остачі ділить двочлен $x^m - 1$.

Якщо при цьому $\alpha = 2\gamma$, $\gamma^2 = 1$, $\varepsilon = 1$, то $x^2 - \alpha x + \varepsilon = (x - \gamma)^2$.

Це означає, що при $\gamma^2 = 1$ рівність

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\gamma \end{pmatrix}^m = E$$

має місце тоді і тільки тоді, коли γ є двохкратним коренем m-го степеня із 1, тобто коли $m = m \cdot 1 = 0$ і $\gamma^m = 1$. Цей же результат випливає із формули

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\gamma \end{pmatrix}^l = \gamma^l \left(E + l \begin{pmatrix} -1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \right),$$

яка доводиться за індукцією при $l \geq 0$.

Теорема 1. *Нехай R – комутативне локальне кільце з 1, $2 \in R^*$, Λ – зображення групи діедра D_m, $m > 1$ у групу $GL(2, R)$ таке, що $\overline{\Lambda}a$ – нескалярна матриця. Тоді, з точністю до спряження, Λa і Λb – діагональні матриці з плюс, мінус одиницями на діагоналях або*

$$\Lambda a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \Lambda b = \pm \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix},$$

де $\alpha \in R$, тричлен $x^2 - \alpha x + 1$ ділить без остачі двочлен $x^m - 1$.

Доведення. З рівностей $(\pm 1 + j)^2 = 1$, $(\pm E + J)^2 = E$, де $j \in J(R)$, а J – матриця над $J(R)$ випливає, що $(\pm 2 + j)j = 0$ і $(\pm 2E + J)J = 0$. Тому $j = 0$ і $J = 0$.

За припущенням $\overline{\Lambda}a$ – нескалярна матриця. Оскільки $2 \in R^*$, $b^2 = 1$, то, згідно з наслідком леми 1, можна вважати, що з точністю до спряження,

$$\Lambda b = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

де $b_1,\ b_2\ \in\ \{\pm1\}$, $a_i\ \in\ R$, $1\ \leq\ i\ \leq\ 4$, $\varepsilon\ =\ \det\Lambda a$, $\alpha\ =\ tr\Lambda a$, $\varepsilon^2\ =\ 1$, $(1-\varepsilon)\,\alpha=0$.

Якщо $\Lambda b=\pm E$, то Λa і Λb комутують між собою. Тому $\Lambda a^2=E$ і з аналогічних міркувань, з точністю до спряження, можна вважати, що $a_2=a_3=0$, $a_1,\ a_4\in\{\pm1\}$. Це означає, що Λa і Λb – діагональні матриці з плюс, мінус одиницями на діагоналях.

Нехай $\Lambda b\neq\pm E$. Тоді
$\Lambda b=\pm\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$ і $\Lambda b\Lambda a\Lambda b^{-1}=\begin{pmatrix}a_1&-a_2\\-a_3&a_4\end{pmatrix}=\varepsilon\begin{pmatrix}a_4&-a_2\\-a_3&a_1\end{pmatrix}$.
Якщо $a_2\in R^*$, то $\varepsilon=1$, $\alpha=2a_1$ і, з точністю до спряження, матрицею
$\begin{pmatrix}1&0\\-a_1&-a_2\end{pmatrix}$, отримуємо, що $\Lambda a=\begin{pmatrix}0&-1\\1&\alpha\end{pmatrix}$, $\Lambda b=\pm\begin{pmatrix}-1&0\\\alpha&1\end{pmatrix}$.

Аналогічно теорема 1 доводиться, якщо $a_3\in R^*$. Для цього слід застосувати спряження Λ елементом

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

і звести теорему 1 до попереднього випадку.

При $a_2\ \in\ J\,(R)$ і $a_3\ \in\ J\,(R)$ мають місце рівності $\overline{a_1}^2\ =\ \overline{a_4}^2\ =\ \overline{1}$. Тому $\overline{a_1},\overline{a_4}\in\left\{\pm\overline{1}\right\}$. За припущенням $\overline{\Lambda}a$ – нескалярна матриця. Тому

$$\Lambda a=\pm\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}+v,\ \text{де}\,v-\text{матриця над}\ J\,(R)\,.$$

В такому разі $\Lambda b\Lambda a=\pm E+\Lambda bv$, де Λbv – матриця над $J\,(R)$. З рівності $(ba)^2=1$ випливає, що $\Lambda bv=0$ і, як наслідок, що $v=0$.

