Національна академія наук України
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова

Присвячується 50-річчю створення
Інституту кібернетики
імені В.М. Глушкова НАН України

МІЖНАРОДНИЙ СИМПОЗІУМ

ПИТАННЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ОБЧИСЛЕНЬ
(ПОО – XXXIII)

Україна, Крим
Велика Ялта, смт. Кацивелі
23 – 28 вересня 2007 року

Праці симпозіуму

Київ – 2007

УДК 519.6

Г.Г. ЦЕГЕЛИК, М.І. ГЛЕБЕНА

Львівський національний університет ім. Івана Франка,
Ужгородський національний університет,
kafmmsep@franko.lviv.ua

МЕТОД ОПТИМІЗАЦІЇ НЕГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ ВІД ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ

У роботі [1] розроблено апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично, який пізніше одержав широке застосування для побудови нових чисельних методів розв'язування окремих класів задач алгебри, математичного аналізу та диференціальних рівнянь. Зокрема, цей апарат використано для побудови чисельного методу відшукання екстремуму негладких і розривних функцій однієї дійсної змінної. В роботах [2, 3] побудовано апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично, який в [4] використано для побудови чисельного методу наближеного обчислення подвійних інтегралів.

Використовуючи апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій від двох дійсних змінних, заданих таблично, пропонується чисельний метод відшукання екстремуму негладких функцій від двох дійсних змінних.

Нехай в області $D = \{a \le x \le b, c \le y \le d\}$ потрібно знайти максимальне значення функції $f(x, y)$, яка, може бути негладкою функцією в D. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $f(x, y) > 0$ для всіх $(x, y) \in D$. Побудуємо в області D сітку:

$$x_i = a + ih, \quad i = 0,1,\dots,n, \quad h = (b-a)/n,$$
$$y_j = c + jk, \quad j = 0,1,\dots,m, \quad k = (d-c)/m.$$

Позначимо $f(x_i, y_j) = a_{ij}$ $(i = 0,1,\dots,n;\ j = 0,1,\dots,m)$. У просторі xyz побудуємо множину точок $P_{ij}(x_i, y_j, -\ln a_{ij})$ з координатами $x = x_i, y = y_j, z = -\ln a_{ij}$ $(i = 0,1,\dots,n; j = 0,1,\dots,m)$. З кожної точки P_{ij} проведемо півпряму в додатному напрямку осі Oz, перпендикулярно до площини xy. Множину точок цих півпрямих позначимо S, а її опуклу оболонку – $C(S)$. Для кожної точки $(x, y) \in D$, визначимо точку $B(x, y, k(x, y))$, де

$$k(x, y) = \inf_{(x,y,z)\in C(S)} z.$$

Множина точок $B(x, y, k(x, y))$, $(x, y) \in D$, утворює багатогранну поверхню δ_f, яка обмежує $C(S)$ знизу. Ця поверхня є неперервною, опуклою і її рівняння має вигляд

$$z = k(x, y),\ (x, y) \in D.$$

Позначимо

$$M_f(x, y) = \exp(-k(x, y)),\ (x, y) \in D.$$

Тоді для кожної точки $(x_i, y_i)\,(i = 0,1,\dots,n;\ j = 0,1,\dots,m)$ виконується нерівність

$$a_{ij} \le M_f(x_i, y_j).$$

Крім того, $M_f(x_0, y_0) = a_{00}$, $M_f(x_0, y_m) = a_{0m}$, $M_f(x_n, y_0) = a_{n0}$, $M_f(x_n, y_m) = a_{nm}$. Отже, апроксимуюча функція $M_f(x, y)$ є некласичною мажорантою Ньютона для значень $a_{ij}\,(i = 0,1,\dots,n;\ j = 0,1,\dots,m)$, а δ_f – некласичною діаграмою Ньютона.

Якщо позначити

$$M_f(x_i, y_j) = T_{ij} \ (i = 0,1,\dots n;\ j = 0,1,\dots m),$$

то числові нахили мажоранти Ньютона в напрямку осей абсцис і ординат визначатимуться відповідно за формулами:

$$R_{ij}(x) = \left(\frac{T_{i-1,j}}{T_{ij}}\right)^{\frac{1}{h}} \ (i = 1,2,\dots,n;\ j = 0,1,\dots,m;\ R_{0j} = 0),$$

$$R_{ij}(y) = \left(\frac{T_{i,j-1}}{T_{ij}}\right)^{\frac{1}{k}} \ (j = 1,2,\dots,m;\ i = 0,1,\dots,n;\ R_{i0} = 0).$$

Враховуючи властивості числових нахилів

$$R_{ij}(x) \le R_{i+1,j}(x) \quad (i = 0,1,\dots,n-1;\ j = 0,1,\dots,m),$$

$$R_{ij}(y) \le R_{i,j+1}(y) \quad (j = 0,1,\dots,m-1;\ i = 0,1,\dots,n)$$

нами побудовано чисельний метод відшукання максимального значення негладкої функції $f(x, y)$. Алгоритм методу побудовано окремо в двох випадках: функція $f(x, y)$ – строго вгнута, функція $f(x, y)$ – довільна. Зауважимо, якщо функція $f(x, y)$ – строго вгнута, то алгоритм методу є простішим, оскільки в цьому випадку $T_{ij} = a_{ij} \quad (i = 0,1,\dots,n;\ j = 0,1,\dots,m)$ і для числових нахилів виконуються строгі нерівності

$$R_{ij}(x) < R_{i+1,j}(x) \quad (i = 0,1,\dots,n-1;\ j = 0,1,\dots,m),$$

$$R_{ij}(y) < R_{i,j+1}(y) \quad (j = 0,1,\dots,m-1;\ i = 0,1,\dots,n).$$

Проведено чисельний експеримент з дослідження ефективності побудованого методу.

1. Цегелик Г.Г. Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение // Укр. мат. журн. –1998. –Т. 41. –№ 5. –С. 1273–1276.
2. Цегелик Г.Г. Федишин Н.В. Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип. 50. – С. 209–211.
3. Цегелик Г.Г. Федишин Н.В. До побудови апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично // Там само. – 1999. – Вип. 52. –С. 111–116.
4. Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В. Нова формула мажорантного типу для наближеного обчислення подвійних інтегралів // Волиньський матем. вісник. – 2000. – Вип. 7. – С. 159–164.