УДК 518.12

М. І. Глебена (Ужгородський нац. ун-т)
Г. Г. Цегелик (Львівський нац. ун-т імені Івана Франка)

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ВІДШУКАННЯ ЕКСТРЕМУМУ НЕДИФЕРЕНЦІЙОВАНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ

The method of finding of the extremum non-differential function of two real variables is suggested. The method is based on the use of the apparatus of non-classical Newtonian majorant and diagrams functions which are given discretely. The algorithm of the method converges at any starting approximation.

Пропонується метод відшукання екстремуму недиференційованих функцій двох дійсних змінних, в основі якого лежить використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично. Алгоритм методу збігається при будь-якому початковому наближенні.

При розв'язуванні різних класів прикладних задач і задач в самій математиці нерідко доводиться мати справу з відшуканням екстремуму негладких функцій. Такі ситуації зустрічаються, наприклад, в теорії апроксимації, в застосуваннях з області дослідження операцій, в застосуваннях теорії керування рухом динамічних систем тощо. В роботі, використовуючи апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично чи аналітично $[1, 2]$, будується новий чисельний метод відшукання екстремуму недиференційованих функцій від двох дійсних змінних, збіжність якого не залежить від вибору початкового наближення.

Розглянемо спочатку логарифмічно вгнуту функцію $f(x, y)$, визначену в деякій області $D = \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$. При цьому вважатимемо, що $f(x, y) > 0$ для всіх $(x, y) \in D$. Якщо для функції $f(x, y)$ ця умова не виконується, то завжди можна підібрати таку сталу $C > 0$, що нерівність $f(x, y) + C > 0$ буде справедлива для всіх $(x, y) \in D$. І замість відшукання максимального значення функції $f(x, y)$ можемо шукати максимум функції $f(x, y) + C$.

Припустимо, що в області D треба знайти максимум функції $f(x, y)$. Враховуючи властивості мажоранти і діаграми Ньютона функції, заданої таблично, алгоритм методу полягає в слідуючому.

В області D вибираємо деяке початкове наближення $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ екстримальної точки і розглядаємо $f\left(x, y^{(0)}\right)$ як функцію однієї змінної x. На проміжку $[a, b]$ вибираємо систему точок $x_k = a + kh_1$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $h_1 = (b - a)/n$ і знаходимо значення функції $f\left(x, y^{(0)}\right)$ в цих точках. Нехай $f\left(x_k, y^{(0)}\right) = a_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Використовуючи алгоритм відшукання максимального значення функції від однієї змінної [3], серед точок x_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, знаходимо точку, в якій функція $f\left(x, y^{(0)}\right)$ набуває найбільшого значення. Нехай цією точкою буде точка $x^{(1)}$. Зафіксовуємо цю точку і розглядаємо $f\left(x^{(1)}, y\right)$ як функцію однієї змінної y. На проміжку $[c, d]$ вибираємо систему точок $y_k = c + kh_2$, $k = 0, 1, \ldots, m$, $h_2 = (d - c)/m$ і знаходимо значення функції $f\left(x^{(1)}, y\right)$ в цих точках. Нехай $f\left(x^{(1)}, y_k\right) = b_k$, $k = 0, 1, \ldots, m$. Використовуючи алгоритм відшукання максимального значення функції однієї змінної [3], серед точок y_k,

$k = 0, 1, \ldots, m$, знаходимо точку $y^{(1)}$, в якій функція $f\left(x^{(1)}, y\right)$ приймає найбільше значення. Зафіксовуємо цю точку. Тоді аналогічно знаходимо точку $x^{(2)}$, в якій функція $f\left(x, y^{(1)}\right)$ на відповідній дискретній множині точок набуває найбільшого значення. І т.д.