Це означає, що і в даному випадку Λa і Λb – діагональні матриці з плюс, мінус одиницями на діагоналях.

Теорема 2. *Нехай R – комутативне локальне кільце з 1, $2\in J\,(R)$, Λ – зображення групи діедра D_m, $m>1$ у групу $GL\,(2,R)$ таке, що $\overline{\Lambda}a$ – нескалярна матриця. Тоді $\overline{\Lambda}a^2=\overline{E}$, m – парне число, або, з точністю до спряження,*

$$\Lambda a=\begin{pmatrix}0&-1\\1&\alpha\end{pmatrix},\quad \Lambda b=\begin{pmatrix}-1&0\\\alpha&1\end{pmatrix},$$

де $\alpha\in R^*$, тричлен $x^2-\alpha x+1$ ділить без остачі двочлен x^m-1.

Доведення. За припущенням $\overline{\Lambda}a$ – нескалярна матриця. Згідно з наслідком 2, з точністю до спряження, можна вважати, що

$$\Lambda a=\begin{pmatrix}0&-\varepsilon\\1&\alpha\end{pmatrix},\quad \Lambda b=\begin{pmatrix}b_1&b_2\\b_2-\alpha b_1&-\varepsilon b_1\end{pmatrix},$$

де $\varepsilon^2=1$, $(1-\varepsilon)\,\alpha=0$, $b_i\in R$, $1\leq i\leq 2$, $(1-\varepsilon)\,b_1b_2=0$, $b_1^2+b_2^2-\alpha b_1b_2=1$.

Нехай $\alpha\in R^*$. Тоді $\varepsilon=1$. Якщо $b_2\in R^*$, то покладемо $x=(1-b_1)\,b_2^{-1}$ і розглянемо матрицю

$$T=\begin{pmatrix}x&-1\\1&x+\alpha\end{pmatrix}.$$

Очевидно, що T комутує з Λa , $\det T = x^2 + xa + 1 = (2 - 2b_1 + ab_2)\, b_2^{-2} \in R^*$,

$$T\Lambda b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} T.$$

Це означає, що, з точністю до спряження матрицею T, зображення Λ задовольняє рівність

$$\Lambda a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}, \Lambda b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix},$$

де $\alpha \in R^*$.
Якщо $b_2 \in J(R)$, то $b_1 \in R^*$ і $b_2 - \alpha b_1 \in R^*$. Тоді $(\Lambda a \Lambda b \Lambda a^{-1})_{12} = \alpha b_1 - b_2 \in R^*$.

Згідно з вищедоведеним, зображення Λ , з точністю до спряження, задовольняє теорему 2.

Нехай $\alpha \in J(R)$. В такому разі $\overline{\Lambda} a^2 = \overline{E}$, m – парне число.

Зауваження 1. *В останньому випадку, якщо $\overline{\Lambda} a^2 = \overline{E}$ і $\overline{\Lambda} b$ – нескалярна матриця, то, з точністю до спряження,*

$$\Lambda b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; i \; \Lambda a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}.$$

З рівності $bab^{-1} = a^{-1}$ випливає, що

$$\begin{pmatrix} a_4 & a_3 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} a_4 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\varepsilon a_2 & a_4 \end{pmatrix}, \quad \Lambda b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

де $\varepsilon = \det \Lambda a$, $\alpha = tr\Lambda a$, $\varepsilon^2 = 1$, $(1-\varepsilon)\,\alpha = (1-\varepsilon)\, a_1 = (1-\varepsilon)\, a_4 = 0$, $a_3 = -\varepsilon a_2$, $1 = a_1 a_4 + a_2^2$.

Якщо $\overline{\Lambda} a^2 = \overline{E}$ і $\overline{\Lambda} b$ – скалярна матриця, то $\overline{\Lambda} ba^{-1}$ – нескалярна матриця. Тому, з точністю до спряження, згідно з вищедоведеним,

$$\Lambda a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\varepsilon a_2 & a_4 \end{pmatrix}, \quad \Lambda b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Lambda a,$$

де $\varepsilon^2 = 1$, $(1-\varepsilon)\, a_1 = (1-\varepsilon)\, a_4 = 0$, $1 = a_1 a_4 + a_2^2$.

Теорема 3. *Нехай R – комутативне локальне кільце з 1, Λ – зображення групи діедра D_m , $m > 1$ таке, що $\overline{\Lambda} a$ – нескалярна матриця. Зображення Λ є незвідним тоді і тільки тоді, коли не існує квадратних коренів із одиниці γ таких, що $tr\Lambda a = \gamma\,(1 + \det \Lambda a)$.*

Доведення. Нехай $\alpha = tr\Lambda a$, $\varepsilon = \det \Lambda a$. Якщо Λ – звідне зображення, то існує матриця $g \in GL(2, R)$ така, що

$$g\Lambda a g^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & x \\ 0 & \alpha - y \end{pmatrix}, \quad g\Lambda b g^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & x_1 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix},$$

де $\gamma_1^2 = (\gamma\gamma_1)^2 = \gamma^2 = 1$, $\varepsilon = \det \Lambda a = \gamma\,(\alpha - \gamma)$, $\alpha = \gamma\,(1 + \varepsilon)$.

Зрозуміло, що вищенаведені міркування мають місце над будь-яким комутативним кільцем з 1 без вимоги нескалярності матриці $\overline{\Lambda} a$.

Навпаки. Нехай γ – квадратний корінь із 1 такий, що $\alpha = \gamma(1+\varepsilon)$. Без обмеження загальності можна вважати, що

$$\Lambda a = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \Lambda b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 - \alpha b_1 & -\varepsilon b_1 \end{pmatrix},$$

де $\varepsilon^2 = 1$, $(1-\varepsilon)\alpha = 0$, $b_i \in R,\quad 1 \le i \le 2$, $(1-\varepsilon) b_1 b_2 = 0$, $b_1^2 + b_2^2 - \alpha b_1 b_2 = 1$.

Неважко бачити, що якщо

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \gamma\varepsilon \end{pmatrix} \in GL(2,R), \text{ то } g\Lambda a g^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ 0 & \gamma\varepsilon \end{pmatrix}.$$

З рівності $\alpha - \gamma = \gamma\varepsilon$ випливає, що $\left(g\Lambda b g^{-1}\right)_{21} = 0$.

Тим самим доведено, що Λ – звідне зображення.

Зокрема, якщо $\varepsilon = 1$, то Λ – незвідне зображення тоді і тільки тоді, коли $tr\Lambda a$ не є подвоєним квадратним коренем із одиниці. Тому із нерівності $\alpha^2 \neq 4$ випливає, що Λ – незвідне зображення. Якщо $2 \in R^*$ або $\alpha \in R^*$, то вірно і навпаки. Адже, із рівності $\alpha^2 = 4 \in R^*$ випливає, що $\alpha = 2 \cdot \frac{\alpha}{2}$, де $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1$.

Це означає, що зображення Λ , яке задане в теоремах 1 і 2 за правилом

$$\Lambda a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \Lambda b = \pm \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

є незвідним тоді і тільки тоді, коли $\alpha^2 \neq 4$.

Якщо Λ_1 і Λ_2 – зображення групи діедра D_m , $m > 1$ такі, що $\Lambda_1 a = \Lambda_2 a$, то $\Lambda_2 b = \Lambda_1 bc = c^{-1}\Lambda_1 b$, де матриця c комутує з $\Lambda_i a$, $i = 1;\ 2$.
Нехай $S = \Lambda_1 b - \Lambda_2 b$, $L = \Lambda_i a \Lambda_1 b - \Lambda_2 b \Lambda_i a$,

$$S_x = (E + x\Lambda_i a)\Lambda_1 b - \Lambda_2 b(E + x\Lambda_i a), \quad L_x = (xE + \Lambda_i a)\Lambda_1 b - \Lambda_2 b(xE + \Lambda_i a),$$

де $x \in R$.
Неважко бачити, що $S = \Lambda_1 b(E - c) = (c - E)\Lambda_2 b$, $L = \Lambda_1 b\left(\Lambda_i a^{-1} - \Lambda_i ac\right) = \left(\Lambda_i ac - \Lambda_i a^{-1}\right)\Lambda_2 b$, а також, що $S_x = S + xL$ і $L_x = xS + L$. Тому

$$S_x = \Lambda_1 b\left(E - c + x\left(\Lambda_i a^{-1} - \Lambda_i ac\right)\right) \text{ і } L_x = \Lambda_1 b\left(x(E - c) + \Lambda_i a^{-1} - \Lambda_i ac\right).$$

Має місце

Теорема 4. *Нехай R – комутативне локальне кільце з 1, Λ_1 і Λ_2 – зображення групи діедра D_m , $m > 1$ у групу $GL(2,R)$ такі, що*

$$\Lambda_1 a = \Lambda_2 a = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Зображення Λ_1 і Λ_2 еквівалентні тоді і тільки тоді, коли існує елемент $x \in R$ такий, що $x^2 + \alpha x + \varepsilon \in R^*$ і $S_x = 0$ або $L_x = 0$, що рівносильно рівностям $(S_x)_{11} = (S_x)_{12} = 0$ або $(L_x)_{11} = (L_x)_{12} = 0$ відповідно.