Отже, в процесі виконання алгоритму одержуємо послідовність точок

$$\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right),\ \left(x^{(1)}, y^{(1)}\right),\ \left(x^{(2)}, y^{(2)}\right),\ \ldots$$

Робота алгоритму продовжується доти, доки не буде знайдена точка $\left(x^{(r)}, y^{(r)}\right)$ така, що $x = x^{(r)}$ є точкою максимуму функції $f\left(x, y^{(r-1)}\right)$, а $y = y^{(r)}$ є точкою максимуму функції $f\left(x^{(r)}, y\right)$ на відповідних дискретних множинах точок. Тоді точку $\left(x^{(r)}, y^{(r)}\right)$ приймаємо за точку максимуму функції $f(x, y)$. Якщо $\max\limits_{(x,y)\in D} f(x, y) = f(\alpha, \beta)$, то

$$\left|x^{(r)} - \alpha\right| < h_1, \left|y^{(r)} - \beta\right| < h_2.$$

Щоб з більшою точністю знайти точку, в якій функція $f(x, y)$ набуває максимального значення, треба той же алгоритм застосувати до функції $f(x, y)$, але за область D взяти область

$$D^{(1)} = \left\{x^{(r)} - h_1 \le x \le x^{(r)} + h_1, y^{(r)} - h_2 \le y \le y^{(r)} + h_2\right\}.$$

Якщо $f(x, y)$ є довільною негладкою функцією, то для відшукання точки, в якій ця функція досягає абсолютного максимуму, застосовуємо приведений алгоритм, але для відшукання точок максимуму функції від однієї змінної, які при цьому одержуються, на відповідних дискретних множинах точок, треба використовувати алгоритм оптимізації довільної функції, приведений в [3].

Найбільшою перевагою розглянутого алгоритму є те, що збіжність алгоритму не залежить від вибору початкового наближення $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$.

Якщо область D є всією площиною, тобто $D = \{-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty\}$, то за початкове наближення беремо довільну точку $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ і визначаємо послідовність точок $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$, $\left(x^{(1)}, y^{(1)}\right)$, $\left(x^{(2)}, y^{(2)}\right)$, …, яка збігається до екстремальної точки.

Перехід від точки $\left(x^{(i)}, y^{(i)}\right)$ до точки $\left(x^{(i+1)}, y^{(i+1)}\right)$ відбувається так. Спочатку знаходимо точку $x^{(i+1)}$ в якій функція $f\left(x, y^{(i)}\right)$ на дискретній множині точок $x^{(i)} + kh_1$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ набуває найбільшого значення. Після цього знаходимо точку $y^{(i+1)}$, в якій функція $f\left(x^{(i+1)}, y\right)$ набуває найбільшого значення на дискретній множині точок $y^{(i)} + kh_2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Спосіб відшукання точок $x^{(i+1)}$ і $y^{(i+1)}$, в яких відповідно функції $f\left(x, y^{(i)}\right)$ і $f\left(x^{(i+1)}, y\right)$ приймають найбільше значення випливає із теореми 4 [1].

Приклад 1. Розглянемо задачу мінімізації функції Біля

$$f(x_1, x_2) = (1,5 - x_1(1 - x_2))^2 + \left(2,25 - x_1\left(1 - x_2^2\right)\right)^2 + \left(2,625 - x_1\left(1 - x_2^3\right)\right)^2.$$

Графік цієї функції зображений на рис. 1.

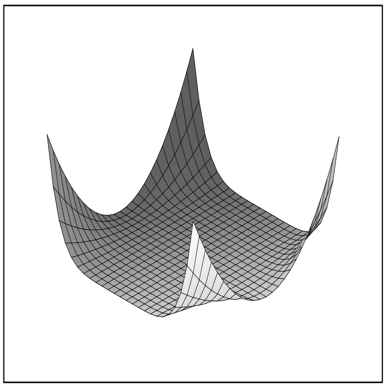

Рис. 1

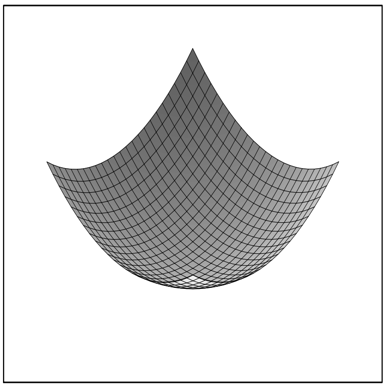

Рис. 2

Ця функція має точку мінімуму $\bar{x} = (3; 0,5)$, $f(\bar{x}) = 0$.