Доведення. Нехай Λ_1 і Λ_2 – еквівалентні зображення. Тоді існує матриця $g \in GL(n,R)$ така, що $\Lambda_2 = i_g \Lambda_1$. Це означає, що g комутує з $\Lambda_i a$ і $g\Lambda_1 b = \Lambda_2 b g$, $1 \le i \le 2$. Згідно з лемою 2 $g = g_{11}E + g_{21}\Lambda_i a$ і $\det g = g_{11}^2 + \alpha g_{11} g_{21} + \varepsilon g_{21}^2 \in R^*$.

Якщо $g_{11} \in R^*$, то в рівності $g\Lambda_1 b = \Lambda_2 bg$ покладемо $x = g_{21}g_{11}^{-1}$. Тоді $x^2 + \alpha x + \varepsilon \in R^*$, $S_x = 0$ і, як наслідок, $(S_x)_{11} = (S_x)_{12} = 0$. Аналогічно, якщо $g_{21} \in R^*$, то $x = g_{11}g_{21}^{-1}$, $x^2 + \alpha x + \varepsilon \in R^*$, $L_x = 0$ і $(L_x)_{11} = (L_x)_{12} = 0$.

Навпаки. Нехай існує елемент $x \in R$ такий, що $x^2 + \alpha x + \varepsilon \in R^*$ і $(S_x)_{11} = (S_x)_{12} = 0$ або $(L_x)_{11} = (L_x)_{12} = 0$. З рівності $ba = a^{-1}b$ випливає, що $S_x\Lambda_i a = \Lambda_i a^{-1}S_x$ і $L_x\Lambda_i a = \Lambda_i a^{-1}L_x$. Тому з $(S_x)_{11} = (S_x)_{12} = 0$ випливає, що $S_x = 0$, а з $(L_x)_{11} = (L_x)_{12} = 0$, що $L_x = 0$. Нехай $g = E + x\Lambda_i a$ або $g = xE + \Lambda_i a$ відповідно. В такому разі $g\Lambda_1 b = \Lambda_2 bg$ і $\det g = \varepsilon^\delta \left(x^2 + \alpha x + \varepsilon\right) \in R^*$, де $\delta = 0;\ 1$. Тим самим доведено, що зображення Λ_1 і Λ_2 еквівалентні за допомогою матриці g.

Відмітимо, що $S_x = 0$ тоді і тільки тоді, коли $c - E = x\left(\Lambda_i a^{-1} - \Lambda_i ac\right)$, де $c = \Lambda_1 b\Lambda_2 b$. Аналогічно $L_x = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x\left(c - E\right) = \Lambda_i a^{-1} - \Lambda_i ac$.

З теореми 4 випливає критерій еквівалентності будь-яких двох зображень групи D_m , $m > 1$, хоча б одне з яких відображає породжуючий елемент a в нескалярну за модулем радикалу матрицю. Для цього слід розглянути еквівалентні до них зображення і скористатися теоремою 4.

Зауважимо, що при $2 \in J\left(R\right)$, $\alpha \in J\left(R\right)$ умова $x^2 + \alpha x + \varepsilon \in R^*$ рівносильна нерівності $\overline{x} \neq \overline{1}$.

Нехай Λ_1 і Λ_2 – зображення групи діедра D_m , $m > 1$ такі, що

$$\Lambda_1 a = \Lambda_2 a = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 b = -\Lambda_1 b, \quad c = \Lambda_1 b\Lambda_2 b = -E.$$

З'ясуємо умови при яких зображення Λ_1 і Λ_2 еквівалентні.

Легко бачити, що

$$\Lambda_i a + \Lambda_i a^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & \alpha \end{pmatrix},$$

$$S_x = \left(2E + x\left(\Lambda_i a + \Lambda_i a^{-1}\right)\right)\Lambda_1 b, \quad L_x = \left(2xE + \Lambda_i a + \Lambda_i a^{-1}\right)\Lambda_1 b,$$

де $i = 1;\ 2$.