Використовуємо приведений алгоритм для відшукання максимуму функції $-f(x_1, x_2) + 70000$. Якщо за початкове наближення взяти точку $(2,9; 0,4)$, а $h_1 = h_2 = 0,001$, то послідовні наближення збігаються до точки $(2,982; 0,495)$. Збіжність послідовних наближень показана в табл. 1.

Таблиця 1

№	x_1	x_2	№	x_1	x_2	№	x_1	x_2
1	2,9	0,474	6	2,944	0,486	11	2,968	0,492
2	2,911	0,477	7	2,951	0,488	12	2,973	0,493
3	2,931	0,482	8	2,958	0,489	13	2,975	0,494
4	2,931	0,482	9	2,961	0,49	14	2,979	0,495
5	2,937	0,484	10	2,965	0,491	15	2,982	0,495

Якщо тепер за початкове наближення взяти точку $(2,982; 0,495)$ і покласти $h_1 = h_2 = 0,0001$, то послідовні наближення збігаються до точки $(2,9971; 0,4993)$. Збіжність послідовних наближень показана в табл. 2.

Таблиця 2

№	x_1	x_2	№	x_1	x_2	№	x_1	x_2
1	2,982	0,4955	7	2,9906	0,4977	13	2,9953	0,4988
2	2,9838	0,496	8	2,9917	0,4979	14	2,9957	0,4989
3	2,9856	0,4964	9	2,9924	0,4981	15	2,996	0,499
4	2,9871	0,4968	10	2,9931	0,4983	16	2,9964	0,4991
5	2,9885	0,4971	11	2,9939	0,4985	17	2,9967	0,4992
6	2,9896	0,4974	12	2,9946	0,4987	18	2,9971	0,4993

Отже, з точністю $h = 0,0001$ $min f(x_1, x_2) = 0,00000136$ при $x_1 = 2,9971$ $x_2 = 0,4993$.

Приклад 2. Розглянемо задачу мінімізації штрафної функції №2

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + 10^{-3}\left(x_1^2 + x_2^2 - 0,25\right)^2.$$

Графік цієї функції зображений на рис. 2. Ця функція має точку мінімуму $\bar{x} = (0,9965; 0,9965)$, $f(\bar{x}) = 0$.

Використовуємо приведений алгоритм для відшукання максимуму функції $-f(x_1, x_2) + 100$. За початкове наближення візьмемо точку $(0,94; 0,99)$ і $h_1 = h_2 = 0,001$, послідовні наближення збігаються до точки $(0,997; 0,997)$. Збіжність послідовних наближень показана в табл. 3.

Таблиця 3

№	x_1	x_2
1	0,94	0,99
2	0,997	0,99
3	0,997	0,997

Якщо тепер за початкове наближення взяти точку $(0,996; 0,996)$ і покласти $h_1 = h_2 = 0,00001$, то послідовні наближення збігаються до точки $(0,99654; 0,99654)$. Збіжність послідовних наближень показана в табл. 4.

Таблиця 4

№	x_1	x_2
1	0,996	0,996
2	0,99654	0,996
3	0,99654	0,99654

Отже, з точністю $h = 0,00001$ $min f(x_1, x_2) = 0,00304$ при $x_1 = 0,99654$ $x_2 = 0,99654$.

1. *Цегелик Г. Г.* Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, №9. – С. 1273–1276.
2. *Цегелик Г. Г.* Мажоранты и диаграммы Ньютона функций действительной переменной, заданных в промежутке //Докл. АН УССР. Сер.А. – 1987. - №6. – С. 18–19.
3. *Глебена М.І., Цегелик Г. Г.* Чисельний метод мажорантного типу відшукання екстремуму негладких і розривних функцій //Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.матем. і інформ. – 2006. - Вип. 12–13. – С. 55–58.

Одержано 10.05.2007