Згідно з теоремою 4 зображення Λ_1 і Λ_2 еквівалентні тоді і тільки тоді, коли існує елемент $x \in R$ такий, що $x^2 + \alpha x + \varepsilon \in R^*$ і $S_x = 0$ або $L_x = 0$. Це рівнозначно тому, що

$$\begin{cases} 2 + x\alpha = 0 \\ x\left(1-\varepsilon\right) = 0 \end{cases} \quad \text{або відповідно} \quad \begin{cases} 2x + \alpha = 0 \\ 1 - \varepsilon = 0 \end{cases}.$$

Нехай Λ_1 і Λ_2 – еквівалентні зображення. Оскільки $\left(1-\varepsilon\right)\alpha = 0$, то $2\left(1-\varepsilon\right) = 0$. Тоді $\alpha^2\left(x^2 + \alpha x + \varepsilon\right) = 4 - \alpha^2$ або відповідно $4\left(x^2 + \alpha x + \varepsilon\right) = 4 - \alpha^2$. Тому при $4 - \alpha^2 \in R^*$ мають місце включення $\alpha \in R^*$ або відповідно $2 \in R^*$. Значить $1 - \varepsilon = 0$. Це означає, що при $4 - \alpha^2 \in R^*$ і $\varepsilon \neq 1$ зображення Λ_1 і Λ_2 не еквівалентні. При $4 - \alpha^2 \in R^*$ і $\varepsilon = 1$ зображення Λ_1 і Λ_2 еквівалентні за допомогою матриці

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -2 & -\alpha \end{pmatrix} \in GL\left(2, R\right).$$

Якщо $4 - \alpha^2 \in J\left(R\right)$, то $2 - \alpha \in J\left(R\right)$ або $2 + \alpha \in J\left(R\right)$ і з еквівалентності зображень Λ_1 і Λ_2 випливає, що $\alpha \in J\left(R\right)$ і $2 \in J\left(R\right)$. Тому при $4 - \alpha^2 \in J\left(R\right)$ і $2 \in R^*$ або $\alpha \in R^*$ зображення Λ_1 і Λ_2 не еквівалентні.

При $4-\alpha^2 \in J(R)$, $\alpha \in J(R)$ і $2 \in J(R)$ зображення Λ_1 і Λ_2 еквівалентні тоді і тільки тоді, коли існує елемент $x \in R$, $\overline{x} \neq \overline{1}$ такий, що

$$\begin{cases} 2 + x\alpha = 0 \\ x(1-\varepsilon) = 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} 2x + \alpha = 0 \\ 1 - \varepsilon = 0 \end{cases}.$$

Зрозуміло, що якщо при цьому $\overline{x} \neq \overline{0}$, то має місце рівність $\varepsilon = 1$.

Нехай зображення Λ_1 і Λ_2 такі, що $\varepsilon = 1$. Тоді $tr\Lambda_i a^l b = 0$ для всіх $l \geq 0$, $i = 1;\ 2$. Це означає, що сліди і визначники матриць $\Lambda_1 h$ і $\Lambda_2 h$ при всіх $h \in D_m$ співпадають, хоча зображення Λ_1 і Λ_2 при $2 \in R^*$, $\alpha \in \pm 2 + J(R) \subset R^*$ не еквівалентні. Адже, в цьому випадку $4-\alpha^2 \in J(R)$, $\alpha \pm 2 \subset R^*$ відповідно. Якщо при цьому $\alpha \neq \pm 2$, то $\alpha^2 \neq 4$ і, згідно з теоремою 3, Λ_1 , Λ_2 – незвідні зображення. При $\alpha = \pm 2$ Λ_1 і Λ_2 – звідні зображення.

Таким чином, існують як одночасно звідні, так і одночасно незвідні нееквівалентні зображення, сліди і визначники образів всіх елементів яких відповідно рівні.

1. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. – Москва: Наука, 1969. – 668с.
2. *Гудивок П.М.* Представления конечных групп над коммутативными локальными кольцами. – Ужгород: Ужгородский национальный университет, 2003. – 119с.
3. *Бондаренко В.М., Дрозд Ю.А.* Представленческий тип конечных групп // Записки науч. семинаров Ленингр. отд. мат. ин-та АН СССР. – 1977. – № 71. – С. 24-41.
4. *Тилищак О.А.* Про незвідні модулярні зображення даного степеня скінченої p-групи над комутативним локальним кільцем // Наук. вісник Ужгородського ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2002. – Вип. 7. – С. 108-114.
5. *Тилищак О.А.* Зображення 2-го степеня групи діедра порядку $2p$ над деякими комутативними локальними кільцями // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2008. – Вип. 16. – С. 188-192.

Одержано 29.10.2009